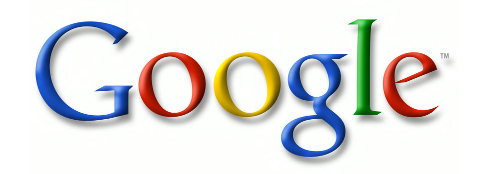
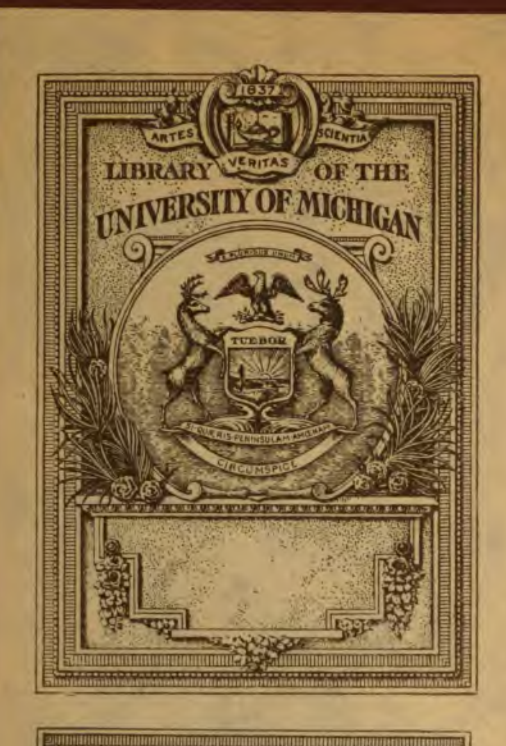



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE





REPERTORIUM DER PHYSIK

VON

RUDOLF H. WEBER UND RICHARD GANS

PROFESSOR IN ROSTOCK PROFESSOR IN LAPLATA

ERSTER BAND

MECHANIK UND WÄRME

ERSTER TEIL

MECHANIK, ELASTIZITÄT, HYDRODYNAMIK UND AKUSTIK

BEARBEITET VON

RICHARD GANS UND F. A. SCHULZE

MIT 126 FIGUREN IM TEXT

BG

LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1915

Vorwort.

Als vor einigen Jahren die Teubnersche Verlagsbuchhandlung uns den Vorschlag machte, für sie ein Repertorium der Physik im Sinne des bekannten Pascalschen Repertoriums der Mathematik zu verfassen, haben wir uns nach reiflicher Überlegung dazu bereit erklärt, obwohl wir uns sehr wohl der Schwierigkeit der Aufgabe bewußt waren. Da sich das Bedürfnis nach einem solchen Werke nicht ableugnen läßt, und da sich würdigere Verfasser zwar in großer Zahl finden, aber kaum bereit finden lassen, haben wir uns dieser Aufgabe unterzogen.

Schon bald nach Beginn unserer Vorarbeiten erkannten wir beide unabhängig voneinandar, daß eine Gestaltung des Werkes genau nach Art des Pascalschen sich nicht durchführen ließe oder doch von einem außerordentlich geringen Nutzen für den Leser sein würde. Es lassen sich die physikalischen Gesetze und Forschungsresultate bis auf wenige nicht in so knapper Form darstellen wie die mathematischen, und der Weg, wie sie gewonnen worden, ist für neue produktive Arbeiten oft wichtiger als das Ergebnis selber. Und auch, wo es sich um mathematische Ableitungen handelt, sind die Prämissen, die man aus didaktischen Gründen häufig erst mitten im Beweisgang formuliert, die Vernachlässigungen und Annäherungen von sehr großer Bedeutung. Man muß also auch mathematische Wege vor den Augen des Lesers durchwandeln.

So ergab sich notgedrungen eine andersartige Darstellung als in Pascals Repertorium. Der Zweck unseres Buches aber bleibt derselbe, den Pascal in seinem Vorwort skizziert: Ein Vademecum zu sein für den, der selbständig zu arbeiten beginnt. Er soll sich an der Hand dieses Buches orientieren können über das Gebiet, das ihn gerade beschäftigt, und soll eine erste Einführung in die Literatur erhalten.

Hoffen wir zugleich, was Pascal von seinem Werke sagt. Es wird vielleicht manchem, der sich zu sehr spezialisiert hat, eine bequeme Möglichkeit bieten, auf ihm ferner liegenden Gebieten seine Kenntnisse zu erweitern.

Zur Erfüllung dieses Zwecks schien uns die Stellung des Werkchens zwischen dem Lehrbuch und dem Handbuch geraten. Man wird stofflich mehr in unserem Buche finden als in Lehrbüchern. Vor allen Dingen sind viele einschlägige Originalarbeiten zitiert, um den Leser nach einem ersten Studium des Problems zum weiteren Eindringen in die Frage auf diese zu verweisen. Andrerseits enthält das Buch wesentlich weniger als die bekannten Handbücher der Physik. So ist z. B. Vollständigkeit im Zahlenmaterial, in der Anführung der Methoden und der Angabe der Autoren nicht erstrebt worden, da erfahrungsgemäß ein Zuviel den Leser leicht abschreckt und verwirrt. Bei diesem Charakter mußten manche Finessen fortbleiben, manches auf Kosten der Strenge gekürzt oder unterdrückt werden.

Gegenüber vielen Handbüchern hat unser Repertorium den Nachteil, daß nicht jedes Kapitel aus der Feder eines Spezialisten auf dem fraglichen Gebiete stammt, doch hoffen wir, daß durch das Zusammenwirken von wenigen demgegenüber eine größere Einheitlichkeit gewährleistet wird.

Wir hielten es jedoch für gut, zur Abfassung einiger Kapitel die Mitarbeit von Kollegen heranzuziehen, deren Forschungen in dem betreffenden Wissenszweige eine Garantie für den Wert ihres Beitrags leisten. Ihre Namen sind im Inhaltsverzeichnis ausdrücklich genannt. Unseres herzlichsten Dankes für ihre tatkräftige Unterstützung sind sie gewiß.

Der erste Teil des ersten Bandes, der hier vorliegt, enthält die Mechanik starrer Körper, die Elastizitätstheorie, Hydrodynamik und Akustik. Der zweite Teil, dessen Erscheinen nahe bevorsteht, wird die Kapillarität, Wärme, statistische Mechanik und kinetische Gastheorie bringen, während der zweite Band den Problemen der Elektrizität, des Magnetismus und der Optik reserviert bleibt.

Schließlich ist es uns eine angenehme Pflicht, der Verlagsbuchhandlung für ihr Entgegenkommen in jeder Beziehung und ihre große Geduld bei der Drucklegung unsern besten Dank auszusprechen.

Rostock und La Plata im Juni 1914.

R. H. Weber. R. Gans.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Buch (R. Gans).

Mechanik diskreter Massenpunkte.

Kapitel I.

Die Grundmaße und -Begriffe der Mechanik.

Kapitel II.

Die Prinzipe der Mechanik.

Kapitel III.

Dynamik des starren Körpers.

Kapitel IV.

Gravitation.

Kapitel V.

Festlegung eines Koordinatensystems. Erddrehung. Zentrifugalkraft.

Kapitel VI.

Reibung.

Kapitel VII.

Theorie der Schwingungen.

Zweites Buch (R. Gans).

Mechanik kontinuierlicher Medien.

A. Elastizität.

Kapitel I.

Kinematik und allgemeine Dynamik deformierbarer Medien.

Kapitel II.

Statische Probleme der Elastizitätstheorie.

Kapitel III.

Dynamische Probleme der Elastizitätstheorie.

B. Hydrodynamik.

Kapitel I.

Bewegungsgleichungen und allgemeine Sätze.

Kapitel II.

Feste Körper in Flüssigkeiten. Kinematik.

Kapitel III.

Feste Körper in Flüssigkeiten. Dynamik.

Kapitel IV.

Zweidimensionale Probleme.

Kapitel V.

Wellen.

Kapitel VI.

Luftschwingungen.

Kapitel VII.

Flüssigkeitsreibung.

Kapitel VIII.

Ebbe und Flut.

Drittes Buch (F. A. Schulze).

Akustik.

Kapitel I.

Schallausbreitung.

Kapitel II.

Schallintensität.

Kapitel III.

Verschiedene Probleme der Akustik.

Kapitel IV.

Gliederung des Tonbereiches.

Erstes Buch.

Mechanik diskreter Massenpunkte.

Kapitel I.

Die Grundmaße und -Begriffe der Mechanik.

1. Einheit der Länge. Als Einheit der Länge wird heutzutage bei allen wissenschaftlichen Messungen das Zentimeter gewählt. Das ist der hundertste Teil des Meters oder der Länge, welche durch den Abstand zweier Marken auf einem im Pariser Archiv aufbewahrten Normalmaßstab bei 0^0 gegeben ist.

Eigentlich sollte das Meter der 10 millionte Teil des durch die Pariser Sternwarte laufenden Meridianquadranten sein. Um die Länge desselben genau zu bestimmen, veranstalteten Delambre und Méchain im Auftrage der französischen Nationalversammlung 1792—1798 eine Gradmessung, auf Grund deren ein Platinstab von genau einem Meter Länge bei 0^0 angefertigt wurde und als „Mètre des Archives" in Paris aufbewahrt wird.

Der Gedanke bei der Herstellung einer solchen auf die Erddimensionen bezogenen Maßeinheit war der, daß eine genaue Reproduzierbarkeit möglich sein sollte, falls das Normalmeter einmal verloren ginge, und außerdem hatte man die Absicht, anstatt der alten Gradteilung eine neue einzuführen, bei der der Quadrant 100^0, der Grad $100'$, die Minute $100''$ hätte, sodaß eine einfache Beziehung zwischen der Winkeleinheit auf der Erdoberfläche und der Längeneinheit bestände ($1'' = 10^m$).

Da es sich aber herausgestellt hat, daß man mit viel größerer Genauigkeit die Längen zweier geeignet hergestellten Maßstäbe miteinander vergleichen kann, als man die zu einer Gradmessung nötigen geodätischen Beobachtungen anzustellen vermag[1], und daß die Konstanz eines Normalmaßstabes wahrscheinlich sehr groß —

1) Nach Bessel ist das Normalmeter $^1/_{10\,000\,856}$ des Erdquadranten.

wohl größer als die der Erdgestalt — ist, so hat für uns die Relation des Meters zur Meridianlänge nur noch historisches Interesse.

Übrigens ist zu bemerken, daß, selbst wenn das Normalmeter und die von demselben angefertigten Kopien sämtlich verloren gingen, durch den exakten Vergleich des Meters mit der Wellenlänge dreier Kadmiumlinien[1]) eine sehr genaue Reproduktion des Meters sich herstellen ließe.

Da festgestellt wurde, daß ein Maßstab von genau *einem* Meter Länge, ein sogenannter Endmaßstab, nicht besonders geeignet ist zur Anfertigung von Kopien, so wurden neue Stäbe von 1,02 m Länge hergestellt, auf denen durch feine Striche die Meterlänge markiert ist, und die deshalb Strichmaßstäbe genannt werden. Diese neueren Maßstäbe des internationalen Komites für Maße und Gewichte bildeten noch in anderer Hinsicht eine Verbesserung des früheren mètre des archives, dem sie sich in der Länge so genau wie möglich anpaßten.

Da Platin als zu weich befunden wurde, wählte man als Material eine Platin-Iridium-Legierung von 90% Platin und 10% Iridium. Diese Legierung ist unveränderlich, sehr hart, hat einen großen Elastizitätskoeffizienten, so daß ein aus derselben gefertigter Stab sich nur wenig durch sein eigenes Gewicht deformiert, und einen kleinen Ausdehnungskoeffizienten.

Der Querschnitt ist nicht mehr, wie beim mètre des archives rechteckig, sondern hat die in Fig. 1 dargestellte Gestalt, deren Schwerpunkt sich bei O befindet. Liegt der Stab horizontal auf zwei Schneiden, so gehen die neutralen Fasern desselben, d. h. diejenige Fläche, deren Länge sich bei der Deformation des Stabes durch sein eigenes Gewicht nicht ändert, durch O (vgl. Elastizität). Auf der Fläche dieser neutralen Fasern sind die beiden Striche angebracht, die Anfang und Ende des Meters markieren. Sodann bietet die Form des Querschnitts den Vorteil, daß ihr Trägheitsmoment bezüglich der neutralen Achse aa' des Querschnitts im Verhältnis zur Fläche wesentlich größer ist als bei rechteckigem Querschnitt, wodurch auch eine geringere Durchbiegung gewährleistet wird, und schließlich temperiert sich der Stab infolge seiner großen Oberfläche schnell aus.

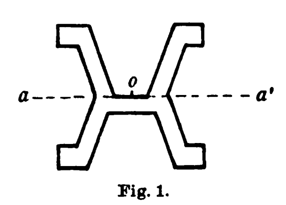


Fig. 1.

1) A. Michelson, *Traveaux et mém. du bureau internat. des poids et mesures* **11.** 1894.

Bessel[1]) hat gefunden (vgl. den Abschnitt in der Elastizitätslehre über den gleichförmig belasteten Balken auf zwei Stützen), daß die Durchbiegung des Stabes ein Minimum ist, wenn der Abstand der Schneiden 0,5594 seiner Länge beträgt, und zwar ist dann der Längenunterschied der neutralen Faser und ihrer horizontalen Projektion $4 \cdot 10^{-10}$ der ganzen Länge[2]), ein zwar berechenbarer, aber unmeßbar kleiner Betrag.

2. Einheit der Fläche. Als Einheit der Fläche dient im absoluten Maßsystem das Quadratzentimeter (= 1 cm²), d. h. diejenige Fläche, deren Inhalt gleich dem eines Quadrats von 1 cm Seitenlänge ist, als *Einheit des Volumens* das Kubikzentimeter (= 1 cm³), d. h. dasjenige Volumen, das gleich dem Volumen eines Würfels von 1 cm Seitenlänge ist. Man braucht also für Flächen- und Rauminhalte keine von der Längeneinheit unabhängigen Einheiten; Quadratzentimeter und Kubikzentimeter heißen deshalb abgeleitete Maße.

3. Zeitmessung. Zur Zeitmessung benutzt man die Rotation der Erde um ihre Achse. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen desselben Fixsternes durch den Meridian, also die Zeit zwischen zwei Kulminationen eines Fixsterns, heißt der *Sterntag*, während die Zeit zwischen zwei Kulminationen der Sonne der *wahre Sonnentag* genannt wird. Diese beiden Definitionen des Tages weichen wegen der Bewegung der Erde um die Sonne (Revolution innerhalb eines Jahres) voneinander ab. Folgendermaßen ergibt sich die Beziehung zwischen der Länge des Stern- und des Sonnentages:

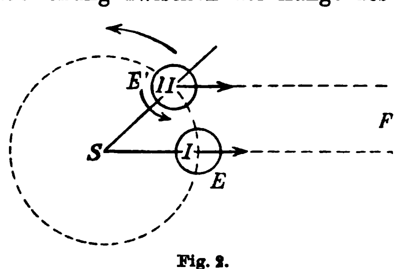


Fig. 2.

Der Pfeil an der Erde E (Fig. 2) deute die Visierrichtung eines Meridianinstrumentes an. In den beiden, zwei aufeinanderfolgenden Sterntagen entsprechenden Stellungen I und II der Erde kulminiert gerade der Fixstern F, der praktisch als unendlich entfernt angenommen werden kann. Während aber z. B. in der Lage I die Visierrichtung genau von der Sonne S abgewandt ist, ist das in

1) F. W. Bessel, *Darstellung der Untersuchungen und Maßregeln, welche in den Jahren 1834—1838 durch die Einheit des preußischen Längenmaßes veranlaßt worden sind.* Beilage 1, S. 132. Berlin 1839.
2) J. R. Benoît, *Rapp. présentés au Congrès de Phys.* **1** p. 50. Paris 1900.

der Lage II noch nicht der Fall. Die Erde hätte sich noch um den $\sphericalangle ESE'$ weiter um ihre Achse drehen[1]) müssen, damit das auch für die zweite Lage gälte. So folgt, wenn das Jahr aus n Sonnentagen besteht, daß

$$1 \text{ Sonnentag} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ Sterntage}$$

oder n Sonnentage $= n + 1$ Sterntage sind, und zwar ist $n =$ 365,2422.

Gemeint ist hier das sogenannte tropische Jahr, d. h. die Zeit zwischen zwei Durchgängen der Sonne durch den Frühlingspunkt, der infolge der Präzession der Erdachse nicht ganz konstant bleibt, so daß sich das tropische Jahr vom siderischen Jahr (der Zeit zwischen zwei Durchgängen der Sonne durch ein bestimmtes Sternbild) etwas unterscheidet.

Im bürgerlichen Leben und in der Physik rechnet man nach *mittleren Sonnentagen.* Hierunter versteht man folgendes: Man denke sich die Sonne anstatt auf der Ekliptik mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Äquator laufend. Dann ist die Zeit zwischen zwei Kulminationen dieser gedachten Sonne ein mittlerer Sonnentag; ihn teilt man in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden.

Kinematik: Geschwindigkeit und Beschleunigung.

4. Geschwindigkeit. Um Bewegungen d. h. Ortsveränderungen eines Körpers mit der Zeit angeben zu können, muß man sich eines Bezugssystems (Koordinatensystems) bedienen, in dem die individuellen Punkte des Körpers Funktionen der Zeit sind. Um irgend einen Teil des Körpers immer wieder identifizieren zu können, muß der Ort desselben eine stetige Funktion der Zeit sein.

Je nach der Wahl des Bezugssystems werden sich die zu beschreibenden Bewegungen verschieden ausdrücken. Es zeigt sich, daß die Bewegungsgesetze am einfachsten werden, wenn man ein zu den Fixsternen relativ festes Koordinatensystem wählt, oder genauer gesagt, ein relativ zu denjenigen Fixsternen festes System, denen der Astronom keine Eigenbewegung zuschreibt.

Häufig genügt es (bei den meisten Laboratoriumsversuchen), anstatt dessen ein mit der Erde verbundenes Koordinatensystem zu Grunde zu legen. Später werden wir darauf zurückkommen,

---

1) $\sphericalangle ESE'$ ist der Deutlichkeit wegen in Fig. 2 übertrieben groß gezeichnet.

nach welchen Prinzipien das theoretisch einfachste Bezugssystem gewählt wird (vgl. Nr. 65).

Unter *Geschwindigkeit* versteht man den in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg nach Größe und Richtung. Ist die Geschwindigkeit nicht zeitlich konstant, so tritt an Stelle dieser Definition die folgende: Geschwindigkeit ist der in der unendlich kleinen Zeit dt zurückgelegte Weg $d\mathfrak{s}$, dividiert durch dt. Dafür werden wir zur Abkürzung sagen: Der in der unendlich kleinen Zeiteinheit zurückgelegte Weg.

Die Geschwindigkeit ist also ein Vektor, der zwar im allgemeinen vom Bezugssystem abhängig, aber unabhängig von der Wahl eines unter allen den Bezugssystemen ist, die zeitlich eine unveränderliche Lage gegeneinander haben.

Von der Geschwindigkeit *eines* Körpers ohne Bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem — einer sogenannten absoluten Geschwindigkeit — zu reden, ist sinnlos, denn die Geschwindigkeit *eines* Körpers ist garnicht definierbar.[1])

Nennen wir die rechtwinkligen Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines Punktes mit den Koordinaten x, y, z $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$, so ist

$$\mathfrak{v}_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \mathfrak{v}_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad \mathfrak{v}_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \tag{1}$$

Der absolute Wert der Geschwindigkeit ist

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\mathfrak{v}_x^2 + \mathfrak{v}_y^2 + \mathfrak{v}_z^2}; \tag{2}$$

die Richtungskosinus der Geschwindigkeit gegen die Achsen sind

$$\cos(\mathfrak{v}, x) = \frac{\mathfrak{v}_x}{v}; \quad \cos(\mathfrak{v}, y) = \frac{\mathfrak{v}_y}{v}; \quad \cos(\mathfrak{v}, z) = \frac{\mathfrak{v}_z}{v}. \tag{3}$$

Die *Komponenten* der Geschwindigkeit sind natürlich auch in zwei zeitlich gegeneinander unveränderlichen Koordinatensystemen verschieden.

Die Geschwindigkeit Eins hat ein Körper, der 1 cm in 1 sec zurücklegt. Die Dimension der Geschwindigkeit im CGS.-System ist

$$[v] = [\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}].$$

5. Beschleunigung. Unter Beschleunigung versteht man den in der unendlich kleinen Zeiteinheit erfolgenden Geschwindigkeits-

---

1) Eine Zusammenstellung der Literatur über absolute Bewegungen findet sich bei A. Voß, *Math. Enc.* IV 1 S. 30 ff. S. auch unten den Abschnitt über das Inertialsystem Nr. 65.

zuwachs. Wir haben es also mit einem Vektor zu tun, der sich nach den Regeln der geometrischen Addition und Subtraktion als Differenz der Vektoren $\mathfrak{v}(t + dt)$ und $\mathfrak{v}(t)$ ergibt; diesen haben wir noch durch dt zu dividieren.

Die Komponenten der Beschleunigung lauten

$$\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} = \dot{\mathfrak{v}}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad \text{usw.,} \tag{1}$$

ihr absoluter Wert ist

$$|\dot{\mathfrak{v}}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \tag{2}$$

Falls die Geschwindigkeit ihre Richtung ändert, der Körper also eine krumme Bahn beschreibt, haben Beschleunigung und Geschwindigkeit nicht dieselbe Richtung, denn der Vektor

$$d\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(t + dt) - \mathfrak{v}(t)$$

ist derjenige Vektor, der geometrisch zu $\mathfrak{v}$ addiert, $\mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$ nach Größe und Richtung ergibt (vgl. Fig. 3).

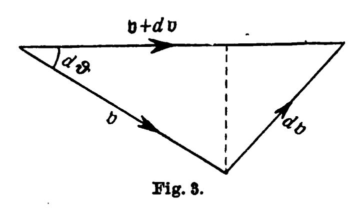


Fig. 3.

Man kann den Vektor $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ in zwei Komponenten in der Schmiegungsebene der Bahnkurve zerlegen, von denen der eine tangential, der andere normal zur Bahnkurve ist. Die tangentiale Beschleunigungskomponente ist der in der unendlich kleinen Zeiteinheit erfolgte Geschwindigkeitszuwachs in Richtung der Bahn. War zur Zeit t die Geschwindigkeit in Richtung der Bahn $\frac{ds}{dt}$, so ist sie zur Zeit $t + dt$ in derselben Richtung $\frac{ds}{dt} + \frac{d^2s}{dt^2}dt$, also die tangentiale Beschleunigungskomponente

$$\dot{\mathfrak{v}}_s = \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{3}$$

Um die Normalbeschleunigung zu bestimmen, bezeichnen wir den unendlich kleinen Winkel zwischen den Richtungen von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$ mit $d\vartheta$. Dann ist die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Bahn zur Zeit t Null. In derselben im Raume festen Richtung ist aber zur Zeit $t + dt$ die Komponente $|\mathfrak{v}| \cdot d\vartheta$ vorhanden, also findet in dieser Richtung ein auf die Zeiteinheit bezogener Geschwindigkeitszuwachs $|\mathfrak{v}| \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = |\mathfrak{v}| \frac{d\vartheta}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{|\mathfrak{v}|^2}{R}$ statt,

wo R den Krümmungsradius der Bahn bedeutet. Die Normalbeschleunigung ist also

$$\dot{\mathfrak{v}}_n = \frac{\mathfrak{v}^2}{R}. \tag{4}$$

Bewegt sich ein Massenpunkt z. B. auf einem Kreise mit konstanter Geschwindigkeit, so ist zwar $\dot{\mathfrak{v}}_s = 0$, aber $\dot{\mathfrak{v}}_n$ hat den in (4) angegebenen Wert.

Die Einheit der Beschleunigung ist die Geschwindigkeitszunahme um 1 $\left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right]$ in 1 sec. Die Dimension einer Beschleunigung a ist

$$[a] = [\text{cm sec}^{-2}].$$

Dynamik: Kraft; Newtonsche Bewegungsgleichungen.

6. Die Newtonschen Gesetze der Bewegung. Die Masse. In vielen Fällen kommt es vor, daß sämtliche Teilchen eines Körpers dauernd dieselbe oder genähert dieselbe Geschwindigkeit haben. Dann kann man von *der* Geschwindigkeit und *der* Beschleunigung des Körpers sprechen. Sieht man von der räumlichen Ausdehnung ab, so ist die Bewegung des Körpers bereits durch die Bewegung eines unendlich kleinen Teilchens des Körpers bestimmt. Man faßt dann den Körper als sogenannten „Massenpunkt" auf.

Newton[1]) gibt zuerst eine Definition der Masse in der Form, daß die Masse das Produkt aus Volumen und Dichte ist. Dann stellt er folgende Bewegungsgesetze als Axiome auf:

1. Jeder Körper beharrt im Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in gerader Linie, wenn er nicht durch Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern (Trägheitsprinzip).
2. Die Änderung der Bewegung[2]) ist proportional der Kraft und fällt der Richtung nach mit ihr zusammen.
3. Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich.

Mit Recht hat die moderne Kritik trotz der Anerkennung der großen Verdienste Newtons gegen diese Fassung der Axiome Einspruch erhoben.[3])

---

1) J. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 2. Aufl., Cambridge 1713, p. 1 u. 12.

2) Bewegung = motus ist im Sinne unserer heutigen „Bewegungsgröße" d. h. für das Produkt von Masse und Geschwindigkeit gebraucht.

3) E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, historisch-kritisch dargestellt. 4. Aufl. Leipzig 1901, p. 253.

Denn das erste Gesetz gibt nur eine vom Bezugssystem abhängige Definition der Kraft Null, sie ist durch das zweite Gesetz überflüssig gemacht. Das zweite Gesetz gibt nur eine Definition der Kraft, die aber unvollständig ist, da die Masse nicht definiert ist, denn die Newtonsche Definition der Masse ist unbrauchbar, weil die Dichte nur als Verhältnis von Masse zum Volumen definiert werden kann. Das dritte Gesetz gibt allerdings eine Definition des Massenverhältnisses, gehört also zum mindesten vor das zweite Gesetz.

Dieselben Erfahrungstatsachen lauten nach Mach[1]) in einwandfreier Formulierung:

1. Das Massenverhältnis zweier Körper ist dem Verhältnis der Beschleunigungen, die sie sich erteilen, wenn sie einander gegenüberstehen, umgekehrt proportional.

2. Es zeigt sich, daß, wenn man auf Grund dieses Satzes das Massenverhältnis zweier Körper K_1 und K_2 als μ_{12} und ebenso das Massenverhältnis der Körper K_2 und K_3 als μ_{23} sowie das von K_1 und K_3 als μ_{13} bestimmt hat,

$$\mu_{12} \cdot \mu_{23} = \mu_{13},$$

so daß man $\mu_{12} = \frac{m_1}{m_2}$; $\mu_{23} = \frac{m_2}{m_3}$; $\mu_{13} = \frac{m_1}{m_3}$ setzen kann, wo m_1 eine Größe ist, die für den Körper K_1 charakteristisch ist und seine Masse genannt wird, ebenso wie m_2 resp. m_3 die Massen von K_2 resp. K_3 heißen, und für diese Körper charakteristisch sind.

3. Kraft ist das Produkt aus Masse und Beschleunigung.

Der physikalische Inhalt dieser Kraftdefinition ist, daß die Beschleunigung das Bewegungsbestimmende ist und durch die momentane räumliche Anordnung der Massen schon gegeben ist.

Einheit der Masse ist das *Gramm*, der tausendste Teil des Kilogramms. Das Kilogramm ist die Masse eines Platingewichtes, das bei Paris im Pavillon de Breteuil aufbewahrt wird. Ursprünglich war beabsichtigt worden, als Kilogramm die Masse eines Kubikdezimeters Wasser von 4^0 zu wählen, es hat sich jedoch später herausgestellt, daß das auf Grund dieser Definition angefertigte Normal-Gewichtstück um ungefähr 45 mgr zu groß geworden ist.[2])

1) E. Mach, *l. c.*, p. 258.

2) Ch. Guillaume, *Rapports présentes an congr. de phys.* **1**, p. 99. Paris 1900.

Die analytische Formulierung des Newtonschen Gesetzes ist nach 3., wenn $\mathfrak{f}$ die Kraft, $\mathfrak{a}$ die Beschleunigung, m die Masse bedeutet,

$$m\mathfrak{a} = \mathfrak{f}. \tag{1}$$

Einheit der Kraft ist diejenige, welche der Masse Eins die Beschleunigung Eins erteilt. Diese Einheit führt den Namen Dyne ($\delta\acute{v}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ = Kraft). Die Dimension einer Kraft ist

$$[f] = [\text{gr} \cdot \text{cm sec}^{-2}].$$

In rechtwinkligen Komponenten lautet (1)

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \mathfrak{f}_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \mathfrak{f}_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \mathfrak{f}_z. \end{aligned} \tag{2}$$

Hat man es mit n Massenpunkten zu tun, so gilt für jeden eine Vektorgleichung

$$m_i\dot{\mathfrak{v}}_i = \mathfrak{f}_i. \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{3}$$

Sind andere als die betrachteten n Massenpunkte soweit von diesen entfernt, daß ihre Einwirkung auf die n Massen unberücksichtigt bleiben kann, so ist nach dem Reaktionsgesetz

$$\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i = 0, \tag{4}$$

und das System heißt ein *freies* System.

In rechtwinkligen Koordinaten lauten die Gleichungen (3) und (4)

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \mathfrak{f}_{ix} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3'}$$

usw.

und

$$\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_{ix} = 0; \ \sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_{iy} = 0; \ \sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_{iz} = 0. \tag{4'}$$

Häufig betrachtet man nur einen Teil des Systems. Für dieses Teilsystem gilt nicht mehr $\sum\mathfrak{f} = 0$, und dann können die $\mathfrak{f}$ Funktionen der Zeit und der Geschwindigkeit sein, während sie in freien Systemen, in denen keine nicht-mechanischen Erscheinungen

wie Wärme, chemische Veränderungen usw. auftreten, sondern nur reine Bewegungsvorgänge, erfahrungsgemäß bloße Funktionen der Koordinaten der Massenpunkte sind.

Integrale der Bewegungsgleichungen.

7. Das Integral der lebendigen Kraft. In dem zuletzt erwähnten Falle lassen sich sogar die Kraftkomponenten als partielle Differentialquotienten *einer* Funktion — V nach den betreffenden Koordinaten ausdrücken, so daß z. B.

$$\mathfrak{f}_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{1}$$

ist. Solche Kräfte heißen konservative Kräfte; die Funktion $-V$ wird die Kräftefunktion, V die potentielle Energie oder das Potential genannt.[1]) Dann schreiben sich die Gleichungen Nr. 6 (3')

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial x_i} \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial y_i} \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial z_i}. \end{aligned} \tag{2}$$

Multipliziert man die erste Gleichung (2) mit $\frac{dx_i}{dt}$, die zweite mit $\frac{dy_i}{dt}$, die dritte mit $\frac{dz_i}{dt}$, addiert und summiert über alle Massenpunkte, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\} = -\frac{dV}{dt}.$$

Demnach ist

$$T + V = h, \tag{3}$$

wo h eine Konstante ist und

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \mathfrak{v}_i^2 \tag{4}$$

die *kinetische Energie* oder *lebendige Kraft* heißt.

---

1) Lagrange, *Berlin. Mém. de l'Ac. 1777,* p. 155, führte zuerst die Kräftefunktion ein.

Der Inhalt der Gleichung (3) ist:

Die Summe von kinetischer und potentieller Energie bleibt zeitlich konstant.[1])

Da aber V nur von den Koordinaten der Massenpunkte abhängig ist, so bedeutet das im besonderen: Wenn sämtliche Massenpunkte wieder in dieselbe Lage kommen, wie zu einer früheren Zeit, so ist die kinetische Energie auch wieder dieselbe.

Auch wenn kein Potential V existiert, ergibt sich aus den Gleichungen Nr. 6 (3') durch Multiplikation mit $\frac{dx_i}{dt}$ usw. und darauf folgender Addition

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\mathfrak{v}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{f}_i, \mathfrak{v}_i), \tag{5}$$

wo $(\mathfrak{f}_i, \mathfrak{v}_i)$ in üblicher Vektorschreibweise

$$(\mathfrak{f}_i, \mathfrak{v}_i) = \mathfrak{f}_{ix}\frac{dx_i}{dt} + \mathfrak{f}_{iy}\frac{dy_i}{dt} + \mathfrak{f}_{iz}\frac{dz_i}{dt} = |\mathfrak{f}_i|\cdot|\mathfrak{v}_i|\cos(\mathfrak{f}_i, \mathfrak{v}) \tag{6}$$

das skalare Produkt aus $\mathfrak{f}_i$ und $\mathfrak{v}_i$ bedeutet.

Das skalare Produkt aus der Kraft und der Verschiebung $(\mathfrak{f}_i, d\mathfrak{s}_i)$, d. h. das Produkt aus Kraft, Verschiebung und dem Kosinus des von diesen beiden Vektoren eingeschlossenen Winkels oder, was dasselbe ist, das Produkt aus der $\left\{\begin{matrix}\text{Verschiebung}\\ \text{Kraft}\end{matrix}\right\}$ und der Projektion der $\left\{\begin{matrix}\text{Kraft}\\ \text{Verschiebung}\end{matrix}\right\}$ auf die Richtung der $\left\{\begin{matrix}\text{Verschiebung}\\ \text{Kraft}\end{matrix}\right\}$, heißt die von der Kraft am i^{ten} Massenpunkt geleistete *Arbeit.*

Gleichung (5) sagt also aus, daß die in der Zeiteinheit erfolgte Zunahme der kinetischen Energie gleich der in derselben Zeit von den Kräften geleisteten Arbeit ist oder in Formel

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d'A}{dt}. \tag{7}$$

(Hier soll $d'A$ bedeuten, daß die Größe zwar unendlich klein ist, aber nicht das Differential dA einer Funktion A zu sein braucht.)

Der Vergleich von (7) mit (3) ergibt, daß, wenn ein Potential existiert, die Abnahme des Potentials stets gleich der geleisteten Arbeit ist.

---

1) In der Mechanik wurde dieser Satz der lebendigen Kraft zuerst analytisch von Daniel Bernoulli eingeführt. Berlin, Mém. de l'Ac. 1748, p. 356 und 363, nachdem er von Galilei, Huygens und Johann Bernoulli bereits früher benutzt worden war (vgl. A. Voß, *Math. Enc. IV* 1, p. 101).

Die Dimension der Arbeit oder der kinetischen oder der potentiellen Energie ist

$$[T] = [A] = [V] = [mv^2] = [\mathrm{gr\ cm^2\ sec^{-2}}].$$

Einheit der Arbeit ist diejenige, welche gewonnen wird, wenn ein Körper, auf den die Kraft Eins (1 Dyne) wirkt, sich in Richtung dieser Kraft um 1 cm verschiebt. Dieselbe heißt 1 Erg (ἔργον = Werk, Arbeit).

8. Der Schwerpunktsatz. Für den Fall des freien Systems, wo also die Gleichungen Nr. 6 (4) resp. (4′) gelten, folgt durch Addition der Gleichungeu Nr. 6 (3′)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= 0\\ \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= 0\\ \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= 0.\end{aligned} \tag{1}$$

Dafür dürfen wir auch

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0 \quad \text{usw.} \tag{2}$$

schreiben, woraus wir durch zweifache Integration

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = a_1 + b_1 t \quad \text{usw.} \tag{3}$$

erhalten. Hier sind die a_1, b_1 usw. willkürliche Konstanten, die durch Anfangslage und -geschwindigkeit bestimmbar sind.

Die Koordinaten des *Schwerpunktes* oder *Massenmittelpunktes* ξ, η, ζ sind durch die folgenden Gleichungen definiert

$$\xi \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \quad \text{usw.}, \tag{4}$$

so daß die Gleichungen (2) auch

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0 \quad \text{usw.} \tag{5}$$

und also

$$\xi = \alpha_1 + \beta_1 t \quad \text{usw.} \tag{6}$$

geschrieben werden können. Sie sagen aus, daß *der Schwerpunkt eines freien Systems sich stets geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.*

Da (3) auch in der Form

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i = b_1 \tag{7}$$

geschrieben werden kann, und $\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i$ die x-Komponente eines Vektors $\sum_{i=1}^{n} m_i \mathfrak{v}_i$ ist, den man Bewegungsgröße des Systems nennt, so bedeutet (7):

Die Bewegungsgröße eines freien Systems bleibt konstant.

Der durch (4) definierte Massenmittelpunkt ist vom Koordinatensystem unabhängig, denn in Vektorschreibweise lautet (4)

$$\mathfrak{r} = \frac{\sum m_i \mathfrak{r}_i}{\sum m_i}, \tag{8}$$

wo $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor vom Anfangspunkt O des Koordinatensystems bis zum Schwerpunkt ist. Wählen wir nämlich einen anderen Koordinatenursprung O', der im ersten System durch den Vektor $\mathfrak{a}$ gegeben ist (Fig. 4), nennen den Vektor $O'm_i$ $\mathfrak{r}_i'$ und bilden analog (8) $\mathfrak{r}' = \frac{\sum m_i \mathfrak{r}_i'}{\sum m_i}$, so wird, da $\mathfrak{r}_i' = \mathfrak{r}_i - \mathfrak{a}$ ist,

$$\mathfrak{r}' = \frac{\sum m_i (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{a})}{\sum m_i} = \mathfrak{r} - \mathfrak{a}. \tag{9}$$

Fig. 4.

Durch den Vektor $\mathfrak{r} - \mathfrak{a}$ ist aber derselbe Punkt im neuen System gegeben, wie durch $\mathfrak{r}$ im alten System.

Bei der Bestimmung des Schwerpunktes eines gegebenen Massensystems darf man, wie aus (4) ohne weiteres folgt, die Massen eines beliebigen Teilsystems in ihrem Schwerpunkt vereinigt denken.

Ist das System nicht frei, so folgt durch Addition der Gleichungen Nr. 6 (3') mit Benutzung von (4) und mit Einführung der

Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

$$M \frac{d^2 \xi}{d t^2} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{f}_{ix} \quad \text{usw.}, \tag{10}$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre, und als ob die Resultante aller Einzelkräfte in ihm angriffe.

9. Der Stoß. Wünscht man nur die Geschwindigkeiten von sich stoßenden Körpern nach dem Stoße zu kennen, verzichtet man also auf die Bestimmung von Einzelheiten beim Stoße selbst, die sich nur durch Behandlung eines komplizierten Problems der Elastizitätstheorie ergeben, so genügt außer der Anwendung des Schwerpunktssatzes die Heranziehung des Energieprinzips oder eine diesem gleichwertige Aussage.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, den geraden Stoß zweier Kugeln, d. h. wir nehmen an, daß die Zentrale im Moment der Berührung zugleich die Richtung der beiden Geschwindigkeiten c_1 und c_2 vor dem Stoße hat. Dann werden die Geschwindigkeiten der Kugeln v_1 und v_2 nach dem Stoße auch in diese Richtung fallen.

Geben wir den c und den v in einer bestimmten Richtung das positive Vorzeichen, so ergibt der Schwerpunktssatz die Beziehung

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 c_1 + m_2 c_2 . \tag{1}$$

Bei vollkommen elastischen Körpern muß auch die kinetische Energie nach dem Stoße gleich der kinetischen Energie vor dem Stoße sein, d. h. es gilt

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2} . \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} , \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

und es ergibt sich, daß die Relativgeschwindigkeit $(v_1 - v_2)$ nach dem Stoße ihrem absoluten Wert nach gleich der Relativgeschwindigkeit $|c_1 - c_2|$ vor dem Stoße ist; in Formel

$$v_1 - v_2 = -(c_1 - c_2) . \tag{4}$$

Ruhte die Kugel II vor dem Stoße ($c_2 = 0$), so ist nachher

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} c_1; \quad v_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} c_1. \tag{5}$$

Haben die Kugeln gleiche Masse ($m_1 = m_2$), so wird

$$v_1 = c_2; \quad v_2 = c_1, \tag{6}$$

d. h. die Körper tauschen ihre Geschwindigkeiten einfach aus.

Ist der eine Körper eine Wand von sehr großer Masse ($c_2 = 0$; $m_2 = \infty$), so wird

$$v_1 = -c_1; \quad v_2 = 0. \tag{7}$$

Die erste Kugel ändert nur die Richtung der Geschwindigkeit, die Wand bleibt fest.

Beim Stoß vollkommen unelastischer Körper haften die Kugeln nach der Berührung dauernd aneinander, es gilt also außer dem Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße (1) noch die Gleichung

$$v = v_1 = v_2, \tag{8}$$

so daß aus (1) und (8)

$$v = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \tag{9}$$

folgt.

Hierbei ist ein Teil der kinetischen Energie verloren gegangen, denn es ist

$$T_0 - T = \frac{m_1}{2} c_1^2 + \frac{m_2}{2} c_2^2 - \frac{m_1 + m_2}{2} v^2$$

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (c_1 - c_2)^2. \tag{10}$$

Diese Energie hat sich in den dauernd deformierten Körpern resp. in der in Schwingungen versetzten Luft in Wärme verwandelt.

Die Zwischenzustände zwischen vollkommen elastischen und vollkommen unelastischen Stößen lassen sich nach Versuchen, die bereits Newton angestellt hat, durch einen Restitutionskoeffizienten k beschreiben[1]), der durch das Verhältnis der Relativgeschwindigkeiten nach und vor dem Stoße, definiert ist

$$v_2 - v_1 = k(c_1 - c_2). \tag{11}$$

---

1) W. Thomson u. P. G. Tait, *Handbuch d. theor. Phys.* **1**, 1. Teil, Braunschweig 1871 S. 236.

Dann wird

$$v_1 = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} - k \frac{m_2 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2}$$
$$v_2 = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} + k \frac{m_1 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} \tag{12}$$

und der Energieverlust beim Stoß

$$T_0 - T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (c_1 - c_2)^2 (1 - k^2). \tag{13}$$

Nach Messungen von Westphal[1]) ist für

	Kugelradius	k
Stahlkugeln. . . .	1,85 cm	0,9974
„	2,20 „	0,9934
Glaskugeln	2,65 „	0,9831
Elfenbeinkugeln . .	1,85 „	0,9664
„ . .	2,5 „	0,9660

Der *schiefe elastische Stoß* möge geometrisch behandelt werden.[2]) Es stelle $OC_1 = c_1$ (Fig. 5) die Geschwindigkeit der Kugel 1 nach Größe und Richtung dar und ebenso $OC_2 = c_2$ die Geschwindigkeit der Kugel 2.

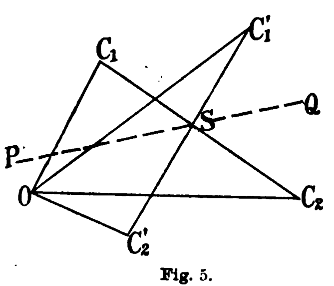


Fig. 5.

Dann ist $C_2 C_1 = c_1 - c_2$ die Relativgeschwindigkeit der Kugel 1 gegen die Kugel 2. Durch den Punkt S werde $C_2 C_1$ im Verhältnis $m_1 : m_2$ geteilt, so daß $C_2 S : S C_1 = m_1 : m_2$, also

$$C_2 S = C_2 C_1 \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$
$$= (c_1 - c_2) \frac{m_1}{m_1 + m_2} \tag{14}$$

ist. Dann ist

$$OS = OC_2 + C_2 S = c_2 + (c_1 - c_2) \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2} \tag{15}$$

die Geschwindigkeit des Schwerpunktes von m_1 und m_2, also sind SC_1 und SC_2 die relativen Geschwindigkeiten von m_1 und m_2 gegen den Schwerpunkt.

---

1) W. Westphal, *Verh. d. deutsch. phys. Ges.* **11**, 1909, S. 273.
2) Vgl. L. Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie* **1**, Leipzig 1896, S. 19.

Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes wird nun nach dem Schwerpunktsatz (Nr. 8) durch den Stoß nicht modifiziert.

Ziehen wir durch S die Gerade PQ parallel der Zentralen im Moment des Stoßes, so werden die Komponenten von SC_1 und SC_2 senkrecht zur Zentralen PQ durch den Stoß nicht verändert. Die in die Richtung von PQ fallenden Komponenten mögen vor dem Stoße p_1 und p_2, nach dem Stoße p_1' und p_2' sein. Dann ist nach dem Schwerpunktssatz

$$m_1 p_1 + m_2 p_2 = m_1 p_1' + m_2 p_2' = 0 \tag{16}$$

und nach dem Energieprinzip

$$m_1 p_1^2 + m_2 p_2^2 = m_1 p_1'^2 + m_2 p_2'^2. \tag{17}$$

Aus diesen Gleichungen folgt entweder

$$p_1' = p_1; \quad p_2' = p_2 \tag{18}$$

oder

$$p_1' = -p_1; \quad p_2' = -p_2.$$

Nur das zweite Lösungssystem ist mit der Undurchdringlichkeit der Kugeln vereinbar, es wird also nach dem Stoß die Relativgeschwindigkeit von m_1 und m_2 gegen S durch SC_1' resp. SC_2' dargestellt sein, wenn $C_1'C_2'$ mit PQ nach der anderen Seite denselben Winkel einschließt wie C_1C_2.

Also sind OC_1' und OC_2' die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 von m_1 und m_2 nach dem Stoße.

10. Der Flächensatz. Außer der Bedingung Nr. 6 (4) $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{f}_i = 0$ gilt für ein freies System noch die weitere Bedingung

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathfrak{r}_i, \mathfrak{f}_i] = 0 \text{ [1]} \tag{1}$$

oder in rechtwinkligen Komponenten

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i \mathfrak{f}_{iz} - z_i \mathfrak{f}_{iy}) = 0 \quad \text{usw.} \tag{2}$$

1) Unter $\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ ist, wie üblich, das Vektorprodukt der beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verstanden, d. h. ein Vektor, dessen Betrag $|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist, und dessen Richtung senkrecht auf der durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmten Ebene steht, und zwar so, daß eine Drehung des Vektors $\mathfrak{A}$ auf kürzestem Wege in die Richtung des Vektors $\mathfrak{B}$ und eine gleichzeitige Vorwärtsbewegung in Richtung des Vektors $\mathfrak{C}$ eine Rechtsschraubung darstellt.

Man nennt die auf der linken Seite stehende Summe das *Drehmoment* der Kräfte bezüglich des Koordinatenursprungs. Es ist bei einem freien System vom Anfangspunkte der $\mathfrak{r}_i$ unabhängig, denn setzen wir

$$\mathfrak{r}_i' = \mathfrak{r}_i + \mathfrak{a},$$

so ist

$$\sum[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{k}_i] = \sum[\mathfrak{r}_i', \mathfrak{k}_i] - \sum[\mathfrak{a}, \mathfrak{k}_i] = \sum[\mathfrak{r}_i', \mathfrak{k}_i], \tag{3}$$

denn $\sum[\mathfrak{a}, \mathfrak{k}_i] = [\mathfrak{a}, \sum\mathfrak{k}_i] = 0$, da in einem freien System $\sum\mathfrak{k}_i = 0$ ist.

Im nichtfreien System gilt (3) nur, wenn $\mathfrak{a} \parallel \sum\mathfrak{k}_i$ ist, d. h. wenn die Verbindungslinie der Koordinatenursprünge parallel der Gesamtkraft ist.

Aus der Gleichung Nr. 6 (3) folgt durch vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{r}_i$ und Summation über alle Massenpunkte

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\mathfrak{r}_i, \frac{d\mathfrak{v}_i}{dt}\right] = \sum_{i=1}^{n}[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{k}_i], \tag{4}$$

also in einem freien System wegen (1)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\mathfrak{r}_i, \frac{d\mathfrak{v}_i}{dt}\right] = 0. \tag{5}$$

Hieraus ergibt sich durch partielle Integration, wenn man beachtet, daß $\frac{d\mathfrak{r}_i}{dt} = \mathfrak{v}_i$ und $[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_i] = 0$, also

$$\left[\mathfrak{r}_i, \frac{d\mathfrak{v}_i}{dt}\right] = \frac{d}{dt}[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{v}_i] \tag{6}$$

ist,

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{v}_i] = 0, \tag{7}$$

eine Gleichung, aus der durch Integration

$$\sum_{i=1}^{n} m_i[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{v}_i] = \sum_{i=1}^{n} m_i\left[\mathfrak{r}_i, \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt}\right] = \text{Konst.} \tag{8}$$

folgt.

In Komponentenschreibweise lautet (8)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i) = K_1 \quad \text{usw.} \tag{8'}$$

Da der absolute Wert von $[\mathfrak{r}_i, d\mathfrak{r}_i]$ gleich dem Inhalt des Parallelogramms mit den Seiten $\mathfrak{r}_i$ und $d\mathfrak{r}_i$ ist, so steht links die doppelte geometrische Summe der von jedem Radiusvektor in der Zeiteinheit überstrichenen Fläche nach Größe und Stellung, mit der Masse multipliziert.

Für jedes freie System existiert also ein durch (8) gegebener im Raume fester Vektor, der Drehimpuls oder das Moment der Bewegungsgröße. Die zu ihm senkrechte Ebene heißt die invariante Ebene.

Gleichung (8) ist der sogenannte Flächensatz.

(4) in Verbindung mit (6) sagt aus, daß in einem beliebigen System der in der Zeiteinheit erfolgte Zuwachs des Drehimpulses nach Größe und Richtung gleich dem Drehmoment ist.

Aus der Gleichung Nr. 8 (7) folgte, daß ein freies System, dessen Schwerpunkt ruht, durch seine inneren Kräfte denselben nicht in Bewegung setzen kann (Rückstoß der Geschütze).

Ein wesentlicher Unterschied besteht aber zwischen Nr. 8 (7) und Nr. 10 (8'), der darin begründet ist, daß die linke Seite von Nr. 8 (7) der vollständige Differentialquotient einer Funktion der Koordinaten ist, nämlich von $\sum m_i \mathfrak{r}_i$, dagegen die von (8') nur die durch dt dividierte unendlich kleine Größe $\sum m_i [\mathfrak{r}_i, d\mathfrak{r}_i]$. Daher ist es möglich, daß der Ausdruck $\int \sum m_i [\mathfrak{r}_i, d\mathfrak{r}_i]$ nicht die Summe Null hat, auch wenn alle Punkte wieder in ihre Anfangslage zurückgekehrt sind.

So kommt es, daß ein freischwebendes, allen äußeren Kräften entzogenes Wesen seinen Schwerpunkt zwar durch Bewegungen der einzelnen Teile gegeneinander nicht verlegen, sich aber wohl um eine beliebige Achse drehen kann, indem ein Teil des Wesens (z. B. der eine Arm eines Menschen) fortwährend im selben Sinne in einer Ebene senkrecht zu der fraglichen Achse eine Fläche beschreibt (Schwimmbewegung mit einem Arm). Dann muß nämlich der übrige Teil des Körpers sich im anderen Sinne um dieselbe Achse drehen. So kann die Katze bewirken, daß sie beim Fallen immer auf die Füße zu stehen kommt.

Demonstrieren kann man den Flächensatz folgendermaßen: Man stelle sich auf einen um die Vertikale drehbaren Schemel, nehme ein Gewicht in die Hand, mache mit dem einen Arm die beim Schwimmen übliche Bewegung in einer horizontalen Ebene; dann wird sich der Schemel im entgegengesetzten Sinne drehen. Noch prägnanter ist folgendes Experiment: Man setze ein Rad, z. B. das eine Rad eines Fahrrades, dessen Pneumatik man durch einen

Bleireifen ersetzt hat, auf eine Achse, um die es sich drehen kann, wenn man es etwa durch eine Kreiselschnur in Rotation versetzt. Nimmt man die Achse, auf dem Drehschemel stehend, in die beiden Hände, so daß dieselbe horizontal ist, so wird der Schemel sich in Rotation versetzen, sobald man die Achse in die vertikale Lage bringt. Dreht man die Achse herum, so daß das obere Ende nach unten gerichtet wird, so ändert sich der Drehungssinn des Schemels. Läßt man durch irgend einen anderen den Schemel für einen Moment festhalten, während die Achse mit dem rotierenden Rade vertikal steht, so wird, wenn man das Rad bremst, indem man es gegen die Brust drückt, der Schemel wieder in Rotation kommen.

Die linke Seite von (8) ist vom Koordinatensystem nur unabhängig, wenn entweder der Schwerpunkt ruht, oder wenn die Verbindungslinie der Koordinatenanfangspunkte parallel der Bewegung des Schwerpunkts liegt, denn wenn

$$\mathfrak{r}_i' = \mathfrak{r}_i + \mathfrak{a}$$

ist, so ist

$$\sum_i m_i\left[\mathfrak{r}_i', \frac{d\mathfrak{r}_i'}{dt}\right] = \sum_i m_i\left[\mathfrak{r}_i, \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt}\right] + \left[\mathfrak{a}, \frac{d}{dt}\sum m_i \mathfrak{r}_i\right]. \quad (55)$$

Kapitel II.

Die Prinzipe der Mechanik.

Statik.

11. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Ein System von n freibeweglichen Massenpunkten ist im Gleichgewicht, wenn auf keinen Massenpunkt eine Kraft wirkt, d. h. wenn

$$\mathfrak{f}_{ix} = 0; \quad \mathfrak{f}_{iy} = 0; \quad \mathfrak{f}_{iz} = 0. \quad {\scriptstyle i=1,2\ldots,n} \quad (1)$$

Diese $3n$ Gleichungen können in die einzige

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{f}_{ix}\,\delta x_i + \mathfrak{f}_{iy}\,\delta y_i + \mathfrak{f}_{iz}\,\delta z_i) = 0 \quad (2)$$

zusammengefaßt werden, wenn wir unter $\delta\mathfrak{s}_i(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ eine beliebige gedachte (sogenannte virtuelle) unendlich kleine Verschiebung verstehen. Denn wegen der vollkommenen Willkürlichkeit der Verschiebungskomponenten ist (2) mit (1) identisch.

Daß die Gleichung (2) vom Koordinatensystem unabhängig ist, erkennt man an der Gleichung in Vektorschreibweise

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{f}_i, \delta \mathfrak{s}_i) = 0. \tag{3}$$

Da dieser Ausdruck die Arbeit ist, welche die Kräfte bei den Verschiebungen $\delta \mathfrak{s}_i$ leisten, so lautet (2) resp. (3) in Worten:

Die Arbeit der Kräfte bei einer beliebigen virtuellen Verschiebung muß Null sein.

In Wirklichkeit hat nicht immer jeder Massenpunkt eine beliebige Bewegungsfreiheit, sondern die tatsächlichen Verschiebungen unterliegen gewissen Bedingungen. Z. B. können das Bedingungen zwischen den Koordinaten von der Form

$$\varphi_\mu(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad \mu = 1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

sein. Hier muß natürlich $m \leqq 3n$ sein, weil sonst im allgemeinen überhaupt kein Lösungssystem existiert.

Solche Bedingungen sind z. B. starre Verbindungen oder die Vorschrift, daß ein Massenpunkt bei der Bewegung auf einer festen Kurve oder Fläche bleibt usw.

Dann sind die möglichen Verschiebungen an die Gleichungen geknüpft

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0. \quad \mu = 1, 2, \ldots, m \tag{5}$$

Physikalisch gesprochen werden die durch (4) gegebenen Beschränkungen der Bewegung nicht in Strenge erfüllt sein, sondern die Gleichungen bedeuten, daß zwar in jeder Lage alle Verschiebungen δx_i, δy_i, δz_i möglich sind, daß aber, wenn eins der φ_μ bei einer Lage der Massenpunkte auch nur unendlich wenig von Null abweicht, dadurch sofort sogenannte Zwangskräfte (elastischen Ursprungs) hervorgerufen werden, die eine endliche Abweichung der Größe φ_μ von Null verhindern.

Durch Berücksichtigung dieser elastischen Deformationen zeigt z. B. Helmholtz[1]), daß auf den i^{ten} Massenpunkt eine Kraft mit der x-Komponente

$$\mathfrak{f}_{ix} + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i}$$

1) H. v. Helmholtz, *Vorlesungen über theor. Physik* **1.** Abteilg. 2. Leipzig 1898. S. 281 ff.

wirkt, die also im Falle des Gleichgewichts Null sein muß. Die m Koeffizienten λ sind dabei aus den $3n$ Gleichungen

$$\mathfrak{f}_{ix} + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} = 0 \tag{6}$$

nicht zu bestimmen. Wohl aber reichen diese Beziehungen zusammen mit den m Gleichungen (4) zur Bestimmung der $3n+m$ Größen $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ aus.

Wir können uns dieses Resultat dadurch deutlich machen, daß wir die Lage des Systems in einem bestimmten Moment durch einen Punkt in einem $3n$-dimensionalen Raume darstellen, dessen Koordinaten die $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ sind. In diesem Raume stellt jede der Gleichungen (4) eine Fläche dar, in der der Punkt, welcher die Lage des Systems repräsentiert, dauernd zu bleiben gezwungen ist.

Diese Fläche wird auf den Punkt eine Kraft ausüben, welche die Richtung der Flächennormale hat. Da aber die Richtungskosinus der Normalen gegen die Koordinatenachsen den Größen $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_n}$ proportional sind, so wird diese Zwangskraft die Komponenten $\lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_1}, \ldots, \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_n}$ haben.

In der Ausdrucksweise, die unserem wirklichen Raum und dem wirklichen System angepaßt ist, bedeutet das aber, daß durch jede Bedingung (4) eine x-Komponente der auf den i^{ten} Punkt wirkenden Zwangskraft von der Größe $\lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i}$ zur entsprechenden Komponente $\mathfrak{f}_{ix}$ der äußeren Kraft hinzukommt, so daß im Falle des Gleichgewichts sich die $3n$ Gleichungen (6) ergeben.

Anstatt der Gleichungen (6) kann man nun die einzige Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\mathfrak{f}_{ix} + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i}\right) \delta x_i + \cdots = 0 \tag{7}$$

schreiben, wo die $\delta x_i, \ldots$ ganz willkürliche Größen sind.

Diese Gleichung kann aber ersetzt werden durch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{f}_{ix} \delta x_i + \mathfrak{f}_{iy} \delta y_i + \mathfrak{f}_{iz} \delta z_i) = 0, \tag{8}$$

in der die $\delta x_i, \ldots$ nun nicht mehr willkürlich sind, sondern den Bedingungen (5) zu genügen haben; das bedeutet, daß die Gleichungen (4) erfüllt sein müssen.

Denn variiert man (4), multipliziert jede mit einem Lagrangeschen Multiplikator λ_μ und addiert das Produkt zu (8), so kommt man in der Tat auf eine Gleichung der Form (7), in der nun die $\delta x_i, \ldots$ ganz willkürlich sind.

Die in (8) vorkommenden $\delta x_i, \ldots$ sind also gedachte Verschiebungen, die mit den Nebenbedingungen (4) verträglich sind, sogenannte virtuelle Verschiebungen.

Gleichung (8) ist ein Ausdruck des *Prinzips der virtuellen Verschiebungen* (auch Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten genannt); dies schreibt vor, daß dann Gleichgewicht herrscht, wenn die Kräfte bei keiner virtuellen Verschiebung Arbeit leisten. Allgemeiner lautet (8)

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{f}_{ix}\,\delta x_i + \mathfrak{f}_{iy}\,\delta y_i + \mathfrak{f}_{iz}\,\delta z_i) \leqq 0, \tag{8'}$$

wo das $<$ nur für irreversible mit den Zwangsbedingungen verträgliche Verschiebungen gilt, d. h. für solche, bei denen eine Verschiebung in entgegengesetzter Richtung unmöglich ist.

Für praktische Anwendungen ist auch die Größe der auf den Punkt x_i, y_i, z_i wirkenden Zwangskraft, deren x-Komponente $\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i}$ ist, von Wichtigkeit, da man durch sie ein Urteil über die Beanspruchung der sogenannten festen Verbindungen (wie Stangen, Schienen, Lager usw.) bekommt.

12. Stabilität des Gleichgewichts. Für Lagen, in denen die umgekehrte Richtung jeder möglichen Verschiebung auch eine mögliche Verschiebung ergibt, folgt, wenn die Kräfte ein Potential (vgl. Nr. 7) haben, aus Nr. 11 (8)

$$\delta V = 0, \tag{1}$$

d. h. in der Gleichgewichtslage hat das Potential einen Grenzwert.

Es läßt sich zeigen, daß das Gleichgewicht in einer bestimmten Lage stabil ist[1]), wenn V in dieser Lage ein Minimum besitzt.

In einer bestimmten Lage habe V den Minimumswert V_0. Man bringe das System in eine etwas andere Lage, in der $V = V_1$ ist und die kinetische Energie den kleinen Wert T_1 habe. Dann ist $V_1 - V_0$ eine kleine positive Größe.

Im weiteren Verlaufe der Bewegung muß nach dem Energieprinzip dauernd

1) P. Lejeune Dirichlet, *Crelles J.* **32**, 1846, S. 85 = *Werke* **2**, Berlin 1897, S. 5.

$$T + V = T_1 + V_1 \tag{2}$$

sein. Da aber $V > V_0$ ist, so wird stets

$$T < T_1 + (V_1 - V_0)$$

sein, d. h. unter einer von der Anfangsstörung abhängigen Grenze bleiben.

Da ferner T wesentlich positiv ist, so folgt aus (2), daß

$$V < T_1 + V_1$$

oder

$$V - V_0 < T_1 + (V_1 - V_0)$$

sein wird.

Das System kann sich also nur wenig aus der Gleichgewichtslage entfernen und nur kleine Geschwindigkeiten annehmen.

Hat V für eine Gleichgewichtslage kein Minimum, so ist im allgemeinen — wenn dort keine Häufungsstelle von Gleichgewichtslagen vorhanden ist — das Gleichgewicht labil[1]), d. h. auch bei noch so kleiner Störung wird sich das System aus der Gleichgewichtslage entfernen.

Für die Praxis ist nicht nur die Frage von Interesse, ob das Gleichgewicht überhaupt stabil ist, sondern auch die Frage, wie stabil es ist.

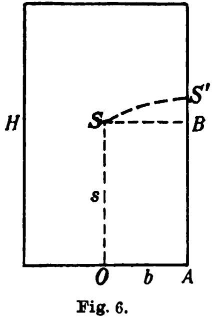


Fig. 6.

Von diesem Gesichtspunkte aus definiert man z. B. als *Standsicherheitsmoment* die Arbeit, die notwendig ist, um einen starren Körper aus der Gleichgewichtslage in diejenige Lage zu bringen, in der er gerade aufhört, von selbst in die Gleichgewichtslage zurückzukehren.

Bei einem parallelepipedischen Körper, dessen Schwerpunkt S den Abstand s von der Grundfläche hat (Fig. 6), kommt der Höhenunterschied zwischen S und S' in Frage, wo S' die Lage des Schwerpunktes ist, wenn der Körper soweit um die Kante A gekippt ist, daß der Schwerpunkt gerade über der Kante liegt. Bezeichnen wir den Abstand OA mit b, so ist

$$S'B = S'A - AB = SA - SO = \sqrt{s^2 + b^2} - s.$$

Ist s groß gegen b, so wird

$$S'B = \frac{b^2}{2s},$$

---

1) Vgl. die Literaturangaben zu dieser Frage bei P. Stäckel, *Math. Enc.* IV 1 S. 467.

also das Standsicherheitsmoment $Mg\frac{b^2}{2s}$, wenn M die Masse des Körpers, g die Erdbeschleunigung bedeutet.

Natürlich kann das Standsicherheitsmoment für die verschiedenen Kanten der Grundfläche verschieden groß sein.

Für eine Mauer der Höhe H, der Breite B und der Länge L ist $s=\frac{H}{2}$, $b=\frac{B}{2}$, $M=BLH\cdot\sigma$, wenn σ die Dichte des Materials ist, also ist das Standsicherheitsmoment $\frac{\sigma g}{4}B^2L$ von der Höhe unabhängig.

13. Statik des starren Körpers.[1] Ist der Körper, den wir betrachten, starr, so ist die Verschiebung aller Massenpunkte um dieselbe Strecke in derselben Richtung möglich, d. h. aus der Gleichung Nr. 11 (3) wird für

$$\delta\mathfrak{s}_1=\delta\mathfrak{s}_2=\cdots=\delta\mathfrak{s}_n=\delta\mathfrak{s} \tag{1}$$

$$\delta' A=\left(\delta\mathfrak{s},\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i\right)=0, \tag{2}$$

und da $\delta\mathfrak{s}$ jeden beliebigen Wert haben kann, so muß

$$\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i=0 \tag{3}$$

sein, oder in rechtwinkligen Komponenten

$$\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_{ix}=0;\quad \sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_{iy}=0;\quad \sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_{iz}=0. \tag{4}$$

Ferner ist eine Drehung um den Winkel $\delta\chi_x$ um die x-Achse eine virtuelle Verschiebung. Für eine solche Drehung ist aber, wie die Fig. 7 ergibt,

$$\delta x_i=0;\ \delta y_i=\varrho_i\delta\chi_x\cos(\delta\mathfrak{s}_i,y)$$
$$=-\varrho_i\delta\chi_x\cos(\varrho_i,z)$$

d. h.

$$\delta y_i=-z_i\delta\chi_x$$

und ebenso

$$\delta z_i=+y_i\delta\chi_x,$$

Fig. 7.

wenn ϱ_i die Entfernung des Punktes x_i, y_i, z_i von der x-Achse bedeutet.

1) S. z. B. Lagrange, *Mécanique analytique* 1, Teil 1, 4. Ausg. *Oeuvres* **11**, Paris 1888.

Substituiert man diese Werte für die virtuellen Verrückungen in Nr. 11 (8), so ergibt sich

$$\delta' A = \delta \chi_x \sum_{i=1}^{n} (y_i \mathfrak{k}_{iz} - z_i \mathfrak{k}_{iy}) = 0 .$$

Da aber auch Drehungen um die y- und z-Achse möglich sind, so gilt allgemeiner

$$\delta' A = \mathfrak{N}_x \delta \chi_x + \mathfrak{N}_y \delta \chi_y + \mathfrak{N}_z \delta \chi_z = 0 , \tag{5}$$

wo $\mathfrak{N}_x$ die x-Komponente des Drehmoments der Kräfte bezüglich des Koordinatenursprungs bedeutet, d. h. es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_x &= \sum_{i=1}^{n} (y_i \mathfrak{k}_{iz} - z_i \mathfrak{k}_{iy}) \\ \mathfrak{N}_y &= \sum_{i=1}^{n} (z_i \mathfrak{k}_{ix} - x_i \mathfrak{k}_{iz}) \\ \mathfrak{N}_z &= \sum_{i=1}^{n} (x_i \mathfrak{k}_{iy} - y_i \mathfrak{k}_{ix}), \end{aligned} \tag{6}$$

oder in Vektorschreibweise

$$\mathfrak{N} = \sum_{i=1}^{n} [\mathfrak{r}_i, \mathfrak{k}_i] . \tag{6'}$$

Da die $\delta \chi_x$, $\delta \chi_y$, $\delta \chi_z$ ganz willkürlich sind, muß $\mathfrak{N}_x = \mathfrak{N}_y = \mathfrak{N}_z = 0$ sein.

In Worten: *Damit ein starrer Körper im Gleichgewicht ist, muß sowohl die Gesamtkraft (4) als auch das Gesamtdrehmoment (6) Null sein.*

14. Einfache Maschinen. a) *Der Hebel.*[1]) Ein Hebel ist ein um eine feste Achse drehbarer Körper, an dem in beliebigen Punkten Kräfte angreifen können. Der Hebel ist im Gleichgewicht, wenn das Drehmoment um seine Drehachse Null ist. $[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{k}_i]$ bedeutet das Produkt aus dem absoluten Wert der Kraft uud dem Lot von der Drehachse auf die Kraftrichtung, dem sogenannten Hebelarm. Es muß also (vgl. Fig. 8)

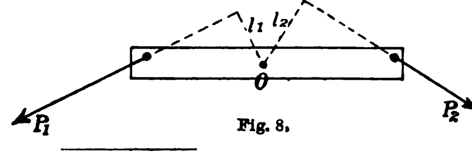


Fig. 8.

$$P_1 l_1 - P_2 l_2 = 0 \tag{1}$$

1) S. z. B. Ch. Huygens, *Demonstratio aequilibrii bilancis*, *Opera varia* **1**, p. 282, Nürnberg 1724. — L. Poinsot, *Éléments de statique*, 8. Ausg., Paris 1842, p. 240. — H. Weber u. J. Wellstein, *Encycl. der Elementar-Math.*, **3**, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1910, S. 47.

sein. Das Produkt aus Kraft und Hebelarm heißt seit Lionardo da Vinci das statische Moment. Es müssen also die statischen Momente der am Hebel angreifenden Kräfte Null sein. Für Kräfte, die auf dem Hebel senkrecht stehen, war dieser Satz schon Archimedes bekannt.

Die Resultante von P_1 und P_2, in den Drehpunkt O verschoben, ergibt den Druck des Hebels auf sein Achsenlager.

Fig. 9.

Fig. 8 stellt einen zweiarmigen, Fig. 9 einen einarmigen Hebel dar. Bei ersterem greifen die Kräfte auf verschiedenen, bei letzterem auf derselben Seite der Drehachse O an.

Bei der Aufstellung der Gleichung (1) ist der Hebel selbst als gewichtlos angenommen, resp. vorausgesetzt, daß der Unterstützungspunkt der Schwerpunkt ist. Im anderen Falle muß bei der Aufstellung der Momentengleichung (1) das statische Moment des Hebelgewichts bezüglich der Drehachse mit berücksichtigt werden, und bei der Bestimmung des Drucks auf das Achsenlager muß das Gewicht des Hebels geometrisch zu der Resultanten aus P_1 und P_2 addiert werden.

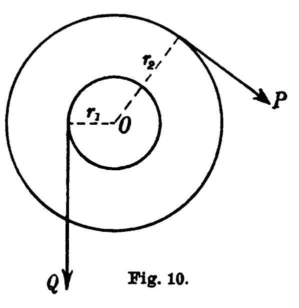


Fig. 10.

b) Eine Abart des Hebels ist das *Rad an der Welle*, bei dem die mit der Welle durch ein Seil verbundene Last Q durch die an einem fest auf die Achse aufgesetzten Rad wirkende kleinere Kraft P im Gleichgewicht gehalten wird, wenn (vgl. Fig. 10)

$$P \cdot r_2 = Q \cdot r_1$$

ist.

c) *Feste und lose Rolle.*

Bei der festen Rolle (Fig. 11) muß nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen $P = Q$ sein; denn durch die Seilverknüpfung ist dafür gesorgt, daß die Verschiebung δz der Kraft P in Richtung des wirkenden Gewichts gleich und entgegengesetzt der Verschiebung von Q ist, also ist die virtuelle Arbeit $\delta' A = P\delta z - Q\delta z$, und diese ist gleich Null, wenn $P = Q$ ist.

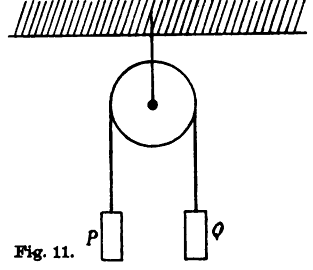


Fig. 11.

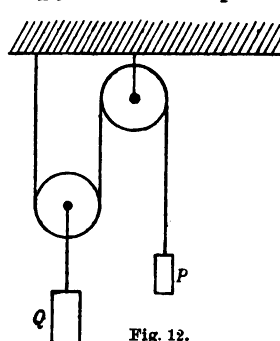


Fig. 12.

Bei der losen Rolle (Fig. 12) dagegen ist, wenn δz die Verschiebung von P nach unten ist, $\delta z/2$ die Verschiebung von Q nach oben, also muß im Falle des Gleichgewichts

$$P = \tfrac{1}{2} Q$$

sein.

In ähnlicher Weise ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung beim *Potenzflaschenzug* (Fig. 13 und Fig. 14)

$$P = \frac{Q}{2^n},$$

wenn n lose Rollen verwendet sind. (In den Fig. 13 u. 14 ist $n = 3$.)

d) Bei der *schiefen Ebene* ist die Arbeit der Kraft bei einer Senkung des Gewichts um δz (Fig. 15) gleich $P \delta z$; die hierbei erfolgende Arbeit der Last ist

$$- Q \sin \alpha \, \delta z,$$

also muß für den Fall des Gleichgewichts

$$P = Q \sin \alpha$$

sein. Die Kraft, welche die Last Q auf die Unterlage ausübt, beträgt

$$R = Q \cos \alpha.$$

Als Modifikationen der schiefen Ebene sind noch *Schraube* und *Keil* zu nennen.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

Für den Keil gilt (Fig. 16)

$$P = 2Q \sin\frac{\alpha}{2} = Q\frac{b}{l},$$

wenn b die Breite des Rückens, l die Länge der Kanten bedeutet.

Dynamik.

15. Das d'Alembertsche Prinzip; die Lagrangeschen Gleichungen. Um ein allgemeines Prinzip zu finden, das die Bewegungen von Massenpunkten unter dem Einfluß von Kräften und starren Verbindungen beherrscht, stellte d'Alembert folgende Überlegungen an, durch die das dynamische Problem auf eine Gleichgewichtsaufgabe zurückgeführt wird:

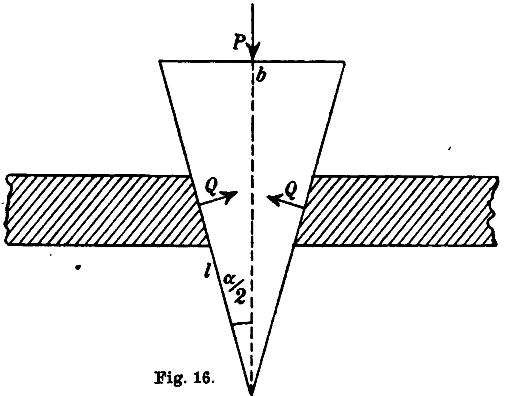


Fig. 16.

Die wirklichen Beschleunigungen $\dot{\mathfrak{v}}_i$ würden, wenn keine Zwangsbedingungen vorhanden wären, Kräfte $\mathfrak{f}_i' = m_i\dot{\mathfrak{v}}_i$ verlangen. Diese werden aufgehoben durch Kräfte $-\mathfrak{f}_i'$, so daß also die wirklichen Kräfte $\mathfrak{f}_i$ zusammen mit den Kräften $-\mathfrak{f}_i'$ unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen im Gleichgewicht sein müssen, oder unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen (Gleichung Nr. 11 (3))

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\mathfrak{f}_i - m_i\frac{d\mathfrak{v}_i}{dt}\right), \delta\mathfrak{s}_i\right) \leqq 0; \tag{1}$$

in Koordinaten:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\mathfrak{f}_{ix} - m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \cdots \leqq 0. \tag{2}$$

(1) resp. (2) heißt das *d'Alembertsche Prinzip*. Da diese Formel eine Gleichgewichtsbedingung in jedem Moment repräsentiert, so muß bei der Bildung der virtuellen Verschiebungen die Zeit t als konstant angesehen werden, darf also nicht mit variiert werden, d. h. wenn die Bedingungsgleichungen

$$\varphi_u(x_1, y_1, \ldots, z_n, t) = 0 \tag{3}$$

die Zeit explizite enthalten, z. B. wenn ein Massenpunkt gezwungen ist, auf einer bewegten Fläche zu bleiben, so müssen die virtuellen Verschiebungen doch der Gleichung Nr. 11 (5) genügen, während die in der Zeit dt wirklich eintretenden Verrückungen durch die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_i} dz_i\right) + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t} dt = 0 \qquad (4)$$

verknüpft sind.[1])

Dasselbe Verfahren, welches im Falle des Gleichgewichts aus Nr. 11 (4) und (8) die Gleichungen Nr. 11 (6) ergab, läßt aus dem d'Alembertschen Prinzip (2) die *Lagrangeschen Gleichungen* folgen

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \mathfrak{f}_{ix} + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} \text{ usw.} \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (5)$$

16. Die Variationsprinzipien. Um das d'Alembertsche Prinzip umzuformen, denken wir uns die wirkliche durch x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gegebene Lage als Punkt in einem Raume von $3n$ Dimensionen dargestellt und entsprechend den Inbegriff der zeitlichen Aufeinanderfolge der einzelnen Lagen als Bahn dieses Punktes. Der Anfangspunkt p_0 der wirklichen Bahn werde zur Zeit t_0 vom System eingenommen, ein beliebiger Punkt $p(x_i, y_i, z_i)$ zur Zeit t, der Endpunkt p_1 zur Zeit t_1. Dieser wirklichen Bahn ordnen wir eine variierte Bahn zu, welche zu denselben Zeiten t_0 und t_1 durch denselben Anfangs- und Endpunkt p_0 und p_1 geht, so daß dem Punkte p mit den Koordinaten x_i, y_i, z_i zur Zeit t der Punkt $x_i + \delta x_i$, $y_i + \delta y_i$, $z_i + \delta z_i$ zur Zeit $t + \delta t$ auf der variierten Bahn entspricht.

Dann ist[2])

$$\delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{dt\, d\delta x_i - dx_i\, d\delta t}{dt^2}, \qquad (1)$$

also

$$\delta T = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i \frac{dx_i}{dt} \frac{d\delta x_i}{dt} + \cdots\right) - 2T \frac{d\delta t}{dt}. \qquad (2)$$

Aus Nr. 15 (2) folgt für reversible Verrückungen durch partielle Integration

1) Vgl. hierzu die Kritik bei A. Voß, *Math. Enc.* 4, 1, Nr. 29 u. 36.
2) Da $d\delta t = \delta dt$; $d\delta x = \delta dx$.

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\frac{dx_i}{dt}\delta x_i + \cdots\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(m_i\frac{dx_i}{dt}\frac{d\delta x_i}{dt} + \cdots\right)$$
$$- \sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{f}_{ix}\delta x_i + \cdots) = \delta' A. \qquad (3)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dt, integrieren von t_0 bis t_1 und berücksichtigen, daß die $\delta x_i, \ldots$ an beiden Grenzen verschwinden, so folgt

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta' A \cdot dt + \int_{t_0}^{t_1} dt\left(\delta T + 2T\frac{d\delta t}{dt}\right) = 0. \qquad (4)$$

Diese Gleichung kann nun in verschiedener Weise spezialisiert werden.

17. Das Hamiltonsche Prinzip. Nehmen wir z. B. $\delta t = 0$ an, d. h. ordnen wir dem Punkte $p(x_i y_i z_i)$ zur Zeit t den Punkt $p'(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$ auch zur Zeit t zu, so erhalten wir aus der Gleichung Nr. 16 (4)

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\{\delta' A + \delta T\} = 0, \qquad (1)$$

das sogenannte *Hamiltonsche Prinzip.*

Sind die Kräfte konservativ, so ist

$$\delta' A = -\delta V,$$

also haben wir

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T - V)\,dt = 0. \qquad (2)$$

In (1) und (2) ist die Zeit also nicht mit zu variieren. Umgekehrt läßt sich aus (1) das d'Alembertsche Prinzip wieder ableiten; beide Prinzipien sind also einander gleichwertig und auch gleichwertig mit den Lagrangeschen Differentialgleichungen.[1])

18. Das Maupertuissche Prinzip der kleinsten Wirkung. Spezialisieren wir Gleichung Nr. 16 (4) so, daß

$$\delta T = \delta' A,$$

---

1) Vgl. G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mechanik*, 4. Auflage, Leipzig 1897, S. 27.

d. h. daß die Differenz der kinetischen Energien in den zugeordneten Punkten p und p' gleich der von den Kräften bei der Verschiebung von p nach p' geleisteten Arbeit ist, wie es das Energieprinzip verlangen würde, ohne daß damit zunächst angenommen ist, daß bei der wirklichen Bewegung das Energieprinzip erfüllt ist, so folgt aus Nr. 16 (4)

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T \cdot dt + T d\delta t) = \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0\,, \tag{1}$$

das *Prinzip der kleinsten Wirkung oder kleinsten Aktion von Maupertuis,* das übrigens in seiner strengen analytischen Fassung von Euler[1]) stammt.

Sind die Bedingungsgleichungen von der Zeit unabhängig, so gehören die wahren Verschiebungen zu den virtuellen, und man kann anstatt der virtuellen Verschiebungen $\delta x_i, \ldots$ die in der Zeit dt wirklich eintretenden Verschiebungen $\frac{dx_i}{dt}dt, \ldots$ setzen. Substituiert man diese in das mit (1) gleichwertige d'Alembertsche Prinzip, so folgt als Ausdruck des Energieprinzips

$$T + V = h\,; \tag{2}$$

ferner ist

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{\sum m_i ds_i^2}{dt^2}. \tag{3}$$

Durch (2) und (3) lassen sich T und dt aus (1) eliminieren, und wir erhalten mit Jacobi

$$\delta \int \sqrt{h - V}\sqrt{\sum m_i ds_i^2} = 0\,. \tag{4}$$

Das Integral in dieser Gleichung erstreckt sich über die Bahn des Systems; die Zeit kommt in derselben garnicht mehr vor.

Bei der wirklichen Bewegung muß die *Wirkungsgröße,* deren Variation auf der linken Seite der Gleichungen (1) und (4) steht, ein Grenzwert sein. Wählt man Anfangs- und Endlage nahe genug beieinander, so ist dieser Grenzwert ein Minimum.[2])

19. Die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art. Es sollen jetzt die Bewegungsgleichungen in generalisierten Koordi-

---

1) L. Euler, *Methodus inveniendi, Additamentum II,* p. [309] 311. Lausanne 1744.

2) Vgl. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik.* Werke, Suppl. 1884, p. 45.

naten q aufgestellt werden. Zu dem Zweck werden wir besser vom Hamiltonschen Prinzip als vom d'Alembertschen ausgehen, weil im ersteren nur erste Differentialquotienten vorkommen, die sich leicht in allgemeinen Koordinaten schreiben lassen.

Die Lage die Systems sei bestimmt durch die x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Setzen wir

$$x_i = x_i(q_1 \ldots q_\varrho \ldots q_r),$$

so wird

$$\dot{x}_i = \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{\partial x_i}{\partial q_\varrho} \dot{q}_\varrho . \tag{1}$$

Die Anzahl r braucht nicht gleich $3n$ zu sein, denn man kann die q so wählen, daß einige oder alle der m Bedingungsgleichungen von selbst erfüllt sind. Sind alle Bedingungsgleichungen von selbst erfüllt, so ist $r = 3n - m$, sämtliche q_ϱ sind dann *freie* Koordinaten. Kleiner als $3n - m$ kann die Anzahl der q_ϱ nicht sein.

Man nennt $3n - m$ den Freiheitsgrad; bei einem System von n Massenpunkten ist derselbe endlich. Die Bezeichnung „Mechanik diskreter Massenpunkte", über die der erste Abschnitt dieses Werkes handelt, hat sich als Gegensatz zur „Mechanik kontinuierlicher Medien" in der Wissenschaft auch da eingebürgert, wo es sich tatsächlich um kontinuierliche Medien handelt, für die Mechanik von Systemen mit endlichem Grad von Bewegungsfreiheit zum Unterschied von der Mechanik von Systemen mit unendlichem Grad von Bewegungsfreiheit.

Da $\frac{\partial x_i}{\partial q_\varrho}$ von den q_ϱ abhängt, so wird

$$2T = \sum_{\varrho=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\varrho\sigma} \dot{q}_\varrho \dot{q}_\sigma \tag{2}$$

eine homogene Funktion zweiten Grades in den $\dot{q}_\varrho$ sein, deren Koeffizienten beliebige Funktionen der q_ϱ sein können.

Schreiben wir

$$\delta' A = \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{f}_{ix}\, \delta x_i + \cdots) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{f}_{ix} \sum_{\varrho=1}^{r} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\varrho} \delta q_\varrho + \cdots\right) + \cdots$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{r} Q_\varrho \cdot \delta q_\varrho , \tag{3}$$

indem wir

$$Q_\varrho = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathfrak{f}_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_\varrho} + \cdots \right)$$

setzen, so heißt Q_ϱ eine generalisierte Kraftkomponente, während man $\dot{q}_\varrho$ eine generalisierte Geschwindigkeit nennt.

Nach Nr. 17 (1) ist dann

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{\varrho=1}^{r} \left(Q_\varrho \delta q_\varrho + \frac{\partial T}{\partial q_\varrho} \delta q_\varrho + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} \delta \dot{q}_\varrho \right) \right\} = 0. \tag{4}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} \delta \dot{q}_\varrho = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} \frac{d}{dt} \delta q_\varrho = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} \delta q_\varrho \right) - \delta q_\varrho \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} \right). \tag{5}$$

Substituiert man das in (4), so erhält man

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_{\varrho=1}^{r} \left(Q_\varrho + \frac{\partial T}{\partial q_\varrho} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} \right) \delta q_\varrho \right\} = 0, \tag{6}$$

denn der vollständige Differentialquotient nach der Zeit fällt fort, da die δq_ϱ an den Grenzen verschwinden.

Sind die q_ϱ freie Koordinaten, d. h. ist jedes q_ϱ willkürlich und unabhängig von den anderen veränderlich, so kann (6) nur bestehen, wenn für jedes ϱ

$$Q_\varrho + \frac{\partial T}{\partial q_\varrho} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} \right) = 0. \tag{7}$$

Dies sind die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen in der zweiten Form.

Sind dagegen die q_ϱ keine freien Koordinaten, sondern bestehen noch die Bedingungsgleichungen

$$\varphi_k(q_1, \ldots, q_\varrho, \ldots, q_r) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

so sind

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_\varrho} \delta q_\varrho = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

die Bedingungen einer virtuellen Verschiebung.

Multipliziert man diese Gleichungen mit $\lambda_k dt$, summiert über k, integriert von t_0 bis t_1 und addiert das Ergebnis zu (6), so

erhält man die Lagrangeschen Gleichungen in der zweiten Form

$$Q_\varrho + \frac{\partial T}{\partial q_\varrho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_\varrho} = 0. \tag{7'}$$

Wie wir aus (5) erkennen, gilt (7) nur unter der Bedingung $\delta d q = d \delta q$, während das beim Hamiltonschen Prinzip nicht der Fall ist; letzteres ist auch bei nicht-holonomen Bedingungsgleichungen (vgl. Nr. **36**) anwendbar.

Sind die Kräfte konservativ, so ist

$$Q_\varrho = -\frac{\partial V}{\partial q_\varrho}, \tag{8}$$

so daß (7) die Form annimmt

$$\frac{\partial (T - V)}{\partial q_\varrho} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho}. \tag{9}$$

Da nun V von den q_ϱ, aber nicht von den $\dot{q}_\varrho$ abhängt, können wir, wenn wir

$$T - V = L \tag{10}$$

setzen, anstatt (9)

$$\frac{\partial L}{\partial q_\varrho} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\varrho} \tag{11}$$

schreiben. L wird das *kinetische Potential* oder die Lagrangesche Funktion genannt.

Multipliziert man (11) mit $\dot{q}_\varrho$ und integriert rechts partiell, so erhält man

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_\varrho \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\varrho}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\varrho}\frac{d q_\varrho}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\varrho}\frac{d \dot{q}_\varrho}{dt} = 0. \tag{12}$$

Summiert man über alle ϱ und berücksichtigt, daß

$$\sum_{\varrho=1}^{r}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\varrho}\frac{d q_\varrho}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\varrho}\frac{d \dot{q}_\varrho}{dt}\right) = \frac{d L}{dt} \tag{13}$$

ist, so folgt

$$W = \sum \dot{q}_\varrho \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\varrho} - L = \text{Const.} \tag{14}$$

Hier bedeutet

$$W = T + V \tag{15}$$

die Gesamtenergie des Systems, wie man leicht erkennt, wenn man (10) beachtet und bedenkt, daß T eine homogene Funktion

zweiten Grades der $\dot{q}_\varrho$ ist, und daß man also nach dem Eulerschen Satze über homogene Funktionen[1])

$$\sum \dot{q}_\varrho \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} = 2T$$

setzen kann.

(14) ist also ein Ausdruck des Energieprinzips.

Auch für nicht-mechanische Systeme läßt sich ein kinetisches Potential L definieren, aus dem sich die Energie nach (14) berechnet.[2])

20. Die Hamiltonsche oder kanonische Form der Bewegungsgleichungen. Bis jetzt haben wir T als Funktion der q_ϱ und $\dot{q}_\varrho$ angesehen. Als neue Variable führen wir nun neben den q_ϱ die sogenannten Momente p_ϱ ein, die durch die Gleichungen

$$p_\varrho = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} \tag{1}$$

definiert sind.

Da T eine homogene wesentlich positive Funktion zweiten Grades der $\dot{q}_\varrho$ ist, so ist (1) ein System linearer Gleichungen in den $\dot{q}_\varrho$ mit nicht verschwindender Determinante[3]); man kann also die $\dot{q}_\varrho$ durch die p_ϱ ausdrücken. Substituiert man diese Werte in T, so wird es Funktion der p_ϱ und q_ϱ. Wenn T als Funktion von q_ϱ und $\dot{q}_\varrho$ aufgefaßt wird, wollen wir für die Differentialquotienten nach q_ϱ $\left(\frac{\partial T}{\partial q_\varrho}\right)$ schreiben, während wir, wenn wir T als Funktion von q_ϱ und p_ϱ auffassen, $\frac{\partial T}{\partial q_\varrho}$ ohne Klammern schreiben wollen.

Nach dem Eulerschen Satze über homogene Funktionen ist

$$2T = \sum_\varrho \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} \dot{q}_\varrho = \sum_\varrho p_\varrho \dot{q}_\varrho. \tag{2}$$

Ferner ist

$$dT = \sum_\varrho \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial q_\varrho}\right) dq_\varrho + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} d\dot{q}_\varrho \right\} = \sum_\varrho \left\{ \frac{\partial T}{\partial q_\varrho} dq_\varrho + \frac{\partial T}{\partial p_\varrho} dp_\varrho \right\} \tag{3}$$

also

$$2dT = \sum \left\{ \left(\left(\frac{\partial T}{\partial q_\varrho}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_\varrho} \right) dq_\varrho + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} d\dot{q}_\varrho + \frac{\partial T}{\partial p_\varrho} dp_\varrho \right\}. \tag{4}$$

---

1) E. Pascal, *Repertorium d. höh. Math.* 1, p. 115, Leipzig 1900.

2) H. v. Helmholtz, *Journ. f. Math.* **100**, 1886, S. 137 u. 213 = *Wissensch. Abh.* 3, Leipzig 1895, S. 203.

3) E. Pascal, *Repertorium d. höh. Math.* 1, p. 325, Leipzig 1900.

Aus (2) folgt

$$2\,dT = \sum \dot{q}_\varrho dp_\varrho + \sum p_\varrho d\dot{q}_\varrho, \tag{5}$$

und der Vergleich von (4) und (5) ergibt

$$\frac{\partial T}{\partial q_\varrho} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_\varrho}\right); \quad \frac{\partial T}{\partial p_\varrho} = \dot{q}_\varrho; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} = p_\varrho, \tag{6}$$

von denen die letzte Gleichung mit (1) identisch ist.

Da aber V von den p_ϱ unabhängig ist, so folgt aus (6)

$$\frac{\partial (T+V)}{\partial q_\varrho} = -\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial q_\varrho}\right); \qquad \frac{\partial (T+V)}{\partial p_\varrho} = \dot{q}_\varrho. \tag{7}$$

Setzen wir

$$T + V = H \tag{8}$$

und nennen H die Hamiltonsche Prinzipalfunktion, und denken uns H durch p und q ausgedrückt, so erhalten wir mit Benutzung von Nr. 19 (9)

$$\frac{\partial H}{\partial q_\varrho} = -\frac{dp_\varrho}{dt}; \quad \frac{\partial H}{\partial p_\varrho} = +\frac{dq_\varrho}{dt}, \tag{9}$$

die sogenannte Hamiltonsche oder kanonische Form der Bewegungsgleichungen.

Aus (9) folgt

$$\sum_\varrho \left(\frac{\partial H}{\partial p_\varrho}\frac{dp_\varrho}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_\varrho}\frac{dq_\varrho}{dt}\right) = 0. \tag{10}$$

Ist H von t nicht explizite abhängig, so ist (10) mit $\frac{dH}{dt} = 0$ gleichbedeutend, also die Energie H konstant, wie das Energieprinzip es verlangt.

21. Das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges. Aus dem d'Alembertschen Prinzip

$$\sum (m_i \ddot{x}_i - \mathfrak{f}_{ix})\,\delta x_i + \cdots = 0 \tag{1}$$

läßt sich mit Verwendung eines von Brill[1]) stammenden Kunstgriffs das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges[2]) sehr leicht ableiten.

---

1) A. Brill, *Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen.* Leipzig und Berlin 1909, p. 48.

2) C. F. Gauß, *J. f. Math.* 4, 1829; *Werke* 5, p. 23.

Definiert man den Zwang Z des Systems durch die Gleichung

$$mZ^2 = \sum m_i\left[\left(\ddot{x}_i - \frac{\mathfrak{f}_{ix}}{m_i}\right)^2 + \cdots\right], \tag{2}$$

so ist der Zwang ein Minimum bei gegebener Lage und gegebenen Geschwindigkeiten (d. h. bei der Variation von Z werden die x_i, y_i, z_i, $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ nicht variiert[1]), wenn

$$\delta\left(\frac{mZ^2}{2}\right) = \sum m_i\left[\left(\ddot{x}_i - \frac{\mathfrak{f}_{ix}}{m_i}\right)\delta\ddot{x}_i + \cdots\right] = 0. \tag{3}$$

Ist die Bewegungsfreiheit z. B. durch die Bedingung

$$\varphi(x_i, y_i, z_i) = 0 \tag{4}$$

beschränkt, so kann man aus dieser Gleichung[2]) durch einmalige Differentiation die Beziehung

$$\sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\dot{z}_i = 0$$

ableiten und durch nochmalige Differentiation

$$\Phi = \sum_i \sum_k \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k}\dot{x}_i\dot{x}_k + \cdots + \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\ddot{x}_i + \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\ddot{y}_i + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\ddot{z}_i = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, daß die Variationen der Beschleunigungen bei gegebenen Koordinaten und Geschwindigkeiten der Bedingung

$$\delta\Phi = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\delta\ddot{x}_i + \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\delta\ddot{y}_i + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\delta\ddot{z}_i = 0 \tag{5}$$

genügen müssen.

Multipliziert man nun (5) mit einem Lagrangeschen Faktor λ, addiert diese Gleichung dann zu (3) und bezeichnet die nunmehr gänzlich willkürlichen Variationen $\delta\ddot{x}_i, \ldots$ der Beschleunigungen durch die ebenfalls ganz willkürlichen Größen $\delta x_i, \ldots$, so ersieht man ohne weiteres die Identität des Resultats mit (1) und der nach den Koordinaten variierten Gleichung (4).

Über die Vorzüge des Gaußschen Prinzips vor den Variationsprinzipien hat sich Brill im Vorwort seines soeben zitierten Buches geäußert. Sie liegen vor allem darin, daß man es beim Prinzip des kleinsten Zwanges mit einem einfachen Minimum zu tun hat

---

1) Vgl. R. Lipschitz, *J. f. Math.* **82**, 1877, p. 321.
2) A. Brill, *l. c.* p. 8.

ohne, wie bei den andern Prinzipien, auf die Methoden der Variationsrechnung zurückgreifen zu müssen.

22. Das Hertzsche Prinzip der geradesten Bahn. Hertz[1]) definiert als Masse m, Geschwindigkeit v, Beschleunigung a und Bahnkrümmung c eines Systems von Massenpunkten

$$m = \sum_i m_i \tag{1}$$

$$m v^2 = \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \tag{2}$$

$$m a^2 = \sum_i m_i (\ddot{x}_i^2 + \ddot{y}_i^2 + \ddot{z}_i^2) \tag{3}$$

$$m c^2 = \sum_i m_i \left[\left(\frac{d^2 x_i}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y_i}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z_i}{ds^2}\right)^2\right]. \tag{4}$$

Hierbei ist unter ds verstanden

$$ds = v\,dt. \tag{5}$$

In (1) bis (4) sind also die auf der linken Seite stehenden Größen als quadratische Mittelwerte der für jeden Massenpunkt gültigen Werte angesetzt.

Anstatt der unabhängigen Variablen s soll in (4) t eingeführt werden. Es ist

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{x}_i}{\dot{s}}\right) = \frac{1}{\dot{s}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}_i}{\dot{s}}\right) = \frac{\dot{s}\ddot{x}_i - \dot{x}_i \ddot{s}}{\dot{s}^3},$$

also

$$\sum_t m_i \left[\left(\frac{d^2 x_i}{ds^2}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{1}{\dot{s}^4}\left\{\sum_i m_i (\ddot{x}_i^2 + \cdots) - m\ddot{s}^2\right\}$$

oder mit Benutzung von (2), (3) und (4)

$$c^2 v^4 = a^2 - \ddot{s}^2. \tag{6}$$

Wirken auf ein Massensystem, das beliebigen Bedingungsgleichungen unterworfen ist, keine Kräfte, so bewegt sich nach Hertz das System in geradester Bahn mit konstanter Geschwindigkeit. Dies Prinzip zerlegt sich also in zwei Teile, von denen der erste das Geometrische der Lagenfolgen, der zweite eine Bestimmung über den zeitlichen Verlauf enthält.

Es muß also auf Grund dieses Prinzips $\dot{s}$ konstant, d, h. $\ddot{s} = 0$ sein, und es muß ferner bei gegebenen Koordinaten und Geschwin-

---

1) H. Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik.* Leipzig 1894.

digkeiten c ein Minimum oder

$$\delta\left(\frac{m}{2}c^2v^4\right) = 0 \tag{7}$$

sein. Das ist aber nach (6) mit Berücksichtigung von $\ddot{s} = 0$ und mit Beachtung von (3) gleichbedeutend mit

$$\sum_i m_i(\ddot{x}_i \delta \ddot{x}_i + \cdots) = 0, \tag{8}$$

eine Gleichung, die für kräftefreie Systeme aus Nr. **21** (3) folgt, ebenso wie sich aus Nr. **21** (1) $\ddot{s} = 0$ ergibt, wenn man die virtuellen Verschiebungen durch die in der Zeit dt wirklich eintretenden ersetzt.

Ist das System kräftefrei, also $V = 0$, so ergibt sich aus dem Maupertuisschen Prinzip in der Jacobischen Fassung Nr. **18** (4) unter Benutzung der Definitionen (2) und (4) dieser Nummer

$$\delta \int ds = 0. \tag{9}$$

Das System bewegt sich dann also auf einer geodätischen Bahn, die, wenn Anfangs- und Endpunkt der Bahn einander nahe genug liegen, eine kürzeste Bahn und nach den Ausführungen dieser Nummer zugleich eine geradeste Bahn ist.

Kapitel III.

Dynamik des starren Körpers.

Kinematik des starren Körpers.

23. Der Grad der Bewegungsfreiheit. Unter einem starren Körper verstehen wir ein System von n Massenpunkten, deren Bewegungsfreiheit durch die Bedingung beschränkt ist, daß je zwei beliebige Massenpunkte ihre gegenseitige Entfernung stets beibehalten.

Es existieren also $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen

$$r_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 = \text{konst.}; \tag{1}$$

diese sind aber nicht voneinander unabhängig.

Um den Grad der Bewegungsfreiheit zu ermitteln, betrachten wir einen ersten Punkt. Derselbe ist frei verschiebbar, entspricht also drei Graden der Bewegungsfreiheit. Nehmen wir einen zweiten

Punkt hinzu, so ist dieser nicht mehr frei verschiebbar, sondern er muß auf einer Kugelfläche mit dem Radius r_{12} liegen, deren Zentrum mit dem ersten Punkt zusammenfällt.

Die Variation von (1)

$$(x_i - x_k)(\delta x_i - \delta x_k) + \cdots = 0 \tag{2}$$

ergibt in der Tat, wenn $i = 1, k = 2$ ist und $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ beliebig gegeben sind, nur noch zwei willkürlich zu wählende Variationen, z. B. $\delta x_2, \delta y_2$, während δz_2 aus (2) folgt.

Schließlich nehmen wir noch einen dritten, mit den ersten beiden nicht in einer Geraden liegenden Punkt hinzu, der dauernd auf dem Schnittkreis der Kugeln um den ersten und zweiten Punkt mit den Radien r_{13} resp. r_{23} bleiben muß, also nur *einen* Grad von Bewegungsfreiheit hat. Jeder weitere Punkt bildet mit den ersten dreien ein Tetraeder, ist also in seiner Lage bei allen Verschiebungen bestimmt. *Der starre Körper hat also 6 Grade von Bewegungsfreiheit.*

Es ist im allgemeinen nicht günstig, die rechtwinkligen Koordinaten der n Massenpunkte zur Beschreibung der Bewegung zu wählen, da dieselben keine freien Koordinaten sind, sondern man wird besser 6 voneinander unabhängige Bestimmungsstücke der Lage wählen, z. B. den Ort eines bestimmten Punktes des Körpers und drei Winkelgrößen, durch die die Orientierung des Körpers relativ zu diesem Punkt festgelegt ist.

24. Die Eulerschen Winkel. Zu dem Zwecke führen wir zwei rechtwinklige Koordinatensysteme $\Sigma(\xi, \eta, \zeta)$ und $S(x, y, z)$ ein, von denen das erstere im Raume, das letztere im Körper fest ist.

Diese Systeme seien durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z\\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z\\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z\end{aligned} \tag{1}$$

miteinander verbunden.

Die Größen α, β, γ sind die Koordinaten des Ursprungs von S bezüglich Σ; die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind die Richtungskosinus von ξ gegen x, y, z usw.

Zwischen den 9 Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$ bestehen 6 voneinander unabhängige Beziehungen, die aus der Theorie der Koordinatentransformation bekannt sind, und sich in verschiedener Weise ausdrücken lassen. So muß sein

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1 \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3) \qquad \begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0 \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 &= 0 \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5) \qquad \begin{aligned} \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0 \\ \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

und ferner ist jedes Glied der Determinante (2) gleich seiner Unterdeterminante. Die Gleichungen (2) bis (6) sind aber nicht unabhängig voneinander, wie sich aus dem folgenden unmittelbar ergibt. Da nämlich die 9 Koeffizienten sich durch 3 Größen ausdrücken lassen, können, wie oben behauptet wurde, nur 6 voneinander unabhängige Relationen zwischen ihnen bestehen.

Durch drei voneinander unabhängige Bestimmungsstücke müssen also die Drehungen um den Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ sich angeben lassen, etwa durch die sogenannten Eulerschen Winkel ϑ, ψ, φ.

Da nach (4) $\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1$ ist, kann man

$$\alpha_3 = + \sin\vartheta \sin\psi, \quad \beta_3 = - \sin\vartheta \cos\psi, \quad \gamma_3 = \cos\vartheta$$

setzen. ϑ ist der Winkel zwischen der z- und ζ-Achse; ψ, die Länge der Knotenlinie (Länge = geogr. Länge), der Winkel, den die Schnittgerade der ξ, η-Ebene und der x, y-Ebene mit der ξ-Achse bildet.

Ferner ist $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, also darf man

$$\gamma_1 = \sin\varphi \sin\vartheta, \quad \gamma_2 = \cos\varphi \sin\vartheta, \quad \gamma_3 = \cos\vartheta$$

setzen. ϑ hat hier wieder dieselbe Bedeutung wie vorhin, φ ist das Azimut des Körpers, d. h. der Winkel, den die Knotenlinie in der x, y-Ebene mit der x-Richtung bildet.

Aus den 5 Größen $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \gamma_1, \gamma_2$ lassen sich die anderen berechnen, es ergibt sich so[1])

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta \\ \alpha_2 &= - \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\vartheta \\ \alpha_3 &= \sin\psi \sin\vartheta \end{aligned}$$

1) P. Stäckel, *Math. Enc.* **4**, 1 Art. 6 S. 553.

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta \\
\beta_2 &= -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta \\
\beta_3 &= -\cos\psi \sin\vartheta
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \sin\varphi \sin\vartheta \\
\gamma_2 &= \cos\varphi \sin\vartheta \\
\gamma_3 &= \cos\vartheta .
\end{aligned}$$



Fig. 17.

Als Veranschaulichung der Eulerschen Winkel gibt Helmholtz[1]) die Bestimmungsstücke der Cardanischen Aufhängung (vgl. Fig. 17).

25. Die Verrückungen des starren Körpers. Eine unendlich kleine Verrückung des starren Körpers ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\delta\xi &= \delta\alpha + x\,\delta\alpha_1 + y\,\delta\alpha_2 + z\,\delta\alpha_3 \\
\delta\eta &= \delta\beta + x\,\delta\beta_1 + y\,\delta\beta_2 + z\,\delta\beta_3 \\
\delta\zeta &= \delta\gamma + x\,\delta\gamma_1 + y\,\delta\gamma_2 + z\,\delta\gamma_3 .
\end{aligned} \tag{1}$$

$\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ sind hierbei ganz beliebig, während $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\gamma_3$ durch drei voneinander unabhängige Größen, etwa $\delta\vartheta$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$ nach Nr. **24** (7) ausdrückbar sind. Aus Symmetriegründen wählen wir aber im folgenden die unendlich kleinen Drehwinkel um die im Körper festen Achsen x, y, z.

Eine unendlich kleine Parallelverschiebung $\delta\mathfrak{s}$ des starren Körpers hat die Komponenten

$$\delta x = \delta\mathfrak{s}_x, \quad \delta y = \delta\mathfrak{s}_y, \quad \delta z = \delta\mathfrak{s}_z . \tag{2}$$

Für eine Drehung um die x-Achse um den unendlich kleinen Winkel $\delta\chi_x$ ergeben sich nach Nr. 13 die Komponenten der Verrückung

$$\delta x = 0, \quad \delta y = -z\,\delta\chi_x, \quad \delta z = y\,\delta\chi_x .$$

Bildet man in analoger Weise die Verrückungskomponenten bei unendlich kleinen Drehungen um die y- resp. z-Achse um die

1) H. v. Helmholtz, *Vorlesungen über theor. Physik* **1** II, Leipzig 1898 S. 321.

Winkel $\delta\chi_y$ resp. $\delta\chi_z$ und addiert die entsprechenden Komponenten, so erhält man die Verrückung bei einer beliebigen Drehung $\delta\chi$ mit den Komponenten $\delta\chi_x$, $\delta\chi_y$, $\delta\chi_z$, nämlich[1])

$$\begin{aligned} \delta x &= z\,\delta\chi_y - y\,\delta\chi_z \\ \delta y &= x\,\delta\chi_z - z\,\delta\chi_x \\ \delta z &= y\,\delta\chi_x - x\,\delta\chi_y\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Finden die Parallelverschiebung (2) und die Drehung (3) gleichzeitig statt, so erhält man die allgemeinste unendlich kleine Verrückung eines starren Körpers in der Form

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta\mathfrak{f}_x + z\,\delta\chi_y - y\,\delta\chi_z \\ \delta y &= \delta\mathfrak{f}_y + x\,\delta\chi_z - z\,\delta\chi_x \\ \delta z &= \delta\mathfrak{f}_z + y\,\delta\chi_x - x\,\delta\chi_y. \end{aligned} \tag{4}$$

In diesen Gleichungen prägt es sich deutlich aus, daß der starre Körper 6 Freiheitsgrade besitzt.

Geben wir bei festgehaltenem Koordinatensystem x, y, z dem Punkte $x = \alpha_1$, $y = \alpha_2$, $z = \alpha_3$ die der Drehung (3) entgegengesetzte Drehung $-\delta\chi_x$, $-\delta\chi_y$, $-\delta\chi_z$, so ist das dasselbe, als wenn wir den Punkt in Ruhe ließen, dem Koordinatensystem x, y, z aber die Drehung $\delta\chi_x$, $\delta\chi_y$, $\delta\chi_z$ erteilten. Dabei ändern sich die Koordinaten nach (3) um

$$\begin{aligned} \delta\alpha_1 &= \alpha_2\,\delta\chi_z - \alpha_3\,\delta\chi_y \\ \delta\alpha_2 &= \alpha_3\,\delta\chi_x - \alpha_1\,\delta\chi_z \\ \delta\alpha_3 &= \alpha_1\,\delta\chi_y - \alpha_2\,\delta\chi_x. \end{aligned} \tag{5a}$$

Ebenso wird

$$\begin{aligned} \delta\beta_1 &= \beta_2\,\delta\chi_z - \beta_3\,\delta\chi_y \\ \delta\beta_2 &= \beta_3\,\delta\chi_x - \beta_1\,\delta\chi_z \\ \delta\beta_3 &= \beta_1\,\delta\chi_y - \beta_2\,\delta\chi_x \end{aligned} \tag{5b}$$

$$\begin{aligned} \delta\gamma_1 &= \gamma_2\,\delta\chi_z - \gamma_3\,\delta\chi_y \\ \delta\gamma_2 &= \gamma_3\,\delta\chi_x - \gamma_1\,\delta\chi_z \\ \delta\gamma_3 &= \gamma_1\,\delta\chi_y - \gamma_2\,\delta\chi_x. \end{aligned} \tag{5c}$$

Mit Rücksicht auf die Beziehungen Nr. **24** (4) und (5) ergibt sich somit aus (5)

$$\begin{aligned} -(\alpha_2\,\delta\alpha_3 + \beta_2\,\delta\beta_3 + \gamma_2\,\delta\gamma_3) &= \alpha_3\,\delta\alpha_2 + \beta_3\,\delta\beta_2 + \gamma_3\,\delta\gamma_2 = \delta\chi_x \\ -(\alpha_3\,\delta\alpha_1 + \beta_3\,\delta\beta_1 + \gamma_3\,\delta\gamma_1) &= \alpha_1\,\delta\alpha_3 + \beta_1\,\delta\beta_3 + \gamma_1\,\delta\gamma_3 = \delta\chi_y \\ -(\alpha_1\,\delta\alpha_2 + \beta_1\,\delta\beta_2 + \gamma_1\,\delta\gamma_2) &= \alpha_2\,\delta\alpha_1 + \beta_2\,\delta\beta_1 + \gamma_2\,\delta\gamma_1 = \delta\chi_z\,, \end{aligned} \tag{6}$$

---

1) $\delta\chi_x, \ldots$ sind die Variationen uneigentlicher Koordinaten, für die $d\delta\chi \neq \delta d\chi$ ist; vgl. hierzu G. Hamel, *Math. Ann.* **59**, **1904**, S. 416.

und aus Nr. **24** (4) erhalten wir noch

$$\begin{aligned} \alpha_1\,\delta\alpha_1 + \beta_1\,\delta\beta_1 + \gamma_1\,\delta\gamma_1 &= 0 \\ \alpha_2\,\delta\alpha_2 + \beta_2\,\delta\beta_2 + \gamma_2\,\delta\gamma_2 &= 0 \\ \alpha_3\,\delta\alpha_3 + \beta_3\,\delta\beta_3 + \gamma_3\,\delta\gamma_3 &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Durch diese 9 Gleichungen (6) und (7) drücken sich die 9 Größen $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\gamma_3$ mittels der unabhängig veränderlichen $\delta\chi_x, \delta\chi_y, \delta\chi_z$ aus, sodaß man dieselben in die variierten Gleichungen Nr. **24** (1)

$$\begin{aligned} \delta\xi &= \delta\alpha + x\,\delta\alpha_1 + y\,\delta\alpha_2 + z\,\delta\alpha_3 \\ \delta\eta &= \delta\beta + x\,\delta\beta_1 + y\,\delta\beta_2 + z\,\delta\beta_3 \\ \delta\zeta &= \delta\gamma + x\,\delta\gamma_1 + y\,\delta\gamma_2 + z\,\delta\gamma_3 \end{aligned} \tag{8}$$

einführen kann.

26. Die Translations- und Drehgeschwindigkeiten. Setzen wir in die Gleichungen Nr. **25** (3), (5) und (6) anstatt der virtuellen Verrückungen die in der Zeit dt wirklich erfolgenden ein, dividieren durch dt und nennen die Komponenten der Translationsgeschwindigkeit des Nullpunktes von S u, v, w, die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit um die x- resp. y- resp. z-Ache p, q, r, so wird

$$\begin{aligned} \dot x &= u + zq - yr \\ \dot y &= v + xr - zp \\ \dot z &= w + yp - xq \end{aligned} \quad (1) \qquad \begin{aligned} p &= \alpha_3\dot\alpha_2 + \beta_3\dot\beta_2 + \gamma_3\dot\gamma_2 \\ q &= \alpha_1\dot\alpha_3 + \beta_1\dot\beta_3 + \gamma_1\dot\gamma_3 \\ r &= \alpha_2\dot\alpha_1 + \beta_2\dot\beta_1 + \gamma_2\dot\gamma_1 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot\alpha_1 &= \alpha_2 r - \alpha_3 q & \dot\beta_1 &= \beta_2 r - \beta_3 q & \dot\gamma_1 &= \gamma_2 r - \gamma_3 q \\ \dot\alpha_2 &= \alpha_3 p - \alpha_1 r & \dot\beta_2 &= \beta_3 p - \beta_1 r & \dot\gamma_2 &= \gamma_3 p - \gamma_1 r \\ \dot\alpha_3 &= \alpha_1 q - \alpha_2 p & \dot\beta_3 &= \beta_1 q - \beta_2 p & \dot\gamma_3 &= \gamma_1 q - \gamma_2 p. \end{aligned} \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen folgt noch

$$\begin{aligned} \dot\alpha_1^2 + \dot\beta_1^2 + \dot\gamma_1^2 &= q^2 + r^2 \\ \dot\alpha_2^2 + \dot\beta_2^2 + \dot\gamma_2^2 &= r^2 + p^2 \\ \dot\alpha_3^2 + \dot\beta_3^2 + \dot\gamma_3^2 &= p^2 + q^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Dynamik des starren Körpers.

27. Die kinetische Energie eines starren Körpers. Trägheitsmoment. Die kinetische Energie T eines starren Körpers stellt sich mit Hilfe der Gleichungen Nr. **26** (1) folgendermaßen dar:

$$\begin{aligned}2T = \sum m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = (u^2 + v^2 + w^2) \cdot \sum m \\ + 2(vr - wq)\sum mx + 2(wp - ur)\sum my \\ + 2(uq - vp)\sum mz + p^2\sum m(y^2 + z^2) + q^2\sum m(z^2 + x^2) \\ + r^2\sum m(x^2 + y^2) - 2qr\sum myz - 2rp\sum mzx \\ - 2pq\sum mxy. \qquad (1)\end{aligned}$$

Diese homogene Funktion 2. Grades in den u, v, w, p, q, r läßt sich durch passende Wahl des Koordinatensystems wesentlich vereinfachen.

Zunächst kann man den Ursprung desselben in den Schwerpunkt legen, für den $\sum mx = \sum my = \sum mz = 0$ gilt.

Weiter betrachten wir für den Augenblick eine reine Drehung, setzen also $u = v = w = 0$; dann ist

$$\begin{aligned}2T = p^2\sum m(y^2 + z^2) + q^2\sum m(z^2 + x^2) + r^2\sum m(x^2 + y^2) \\ - 2qr\sum myz - 2rp\sum mzx - 2pq\sum mxy. \qquad (2)\end{aligned}$$

Wir tragen in dem rechtwinkligen Koordinatensystem der x, y, z die p, q, r als Koordinaten auf. Die Gleichung der Fläche $T = \frac{1}{2}$ lautet

$$\begin{aligned}p^2\sum m(y^2 + z^2) + q^2\sum m(z^2 + x^2) + r^2\sum m(x^2 + y^2) \\ - 2qr\sum myz - 2rp\sum mzx - 2pq\sum mxy = 1 \qquad (3)\end{aligned}$$

und wird in diesem System durch eine Fläche 2. Ordnung, das sogenannte Trägheitsellipsoid[1]), dargestellt.

Wählen wir die Hauptachsen dieses Ellipsoids zu Koordinatenachsen, so werden für diese die Deviationsmomente (auch Trägheitsprodukte oder Zentrifugalmomente genannt)

$$\sum myz = \sum mzx = \sum mxy = 0;$$

für dieses neue Koordinatensystem, das wir wieder mit x, y, z bezeichnen wollen, wird also die Gleichung (3)

$$p^2\sum m(y^2 + z^2) + q^2\sum m(z^2 + x^2) + r^2\sum m(x^2 + y^2) = 1. \qquad (4)$$

Diese neuen Koordinatenachsen heißen die Hauptträgheitsachsen des Körpers. Die Halbachsen des Ellipsoids sind die reziproken Werte der Wurzeln aus den Hauptträgheitsmomenten, d. h. den Träg-

1) A. L. Cauchy, *Exercises* 1827 = *Œuvres* (2) 7, Paris 1889 S. 124.

heitsmomenten bezüglich der x, y, z-Achse in dem speziellen Koordinatensystem, wenn unter *Trägheitsmoment* eines Körpers bezüglich einer Achse die Summe aus den Produkten jedes Massenelementes und dem Quadrat seines Abstandes von der Achse verstanden wird.

Da die kinetische Energie T bei der Rotation um eine beliebige Achse den Wert

$$T = \frac{1}{2}\sum m \mathfrak{v}^2 = \frac{1}{2}\sum m\varrho^2\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum m\varrho^2 \qquad (5)$$

hat, wo ϱ den Abstand von der Drehachse, $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ die Winkelgeschwindigkeit bedeutet, so folgt, wenn wir $T = \frac{1}{2}$ setzen, daß jeder Radiusvektor des Trägheitsellipsoids, dessen Länge ja $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ ist, gleich der reziproken Wurzel des Trägheitsmoments $\sum m\varrho^2$ bezüglich dieser Achse ist.

Lassen wir nun wieder Translationen und Drehungen zu, so lautet die kinetische Energie T eines starren Körpers der Masse $M = \sum m$ und der Hauptträgheitsmomente

$$A = \sum m(y^2 + z^2), \quad B = \sum m(z^2 + x^2), \quad C = \sum m(x^2 + y^2) \qquad (6)$$

in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt liegt, und dessen Koordinatenachsen die Hauptträgheitsachsen sind,

$$2T = M(u^2 + v^2 + w^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2. \qquad (7)$$

28. Trägheitsmoment des Zylinders und der Kugel. Das Trägheitsmoment eines homogenen Kreiszylinders der Dichte s, der Höhe h und des Radius a bezüglich seiner Figurenachse ist auf Grund der soeben gegebenen Definition

$$K = \int \varrho^2 \cdot dm = sh\int_0^a \varrho^2 \cdot 2\pi\,\varrho\, d\varrho = sh\,\frac{\pi}{2}\,a^4 = \frac{Ma^2}{2}, \qquad (2)$$

wenn M seine Gesamtmasse bedeutet.

Für eine Kugel vom Radius a berechnet sich in ähnlicher Weise

$$K = \tfrac{2}{5}\,Ma^2. \qquad (2)$$

Es möge das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Achse A' berechnet werden, wenn das bezüglich einer parallelen Achse A bekannt ist.

Wählen wir die Achse A zur z-Achse, so ist das Trägheitsmoment bezüglich derselben $K = \sum m(x^2 + y^2)$. Das Trägheitsmoment K' bezüglich einer parallelen Achse A', die durch den Punkt $x = a$, $y = b$ geht, hat den Wert

$$K' = \sum m[(x-a)^2 + (y-b)^2] = K - 2a\sum mx \\ - 2b\sum my + M(a^2 + b^2),$$

unter M die Gesamtmasse des Körpers verstanden.

Geht die z-Achse durch den Schwerpunkt, so daß

$$\sum mx = \sum my = 0$$

ist, so wird einfacher

$$K' = K + M\delta^2, \tag{3}$$

wenn $\delta = \sqrt{a^2 + b^2}$ den Abstand der Achsen A und A' von einander bedeutet.

In Worten: Das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen Achse ist gleich dem Trägheitsmoment der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Gesamtmasse bezüglich der fraglichen Achse, vermehrt um das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich einer durch den Schwerpunkt gehenden parallelen Achse.

Außer dem Trägheitsmoment bezüglich einer Achse, das deshalb auch axiales Trägheitsmoment heißt, wird auch das planare Trägheitsmoment, d. h. das Trägheitsmoment bezüglich einer Ebene, und das polare Trägheitsmoment, d. h. das Trägheitsmoment bezüglich eines Punktes definiert. Dieses ist gleich der Summe der Produkte aus jedem Massenelement und dem Quadrate seines Abstandes von dem betreffenden Punkte, jenes gleich der Summe der Produkte aus jedem Massenelement und dem Quadrate seines Abstandes von der betreffenden Ebene.

Danach ist das axiale Trägheitsmoment z. B. gleich der Summe der planaren Trägheitsmomente bezüglich irgend zweier aufeinander senkrechter durch die Achse gehender Ebenen. In Formel

$$\sum m(y^2 + z^2) = \sum my^2 + \sum mz^2.$$

29. Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers. Nach dem Prinzip des kleinsten Zwanges muß

$$\sum_i m_i\left[\left(\ddot{\xi}_i - \frac{\mathfrak{f}_{\xi i}}{m_i}\right)^2 + \cdots\right]$$

ein Minimum werden, wenn $\mathfrak{f}_{\xi i}$ die ξ-Komponente der am i^{ten} Massen-

punkt angreifenden Kraft bedeutet; es muß also

$$\sum m_i \ddot{\xi}_i \delta \ddot{\xi}_i + \cdots - \sum \mathfrak{f}_{\xi i} \delta \ddot{\xi}_i + \cdots = 0 \tag{1}$$

sein.[1])

Da die x, y, z sich nicht mit der Zeit verändern, sondern nur die Winkelgrößen α_1, α_2 usw. und die α, β, γ, so folgt aus Nr. **24** (1)

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= \ddot{\alpha} + \ddot{\alpha}_1 x + \ddot{\alpha}_2 y + \ddot{\alpha}_3 z \\ \ddot{\eta} &= \ddot{\beta} + \ddot{\beta}_1 x + \ddot{\beta}_2 y + \ddot{\beta}_3 z \\ \ddot{\zeta} &= \ddot{\gamma} + \ddot{\gamma}_1 x + \ddot{\gamma}_2 y + \ddot{\gamma}_3 z, \end{aligned} \tag{2}$$

so daß (1) in

$$\sum m_i (\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha}_1 x + \ddot{\alpha}_2 y + \ddot{\alpha}_3 z)(\delta \ddot{\alpha} + x\,\delta \ddot{\alpha}_1 + y\,\delta \ddot{\alpha}_2 + z\,\delta \ddot{\alpha}_3) + \cdots$$
$$= \sum \mathfrak{f}_{\xi i} (\delta \ddot{\alpha} + x\,\delta \ddot{\alpha}_1 + y\,\delta \ddot{\alpha}_2 + z\,\delta \ddot{\alpha}_3) + \cdots \tag{1'}$$

übergeht.

Da $\delta \ddot{\alpha}$ willkürlich ist, so wird, wenn wir berücksichtigen, daß $\sum mx = \sum my = \sum mz = 0$ ist, und wenn wir $\sum m = M$, $\sum \mathfrak{f}_{\xi i} = \mathfrak{F}_\xi$ setzen,

$$M \ddot{\alpha} = \mathfrak{F}_\xi \quad \text{usw.} \tag{3}$$

oder

$$M \frac{d}{dt}(\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w) = \mathfrak{F}_\xi \quad \text{usw.}, \tag{4}$$

oder durch Einführung der kinetischen Energie T durch Nr. **27** (7)

$$2T = M(u^2 + v^2 + w^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial w}\right) = \mathfrak{F}_\xi \quad \text{usw.} \tag{6}$$

Führt man die Differentiation nach t aus, multipliziert die drei Gleichungen (6) resp. mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und berücksichtigt Nr. **26** (2), so erhält man

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} - r \frac{\partial T}{\partial v} + q \frac{\partial T}{\partial w} = \mathfrak{F}_x \quad \text{usw.} \tag{7}$$

Um die noch weiter aus (1') folgenden Bewegungsgleichungen zu erhalten, beachten wir, daß $\sum mx = \sum my = \sum mz = 0$ und

1) Der Kunstgriff, sofort die Variation des Zwanges anstatt zuerst den Zwang selbst zu bilden, rührt von Brill her, dessen Gedankengang wir überhaupt in Nr. 25 und 29 gefolgt sind. A. Brill, *Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen*, Leipzig und Berlin 1909 S. 18.

$\sum myz = \sum mzx = \sum mxy = 0$; dann wird

$$\begin{aligned}\sum mx^2(\ddot{\alpha}_1\,\delta\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\beta}_1\,\delta\ddot{\beta}_1 + \ddot{\gamma}_1\,\delta\ddot{\gamma}_1) + \cdots \\ = \sum \mathfrak{f}_{\xi i}(x\,\delta\ddot{\alpha}_1 + y\,\delta\ddot{\alpha}_2 + z\,\delta\ddot{\alpha}_3) + \cdots.\end{aligned} \tag{8}$$

Nun bilden wir durch Differentiation von Nr. **26** (3) $\ddot{\alpha}_1$ usw. und hieraus $\delta\ddot{\alpha}_1$ usw., indem wir bei den Variationen nur die $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$ variieren, wie es das Gesetz des kleinsten Zwanges verlangt, und erhalten zur Umformung der linken Seite von (8)

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}_1\delta\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\beta}_1\delta\ddot{\beta}_1 + \ddot{\gamma}_1\delta\ddot{\gamma}_1 = (-\alpha_3\dot{q} - \dot{\alpha}_3 q + \alpha_2\dot{r} + \dot{\alpha}_2 r)(\alpha_2\delta\dot{r} - \alpha_3\delta\dot{q}) \\ + (-\beta_3\dot{q} - \dot{\beta}_3 q + \beta_2\dot{r} + \dot{\beta}_2 r)(\beta_2\delta\dot{r} - \beta_3\delta\dot{q}) \\ + (-\gamma_3\dot{q} - \dot{\gamma}_3 q + \gamma_2\dot{r} + \dot{\gamma}_2 r)(\gamma_2\delta\dot{r} - \gamma_3\delta\dot{q}) \\ = \dot{q}\,\delta\dot{q} - pr\delta\dot{q} + \dot{r}\,\delta\dot{r} + pq\delta\dot{r},\end{aligned} \tag{9}$$

wenn wir $\delta\ddot{\alpha}_1$ usw. durch die aus Nr. **26** (3) folgenden Gleichungen

$$\delta\ddot{\alpha}_1 = \alpha_2\,\delta\dot{r} - \alpha_3\,\delta\dot{q} \quad \text{usw.}$$

ersetzen. Auf diese Weise ergibt sich aus (8)

$$\begin{aligned}[A\dot{p} + (C-B)qr]\delta\dot{p} + [B\dot{q} + (A-C)rp]\delta\dot{q} \\ + [C\dot{r} + (B-A)pq]\delta\dot{r} = \sum[\mathfrak{f}_{\xi i}(\alpha_2 z - \alpha_3 y) + \cdots]\delta\dot{p} \\ + [\mathfrak{f}_{\xi i}(\alpha_1 y - \alpha_2 x) + \cdots]\delta\dot{q} + [\mathfrak{f}_{\xi i}(\alpha_3 x - \alpha_1 z) + \cdots]\delta\dot{r}.\end{aligned} \tag{10}$$

Da die $\delta\dot{p}$, $\delta\dot{q}$, $\delta\dot{r}$ voneinander unabhängig sind, und da

$$\mathfrak{f}_{xi} = \alpha_1\mathfrak{f}_{\xi i} + \beta_1\mathfrak{f}_{\eta i} + \gamma_1\mathfrak{f}_{\zeta i}$$

ist, so folgt

$$A\dot{p} + (C-B)qr = \mathfrak{N}_x \quad \text{usw.} \tag{11}$$

unter $\mathfrak{N}_x = \sum \mathfrak{f}_{zi}y_i - \mathfrak{f}_{yi}z_i$ das Drehmoment um die x-Achse verstanden. Die Gleichungen (11) heißen die **Eulerschen** Gleichungen. Wenn wir wieder die kinetische Energie T einführen, so lauten dieselben

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} = r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + \mathfrak{N}_x \quad \text{usw.} \tag{11'}$$

Multiplizieren wir die drei Gleichungen (11′) resp. mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und addieren dieselben dann, so folgt mit Berücksichtigung der Gleichungen Nr. **26** (3)

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \mathfrak{N}_\xi \tag{12}$$

und entsprechend durch Multiplikation mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ resp. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

$$\frac{d}{dt}\left(\beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \mathfrak{N}_\eta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \mathfrak{N}_\zeta,$$

wo $\mathfrak{N}_\xi$, $\mathfrak{N}_\eta$, $\mathfrak{N}_\zeta$ die Komponenten des Drehmoments bezüglich dreier durch den Schwerpunkt des Körpers gehender, im Raume fester Achsenrichtungen ξ, η, ζ bedeuten.

Der kräftefreie Kreisel.

30. Rotation um eine feste Achse. Der einfachste Fall der Rotation eines starren Körpers ist der, daß die Rotationsachse nicht die Bewegungsfreiheit hat, ihre Richtung im Raume zu ändern, wie z. B. beim Schwungrad einer Dampfmaschine.

Legen wir die z-Achse in die Rotationsachse, so wird dauernd $p = 0$, $q = 0$ sein, und aus der letzten Gleichung Nr. **29** (11) folgt

$$C\frac{dr}{dt} = \mathfrak{N}_z. \tag{1}$$

Es ist aber

$$r = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{2}$$

wenn φ die Winkelgeschwindigkeit der Rotation bedeutet, so daß wir die Bewegungsgleichung

$$C\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mathfrak{N}_z \tag{3}$$

erhalten.

Diese Gleichung lautet in Worten: Das Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung ist gleich dem Drehmoment.

In dieser Form erinnert die Gleichung sehr an die Newtonsche Bewegungsgleichung eines Massenpunktes, die zum Inhalt hat, daß das Produkt aus Masse und Beschleunigung gleich der Kraft ist. Trägheitsmoment, Winkelbeschleunigung und Drehmoment spielen also für Rotationen genau dieselbe Rolle wie Masse, Beschleunigung und Kraft für Translationsbewegungen.

Wie immer, wenn nur ein Grad von Bewegungsfreiheit vorhanden ist, folgt auch hier die Bewegungsgleichung bereits aus dem Energieprinzip. Denn die kinetische Energie ist $T = \frac{1}{2}C\dot\varphi^2$, und die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit ist $\frac{d'A}{dt} = \mathfrak{N}\dot\varphi$, also muß $\frac{dT}{dt} = \frac{d'A}{dt}$ sein, und das ist identisch mit (3).

Wirkt kein Drehmoment, so ist, wie aus (3) folgt, die Winkelgeschwindigkeit konstant.

31. Integrale der Bewegungsgleichungen. Hält man den Schwerpunkt eines sonst beliebig frei beweglichen starren Körpers etwa durch eine Cardanische Aufhängung im Raume fest, so kann man auch von dem Wirken der Schwerkraft absehen. Man spricht dann vom kräftefreien Kreisel. Aus Nr. **29** (12) erhält man in diesem Falle

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right) &= 0 . \end{aligned} \tag{1}$$

Diese Gleichungen lassen sich ohne weiteres nach der Zeit integrieren und ergeben

$$\begin{aligned} \alpha_1 Ap + \alpha_2 Bq + \alpha_3 Cr &= \mathfrak{J}_\xi \\ \beta_1 Ap + \beta_2 Bq + \beta_3 Cr &= \mathfrak{J}_\eta \\ \gamma_1 Ap + \gamma_2 Bq + \gamma_3 Cr &= \mathfrak{J}_\zeta . \end{aligned} \tag{2}$$

Hier sind die rechten Seiten zeitlich konstant, es sind die Komponenten des Drehimpulses bezüglich eines im Raume festen Koordinatensystems, denn Ap, Bq, Cr sind die Komponenten des Drehimpulses bezüglich der Hauptträgheitsachsen des Kreisels.

(2) sagt aus: *Der Drehimpuls eines kräftefreien Kreisels ist der Größe nach konstant und hat eine im Raume unveränderliche Richtung.*

Durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen (2) erhält man unter Berücksichtigung von Nr. **24** (4) und (5)

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \mathfrak{J}^2, \tag{3}$$

wo $\mathfrak{J}^2$, das Quadrat des Drehimpulses, konstant ist.

Ein weiteres Integral ergibt sich aus den Gleichungen Nr. **29** (11), die im Falle des kräftefreien Kreisels in

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)\,qr \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A)\,rp \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)\,pq \end{aligned} \tag{4}$$

übergehen.

Multipliziert man nämlich diese Gleichungen resp. mit p, q, r und addiert, so folgt durch Integration nach der Zeit

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T, \tag{5}$$

wo T eine Konstante ist, nämlich die kinetische Energie des Körpers.

32. Kinematische Behandlung der Kreiselbewegung. Aus den Integralen Nr. 31 (3) und (5) lassen sich bereits einige wichtige Folgerungen betreffs der Bewegung des kräftefreien Kreisels ziehen.

Nennen wir den Drehgeschwindigkeitsvektor $\mathfrak{g}\,(p, q, r)$, den Impulsvektor $\mathfrak{J}\,(Ap, Bq, Cr)$, so lautet Nr. 31 (5)

$$(\mathfrak{g}, \mathfrak{J}) = 2T = \text{konst.}, \tag{1}$$

d. h. $|\mathfrak{g}| \cdot |\mathfrak{J}| \cos(\mathfrak{g}, \mathfrak{J}) = \text{konst.}$ Da aber nach Nr. 31 (3) $|\mathfrak{J}|$ konstant ist, so ist nach (1) auch die Projektion der Drehgeschwindigkeit auf die räumlich feste Richtung des Drehimpulses konstant.

Zieht man also vom Drehpunkt des Kreisels einen Vektor, der nach Größe und Richtung den Drehimpuls darstellt, und konstruiert im Endpunkt desselben eine Ebene senkrecht zu diesem Vektor, so muß der Endpunkt des Drehgeschwindigkeitsvektors, dessen Anfangspunkt auch im festen Punkte des Kreisels liegt, stets in der so konstruierten räumlich festen Ebene liegen.

Denken wir uns ferner das Ellipsoid

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 2T \tag{2}$$

mit den Halbachsen $\sqrt{\frac{2T}{A}}, \sqrt{\frac{2T}{B}}, \sqrt{\frac{2T}{C}}$, die mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, im Kreisel fest konstruiert, so muß nach Nr. 31 (5) der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{g}\,(p, q, r)$, der Drehgeschwindigkeit, auf diesem mit dem Kreisel fest verbundenen Poinsotschen Ellipsoide liegen, das mit dem Cauchyschen Trägheitsellipsoid Nr. 27 (4) ähnlich und ähnlich gelegen ist.

Da die invariante Ebene aber zugleich Tangentialebene am Poinsotschen Ellipsoid ist, so wird bei der kräftefreien Bewegung des Kreisels das mit ihm starr verbundene Ellipsoid auf der im Raume festen Ebene abrollen ohne zu gleiten. Der Drehgeschwindigkeitsvektor ist in jedem Augenblick nach Größe und Richtung der Radiusvektor vom festen Kreiselpunkt zum Berührungspunkt des Ellipsoids mit der Ebene.

Diese kinematische Beschreibung der Bewegung stammt von Poinsot.[1])

Einen weiteren Einblick in die Bewegungsverhältnisse bekommen wir, wenn wir das Ellipsoid

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \mathfrak{J}^2 \tag{3}$$

im Körper fest konstruieren, dessen Halbachsen $\frac{|\mathfrak{J}|}{A}, \frac{|\mathfrak{J}|}{B}, \frac{|\mathfrak{J}|}{C}$ mit den Hauptträgheitsachsen des Kreisels der Richtung nach zusammenfallen. Nach Nr. **31** (3) muß der Endpunkt des Drehgeschwindigkeitsvektors auch auf diesem Ellipsoid liegen, d. h. auf der Durchdringungskurve der beiden Ellipsoide (2) und (3). Die Durchdringungskurve heißt die *Polhodie* (πόλος = Pol, ὁδός = Weg).

Diese Kurve wickelt sich also auf der invarianten Ebene ab und beschreibt auf derselben eine Kurve, die sogenannte *Herpolhodie* (eigentlich besser: Herpopolhodie; ἕρπω = krieche, πόλος = Pol, ὁδός = Weg), und die Winkelgeschwindigkeit ist durch den Radiusvektor vom festen Punkt bis zur Herpolhodie gegeben.

Wir wollen annehmen, daß $A > B > C$ ist; dann ist das Ellipsoid (3) gestreckter als das (2), denn bei jenem ist das Verhältnis der größten zur kleinsten Achse A/C, während es bei diesem $\sqrt{A/C}$ ist. Beide Ellipsoide müssen sich unbedingt schneiden, da der Endpunkt von $\mathfrak{g}$ auf beiden liegen muß, also schon zur Zeit $t = 0$ $\mathfrak{g}$ so gegeben sein muß, daß sein Endpunkt auf beiden liegt, oder vielmehr umgekehrt T und $\mathfrak{J}$ so gewählt sein müssen, daß der Anfangswert von $\mathfrak{g}$ auf beiden Flächen liegt.

Allerdings können die Grenzfälle vorkommen, daß beide Ellipsoide sich in den Endpunkten der größten oder der kleinsten Achse berühren, nämlich dann, wenn zur Zeit $t = 0$ die Rotation um die größte oder um die kleinste Hauptträgheitsachse erfolgte. Sonst schneiden sich die Ellipsoide in geschlossenen Raumkurven, wie es z. B. in den Figuren 18, 19, 20 dargestellt ist.[2])

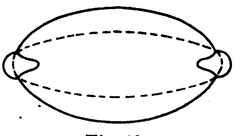


Fig. 18.

Das Ellipsoid (2) ist in allen drei Figuren von gleicher Größe gewählt, die Ellipsoide (3) sind in den drei Figuren zwar ähnlich, aber ihre absolute Größe ist von Figur zu Figur wachsend angenommen.

---

1) L. Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation des Corps*, Paris 1834; *Liouvilles. Journ.* (1) **16**, 1851, p. 9 und 289; deutsch bearbeitet von K. H. Schellbach, Berlin 1851.

2) Vgl. H. v. Helmholtz, *Vorlesungen über theor. Physik* **1**, 2, Leipzig 1898, S. 326

Das kleinstmögliche Ellipsoid (3) hat eine solche Größe, daß seine größte Achse gerade gleich der des Ellipsoids (2) ist. Dann artet die Polhodiekurve in einen Punkt aus, d. h. die Rotation um die größte Hauptträgheitsachse ist dauernd möglich.

Bei wachsendem $\mathfrak{J}^2$ durchsetzt das Ellipsoid (3) das Ellipsoid (2) (vgl. Fig. 18), bis das Ellipsoid (3) so groß geworden ist, daß die mittlere Achse gleich der des Ellipsoids (2) geworden ist. Dann hat die Schnittkurve einen Doppelpunkt (Fig. 19), in dem es unsicher ist, wie die Drehachse sich weiterbewegt. Bei noch mehr anwachsendem $\mathfrak{J}^2$ erhalten wir als Schnittkurven wieder zwei geschlossene Linien (Fig. 20), die die Endpunkte der kleinsten Achse umschließen und endlich sogar sich in einen Punkt zusammenziehen, wenn die Rotationsachse in die Richtung der kleinsten Achse fällt; auch dann ist also die Polhodiekurve ein Punkt.

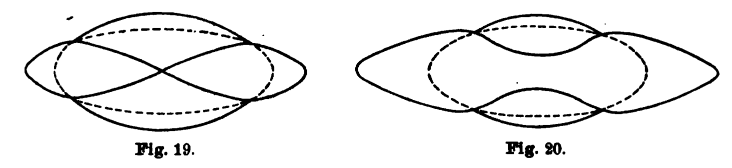


Fig. 19. Fig. 20.

Es mögen noch die Stabilitätsverhältnisse der Rotationen um die Hauptträgheitsachsen untersucht werden.

Es ergibt sich auch aus den Eulerschen Gleichungen Nr. 31 (4), daß eine Rotation um jede dieser Achsen kräftefrei existieren kann, da dieselben durch

$$p = \text{konst.}; \quad q = r = 0$$

oder durch

$$q = \text{konst.}; \quad r = p = 0$$

oder durch

$$r = \text{konst.}; \quad p = q = 0$$

befriedigt sind.

Stört man plötzlich die stattfindende Rotation ein wenig, etwa durch einen kleinen Stoß, so ändern sich T und $\mathfrak{J}$, also die Größen der Ellipsoide, aber sie bleiben denen vor der Störung ähnlich. Im Falle der Rotation um die größte oder kleinste Hauptträgheitsachse gehen die punktförmigen Polodiekurven in kleine geschlossene Kurven (Fig. 18 u. 20) über, die die Endpunkte der betreffenden Achsen umzingeln. Die Rotationen um die größte und kleinste Hauptträgheitsachse sind also stabil.

Dagegen löst sich die Polhodiekurve mit einem Doppelpunkt (Fig. 19), die der Rotation um die mittlere Achse entspricht, sofort

in eine Kurve mit zwei getrennten Zweigen auf, d. h. die Drehachse entfernt sich von der ursprünglichen um einen endlichen Betrag. Eine Drehung um die Achse des mittleren Trägheitsmoments ist also labil.

33. Analytische Behandlung der Kreiselbewegung. Die bisherige Behandlungsweise der Bewegung des kräftefreien Kreisels kann nicht auf Vollständigkeit Anspruch machen, da nur zwei Integrale der Gleichungen Nr. **31** (4), das Energieintegral und der Flächensatz (Impulsintegral) benutzt worden sind. Um die Bewegung als Funktion der Zeit lückenlos zu beschreiben, müssen die Bewegungsgleichungen vollständig integriert werden.

Setzt man [1])

$$\begin{aligned} p &= a \operatorname{cn}(\lambda t + \mu) \\ q &= b \operatorname{sn}(\lambda t + \mu) \\ r &= c \operatorname{dn}(\lambda t + \mu), \end{aligned} \tag{1}$$

wo cn, sn, dn die elliptischen Funktionen bedeuten, so wird

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{a\lambda}{bc} qr \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{b\lambda}{ca} rp \\ \frac{dr}{dt} &= -\varkappa^2 \frac{c\lambda}{ab} pq, \end{aligned} \tag{2}$$

wenn $\varkappa$ der Modul der elliptischen Funktionen ist.

Damit nun (2) mit den Gleichungen Nr. **31** (4) identisch wird, müssen wir

$$\begin{aligned} \frac{B-C}{A} &= -\frac{a\lambda}{bc} \\ \frac{C-A}{B} &= \frac{b\lambda}{ca} \\ \frac{A-B}{C} &= -\varkappa^2 \frac{c\lambda}{ab} \end{aligned} \tag{3}$$

setzen.

Drei der sechs Konstanten a, b, c, $\varkappa$, λ, μ drücken sich also durch (3) aus, die übrigen drei bleiben willkürlich und müssen durch die Anfangswerte p_0, q_0, r_0 von p, q, r bestimmt werden.

---

1) Vgl. G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mechanik*, 4. Aufl., Leipzig 1897, S. 62.

Aus den Gleichungen Nr. 31 (3) und (5)

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T,$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \mathfrak{J}^2$$

folgt, da etwa für $am(\lambda t + \mu) = 2\pi$ nach (1) $p = a$, $q = 0$, $r = c$ ist,

$$\begin{aligned} Aa^2 + Cc^2 &= Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 \\ A^2a^2 + C^2c^2 &= A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2, \end{aligned} \tag{4}$$

aus denen sich a und c durch

$$\begin{aligned} A(A-C)a^2 &= A(A-C)p_0^2 + B(B-C)q_0^2 \\ C(A-C)c^2 &= B(A-B)q_0^2 + C(A-C)r_0^2 \end{aligned} \tag{5}$$

ergeben, und zwar sind a^2 und $c^2 > 0$, da $A > B > C$ angenommen wurde.

Aus den Gleichungen (3) folgt durch Division resp. Multiplikation der ersten beiden resp. durch Division der ersten und dritten:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 \frac{(A-C)A}{(B-C)B} \\ \lambda^2 &= c^2 \frac{(B-C)(A-C)}{AB} \\ \varkappa^2 &= \frac{a^2}{c^2}\frac{(A-B)A}{(B-C)C}. \end{aligned} \tag{6}$$

Durch (5) und (6) sind also bereits a^2, b^2, c^2, $\varkappa^2$, λ^2 durch p_0, q_0, r_0 ausgedrückt, und zwar sind auch b^2, $\varkappa^2$, $\lambda^2 > 0$.

Ist das nach (6) gefundene $\varkappa^2 > 1$, so braucht man nur x mit z und z mit $-x$ zu vertauschen, dadurch vertauscht sich A mit C und p_0^2 mit r_0^2, also nach (5) a^2 mit c^2, und $\varkappa^2$ geht nach (6) ins Reziproke über, wird also ein echter Bruch.

Noch eine Bemerkung zur Vorzeichenbestimmung[1]): Aus der ersten Gleichung (3) ergibt sich das Vorzeichen einer der Größen a, b, c, λ, wenn das der anderen bekannt ist. λ möge > 0 angenommen werden; dann ergibt sich das Vorzeichen von b, wenn das von a und c bekannt ist. Das Vorzeichen von c bestimmt sich aber aus den für $t = 0$ gültigen Gleichungen

$$p_0 = a \operatorname{cn} \mu, \quad q_0 = b \operatorname{sn} \mu, \quad r_0 = c \operatorname{dn} \mu. \tag{7}$$

1) Vgl. G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mechanik*, 4. Auflage, Leipzig 1897, S. 65.

Da nämlich $\operatorname{dn}\mu$ immer > 0 ist, so muß c dasselbe Vorzeichen haben wie r_0. Wählen wir das von a beliebig, etwa gleich dem von p_0, so ergibt sich das von b aus der ersten Gleichung (3).

μ berechnet sich dann eindeutig aus den ersten beiden Gleichungen (7), wenn $am\mu$ zwischen $\pm\frac{\pi}{2}$ angenommen wird.

Hat man auf diese Weise p, q, r gefunden, so folgen die Eulerschen Winkel durch Integration der Gleichungen

$$\begin{aligned} p &= \dot\psi \sin\vartheta \sin\varphi + \dot\vartheta \cos\varphi \\ q &= \dot\psi \sin\vartheta \cos\varphi - \dot\vartheta \sin\varphi \\ r &= \dot\psi \cos\vartheta + \dot\varphi\,, \end{aligned} \tag{8}$$

die sich aus Fig. 15, S. 43, durch Projektion der Komponenten $\dot\vartheta$, $\dot\psi$, $\dot\varphi$ der Winkelgeschwindigkeit auf die x, y, z-Achse unmittelbar ergeben, und durch deren Auflösung

$$\begin{aligned} \dot\vartheta &= p\cos\varphi - q\sin\varphi \\ \dot\psi &= \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\vartheta} \\ \dot\varphi &= r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\vartheta \end{aligned} \tag{8'}$$

folgt.

34. Der Kugelkreisel und der symmetrische Kreisel. Unter welchen Bedingungen die Kreiselbewegung sich mit elementareren Hilfsmitteln als elliptischen Funktionen behandeln läßt, übersieht man auf folgende Weise:

Man setze

$$p^2 + q^2 + r^2 = \mathfrak{g}^2. \tag{1}$$

Dann folgt aus den Gleichungen Nr. 31 (4) durch Multiplikation mit p/A, resp. q/B resp. r/C und Addition

$$\frac{1}{2}\frac{d\mathfrak{g}^2}{dt} = pqr\left\{\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right\}, \tag{2}$$

und wenn man p, q, r mit Hilfe der Gleichungen (1) und Nr. 31 (3) und (5) durch $\mathfrak{g}^2$ ausdrückt, nämlich

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{BC(\mathfrak{g}^2 - \mathfrak{g}_1^2)}{(A-B)(A-C)} \\ q^2 &= \frac{CA(\mathfrak{g}^2 - \mathfrak{g}_2^2)}{(B-C)(B-A)} \\ r^2 &= \frac{AB(\mathfrak{g}^2 - \mathfrak{g}_3^2)}{(C-A)(C-B)}, \end{aligned} \tag{3}$$

wo

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_1^2 &= \frac{2T(B+C)-\mathfrak{J}^2}{BC}\\
\mathfrak{g}_2^2 &= \frac{2T(C+A)-\mathfrak{J}^2}{CA}\\
\mathfrak{g}_3^2 &= \frac{2T(A+B)-\mathfrak{J}^2}{AB}
\end{aligned} \tag{4}$$

gesetzt ist, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}\frac{d\mathfrak{g}^2}{dt} = \sqrt{(\mathfrak{g}_1^2-\mathfrak{g}^2)(\mathfrak{g}_2^2-\mathfrak{g}^2)(\mathfrak{g}_3^2-\mathfrak{g}^2)}. \tag{5}$$

Die Zeit ist also nach (5) ein elliptisches Integral von $\mathfrak{g}^2$, außer wenn zwei der Konstanten in (5) einander gleich sind. Das findet aber statt, wenn zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, oder wenn $\mathfrak{J}^2$ einen der drei Werte $2TA$, $2TB$, $2TC$ hat.

Diese elementareren Fälle sind auch praktisch von Bedeutung und sollen deshalb diskutiert werden.

1) $A=B=C$. Sind alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich, so heißt der Kreisel ein *Kugelkreisel.* Er braucht deshalb keineswegs die Form einer Kugel zu haben; ein Würfel z. B. würde auch den genannten Bedingungen genügen.

Nach Nr. 31 (4) bleiben dann p, q, r konstant gleich p_0, q_0, r_0, d. h. der Kreisel dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dauernd um eine in ihm festliegende Achse, die nach Nr. 31 (2) auch im Raume festliegt.

2) $A=B$. Sind zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich, so heißt der Kreisel ein symmetrischer.

Dann wird nach Nr. 33 (6) $\varkappa = 0$, und die elliptischen Funktionen gehen in trigonometrische über, denn nach Nr. 33 (1) wird

$$p = a\cos(\lambda t+\mu), \quad q = b\sin(\lambda t+\mu), \quad r = c. \tag{6}$$

Nach Nr. 33 (6) wird aber $b^2=a^2$, $\lambda^2 = c^2\left(\frac{A-C}{A}\right)^2$ und nach der früher angestellten Vorzeichenbestimmung, wenn wir $r_0 = c > 0$ wählen,

$$\lambda = c\cdot\frac{A-C}{A}, \quad a = -b,$$

also

$$\begin{aligned}
p &= a\cos\left(\frac{r_0(A-C)}{A}t+\mu\right)\\
q &= -a\sin\left(\frac{r_0(A-C)}{A}t+\mu\right)\\
r &= r_0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Die Winkelgeschwindigkeit um die Figurenachse ist somit konstant.

Durch Integration der Gleichungen Nr. 33 (8′) ergeben sich dann ϑ, ψ, φ.

Unbeschadet der Allgemeinheit darf man annehmen, daß der Impuls die Richtung der ζ-Achse hat, daß also nach Nr. 31 (2)

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 p + \alpha_2 q) &= -C\alpha_3 r_0 \\ A(\beta_1 p + \beta_2 q) &= -C\beta_3 r_0 \end{aligned} \tag{8}$$

ist.

Drückt man die Richtungskosinus nach Nr. 24 (7) und p und q nach Nr. 33 (8), durch ϑ, ψ, φ, $\dot\vartheta$, $\dot\psi$ aus, so folgt

$$\begin{aligned} \dot\vartheta \cos\psi - \dot\psi \sin\psi \sin\vartheta \cos\vartheta &= -\sin\psi \sin\vartheta \frac{C}{A} r_0 \\ \dot\vartheta \sin\psi + \dot\psi \cos\psi \sin\vartheta \cos\vartheta &= +\cos\psi \sin\vartheta \frac{C}{A} r_0, \end{aligned} \tag{9}$$

aus denen sich

$$\dot\vartheta = 0 \quad \text{und} \quad \dot\psi \cos\vartheta = \frac{C}{A} r_0 \tag{10}$$

ergibt, außer wenn $\vartheta = 0$, d. h. der Kreisel ein aufrechter ist, während die letzte Gleichung Nr. 33 (8)

$$\dot\varphi = r_0 \frac{A - C}{A} \tag{11}$$

verlangt.

Die Integration von (10) und (11) liefert

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \psi = \psi_0 + \delta t, \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon t, \tag{12}$$

wenn

$$\delta = \frac{C}{A} \frac{r_0}{\cos\vartheta_0}, \quad \varepsilon = \frac{A - C}{A} r_0,$$

also δ und ε durch die Gleichung verbunden sind

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{A - C}{C} \cos\vartheta_0. \tag{13}$$

Die durch (12) und (13) dargestellte Bewegung ist eine sogenannte *reguläre Präzession.* δ ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Figurenachse um die Impulsachse rotiert, oder die *Präzessionsgeschwindigkeit*, während ε die *Eigendrehung*, d. h. die Drehgeschwindigkeit um die Figurenachse bedeutet.

ϑ_0 darf man immer als spitzen Winkel annehmen, da man die Richtung der positiven z-Achse (Figurenachse) in seiner Wahl

hat. Dann ist die Präzession *progressiv* oder *retrograd*, je nachdem $A \gtrless C$ ist.

Diese Bewegung ist die allgemeinste, die der kräftefreie, symmetrische Kreisel ausführen kann, wenn ϑ, ψ, φ irgend drei Eulersche Winkel bedeuten. Wenn aber diese Winkel die oben erwähnte Beziehung zum Mechanismus der Cardanischen Aufhängung haben, so ist hier der spezielle Fall vorausgesetzt, daß der Impuls die Richtung der im Raume festen Achse der Aufhängung hat.

Die gefundenen Resultate lassen sich in einfacher Weise auch aus dem in den Eulerschen Winkeln dargestellten Ausdrucke für die lebendige Kraft ableiten.

In der Formel

$$2T = A(\dot\vartheta^2 + \dot\psi^2 \sin^2\vartheta) + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta)^2, \tag{14}$$

die sich aus Nr. 31 (5) und aus Gleichung (8) der vorigen Nummer ergibt, kommen die Koordinaten φ und ψ überhaupt nicht vor, sondern nur ihre zeitlichen Differentialquotienten. φ und ψ heißen deshalb nach Helmholtz[1]) *zyklische* Koordinaten.

Aus (14) erhält man

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\psi} = A\dot\psi\sin^2\vartheta + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta)\cos\vartheta, \qquad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta), \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\vartheta} = A\dot\vartheta, \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = A\dot\psi^2\sin\vartheta\cos\vartheta - C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta)\dot\psi\sin\vartheta,$$

so daß aus den Lagrangeschen Gleichungen in der zweiten Form (Nr. 19 (7)) sofort die zwei Integrale

$$\begin{aligned}(A\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\dot\psi + C\cos\vartheta\,\dot\varphi &= K_1\\ C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta) &= K_2\end{aligned} \tag{15}$$

folgen, während ϑ der Gleichung genügt

$$-(A - C)\dot\psi^2\sin\vartheta\cos\vartheta + C\dot\varphi\dot\psi\sin\vartheta + A\ddot\vartheta = 0. \tag{16}$$

Setzen wir z. B. $\vartheta = \text{konst.}$, so folgt aus den Gleichungen (15) sofort, daß $\dot\varphi$ und $\dot\psi$ konstant sind, und aus (16) ergibt sich die Beziehung (13) wieder. Wir sehen also unmittelbar aus dieser

---

1) H. v. Helmholtz, *Journ. f. Math.*, 97, S. 111, 317, 1884; 100, S. 137, 213, 1887.

Form der Bewegungsgleichungen, daß die reguläre Präzession eine mögliche Bewegung des kräftefreien Kreisels ist.

35. Die Stabilierung durch Kreiselwirkung. Wirken auf den Kreisel Drehmomente, welche bei einer virtuellen Verschiebung die Arbeit

$$\delta' A = \mathfrak{N}_\vartheta \delta\vartheta + \mathfrak{N}_\psi \delta\psi + \mathfrak{N}_\varphi \delta\varphi \tag{1}$$

leisten, so ergeben die Lagrangeschen Gleichungen die Formeln

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[A \sin^2\vartheta\dot\psi + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta)\cos\vartheta\right] = \mathfrak{N}_\psi \\ &\frac{d}{dt}\, C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta) = \mathfrak{N}_\varphi \\ &A\ddot\vartheta - (A - C)\dot\psi^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + C\dot\varphi\dot\psi\sin\vartheta = \mathfrak{N}_\vartheta \end{aligned} \tag{2}$$

In (1) bedeutet $\mathfrak{N}_\varphi$ das Drehmoment um die Figurenachse, es ist also $\mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{N}_z$; $\mathfrak{N}_\psi$ ist das Drehmoment um die im Raume feste Achse ζ der Cardanischen Aufhängung, also ist

$$\mathfrak{N}_\psi = \mathfrak{N}_\zeta = \gamma_1 \mathfrak{N}_x + \gamma_2 \mathfrak{N}_y + \gamma_3 \mathfrak{N}_z,$$

$\mathfrak{N}_\vartheta$ ist das Drehmoment um die Knotenlinie, d. h.

$$\mathfrak{N}_\vartheta = \mathfrak{N}_x \cos\varphi - \mathfrak{N}_y \sin\varphi.$$

Wir haben also mit Berücksichtigung von Nr. **24** (7)

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_\varphi &= \mathfrak{N}_z \\ \mathfrak{N}_\psi &= \sin\varphi\sin\vartheta\,\mathfrak{N}_x + \cos\varphi\sin\vartheta\,\mathfrak{N}_y + \cos\vartheta\,\mathfrak{N}_z \\ \mathfrak{N}_\vartheta &= \cos\varphi\,\mathfrak{N}_x - \sin\varphi\,\mathfrak{N}_y. \end{aligned} \tag{1'}$$

Sind $\mathfrak{N}_\vartheta = \mathfrak{N}_\psi = \mathfrak{N}_\varphi = 0$, so ist eine Lösung der Gleichungen (2)

$$\vartheta_0 = \pi/2, \quad \dot\vartheta_0 = 0; \quad \psi_0 = 0, \quad \dot\psi_0 = 0; \quad \dot\varphi_0 = r_0. \tag{3}$$

Das ist eine Rotation des Kreisels mit der Winkelgeschwindigkeit r_0 um die im Raume ruhende Figurenachse.

Wir suchen nun eine Lösung von (2), indem wir

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1, \quad \psi = \psi_0 + \psi_1, \quad \dot\varphi = \dot\varphi_0 + \dot\varphi_1 \tag{4}$$

setzen und annehmen, daß ϑ_1, ψ_1, $\dot\varphi_1$ so klein sind, daß ihre höheren Potenzen und Produkte vernachlässigt werden können. Diese Lösungen werden um so länger genäherte Gültigkeit haben,

je kleiner die Drehmomente $\mathfrak{N}$ sind[1]), welche als Funktionen der Zeit aufgefaßt werden mögen.

Aus der zweiten Gleichung (2) folgt durch Integration

$$\dot{\varphi} = r_0 + \int_0^t \frac{\mathfrak{N}_\varphi(\tau)}{C}\, d\tau, \tag{5}$$

aus der ersten Gleichung (2)

$$A\ddot{\psi}_1 - C r_0 \dot{\vartheta}_1 = \mathfrak{N}_\psi \tag{6}$$

und aus der dritten Gleichung (2)

$$A\ddot{\vartheta}_1 + C r_0 \dot{\psi}_1 = \mathfrak{N}_\vartheta. \tag{7}$$

Integrieren wir (7) einmal nach der Zeit, so erhalten wir

$$\dot{\vartheta}_1 = \int_0^t \frac{\mathfrak{N}_\vartheta(\tau)}{A}\, d\tau - \frac{C r_0}{A}\psi_1, \tag{8}$$

und wenn wir diesen Wert in (6) substituieren,

$$\ddot{\psi}_1 + \left(\frac{C r_0}{A}\right)^2 \psi_1 = \frac{\mathfrak{N}_\psi(t)}{A} + \frac{C r_0}{A^2}\int_0^t \mathfrak{N}_\vartheta(\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

Ebenso ergibt sich durch einmalige Integration von (6) und Substitution des Integrals in (7)

$$\ddot{\vartheta}_1 + \left(\frac{C r_0}{A}\right)^2 \vartheta_1 = \frac{\mathfrak{N}_\vartheta(t)}{A} - \frac{C r_0}{A^2}\int_0^t \mathfrak{N}_\psi(\tau)\, d\tau. \tag{10}$$

Haben niemals Drehmomente gewirkt, waren also immer die $\mathfrak{N} = 0$, so ergeben die Gleichungen (9) und (10) für ψ_1 und ϑ_1 einfache Sinusschwingungen, deren Schwingungszahl $\frac{C r_0}{2\pi A}$ um so größer ist, je schneller der Kreisel rotiert. Mittels dieser Werte stellen die Gleichungen (4) eine Bewegung mit etwas anderen Anfangsbedingungen, als sie durch (3) gegeben sind, dar. Diese modifizierte Bewegung bleibt also, solange die Voraussetzungen über die Vernachlässigungen gelten, dauernd der ursprünglichen benach-

1) Man vgl. wegen dieser Methode weiter unten in der „*Theorie der Schwingungen*“ die Nummer über das Gleichgewicht eines Bewegungszustandes.

bart, da die kleinen Störungen ϑ_1 und ψ_1 innerhalb gewisser Grenzen bleiben. In diesem Sinne ist die ungestörte Bewegung stabil.

Dazu ist es aber notwendig, daß der Kreisel alle drei Freiheitsgrade hat. Wäre z. B. die Bedingung ϑ = konst. dadurch bewirkt, daß der innere Ring der Cardanischen Aufhängung festgeklemmt ist, so wäre nach Gleichung (6) keine Stabilität vorhanden.

Haben die Drehmomente nur bis zu einer Zeit $t_1 < t$ gewirkt und sind nachher Null, und setzen wir die Drehimpulse

$$\mathfrak{J}_\vartheta = \int_0^{t_1} \mathfrak{N}_\vartheta \, d\tau\,, \quad \mathfrak{J}_\psi = \int_0^{t_1} \mathfrak{N}_\psi \, d\tau\,, \tag{11}$$

so wird aus (9) und (10) für $t > t_1$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\left(\psi_1 - \frac{\mathfrak{J}_\vartheta}{Cr_0}\right) + \left(\frac{Cr_0}{A}\right)^2 \left(\psi_1 - \frac{\mathfrak{J}_\vartheta}{Cr_0}\right) = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2}\left(\vartheta_1 + \frac{\mathfrak{J}_\psi}{Cr_0}\right) + \left(\frac{Cr_0}{A}\right)^2 \left(\vartheta_1 + \frac{\mathfrak{J}_\psi}{Cr_0}\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Diese Gleichungen stellen aber zusammen mit (3) und (4) Schwingungen um eine Gleichgewichtslage

$$\Psi = \frac{\mathfrak{J}_\vartheta}{Cr_0}\,, \quad \Theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\mathfrak{J}_\psi}{Cr_0} \tag{13}$$

dar, und wenn die Schwingungen durch reibende Kräfte, die in unserem Ansatz nicht mit berücksichtigt worden sind, absorbiert sind, so hat die Figurenachse die durch (13) gegebene neue Ruhelage angenommen.

Aus dieser Formel schließen wir erstens, daß die Ablenkungen durch störende Impulse $\mathfrak{J}$ um so kleiner sind, je größer der ursprüngliche Impuls um die Figurenachse oder der sogenannte Eigenimpuls Cr_0 ist, daß also ein großer Eigenimpuls den Kreisel sehr stabiliert.

Des Weiteren erhalten wir das auf den ersten Blick paradoxe Resultat, daß ein Drehimpuls um eine $\left\{\begin{matrix}\text{horizontale}\\ \text{vertikale}\end{matrix}\right\}$ Achse eine Drehung der Figurenachse um eine $\left\{\begin{matrix}\text{vertikale}\\ \text{horizontale}\end{matrix}\right\}$ Achse hervorruft.

Diese Erscheinung erklärt sich aber einfach in folgender Weise: Die Grundgleichung der Kreiseltheorie ist die Vektorgleichung (Nr. **29** (12))

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \mathfrak{N}\,. \tag{14}$$

$\mathfrak{J}$ ist der Drehimpuls des Kreisels, $\mathfrak{N}$ das zu seiner Änderung erforderliche Drehmoment. Das Bezugssystem, in dem (14) gilt, ist ein im Raume festes.

Ist der Eigenimpuls Cr_0 groß gegen die nachher von außen hinzugefügten Impulse, so dürfen wir bei der Berechnung der Größe von $\mathfrak{J}$ diese gegen jenen vernachlässigen; dann ist $|\mathfrak{J}|$ in (14) einfach der Eigenimpuls, welcher bei konstanter Größe lediglich seine Richtung im Raume bei Bewegung der Figurenachse ändert.

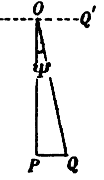


Fig. 21.

Die anfängliche Lage der Figurenachse ($\psi = 0$, $\vartheta = \pi/2$) ist bei Benutzung der in Fig. 17, S. 43, abgebildeten Cardanischen Aufhängung eine horizontale. Betrachten wir die Endlage $\psi = \Psi$, $\vartheta = \pi/2$ (vgl. Fig. 21), so hat sich der Impuls in der Horizontalebene gedreht von OP in die Lage OQ, es ist also ein Impulszuwachs entstanden, der durch PQ nach Größe und Richtung dargestellt wird. Er wird nach (14) hervorgerufen durch ein Drehmoment um eine Achse $P'Q' \| PQ$ durch den Kreiselmittelpunkt, das die Kreiselspitze herunterzudrücken sucht, d. h. durch ein Moment $\mathfrak{N}_\vartheta$, wie die erste Gleichung (13) es verlangt.

Fig. 22.

Ebenso, wenn die Anfangslage der Figurenachse $\psi = 0$, $\vartheta = \pi/2$, die Endlage $\psi = 0$, $\vartheta = \Theta$ ist. Diese Drehung in der Vertikalebene ergibt einen Impulszuwachs PR (Fig. 22), der ein Drehmoment um die Vertikalachse $P'R'$ erfordert, das wir durch $\mathfrak{N}_\psi$ bezeichnet haben.[1])

Die allgemeinen Integrale der Gleichungen (9) und (10) lassen sich leicht angeben.[2]) Es ist unter den Anfangsbedingungen $\psi_1 = 0$, $\dot{\psi}_1 = 0$

$$\psi_1 = \int_0^t \frac{\mathfrak{N}_\psi(\tau)}{Cr_0} \sin \frac{Cr_0}{A} (t - \tau)\, d\tau$$

$$+ \int_0^t \left(\int_0^\tau \frac{\mathfrak{N}_\vartheta}{A}\, d\tau \right) \sin \frac{Cr_0}{A} (t - \tau)\, d\tau.$$

In dieser Formel wollen wir den zweiten Term durch partielle Integration umformen. Dadurch erhalten wir

---

1) Vgl. wegen dieser Überlegungen z. B. F. Klein und A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels* 4, Leipzig 1910, S. 761 ff.

2) Vgl. H. Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen d. math. Phys.* 1, 5. Aufl., Braunschweig 1910, S. 155.

$$\psi_1 = \frac{1}{Cr_0}\int_0^t \mathfrak{N}_\psi \sin\frac{Cr_0}{A}(t-\tau)\,d\tau - \frac{1}{Cr_0}\int_0^t \mathfrak{N}_\vartheta \cos\frac{Cr_0}{A}(t-\tau)\,d\tau$$
$$+ \frac{1}{Cr_0}\int_0^t \mathfrak{N}_\vartheta(\tau)\,d\tau, \tag{15}$$

und ebenso wird

$$\vartheta_1 = \frac{1}{Cr_0}\int_0^t \mathfrak{N}_\vartheta \sin\frac{Cr_0}{A}(t-\tau)\,d\tau + \frac{1}{Cr_0}\int_0^t \mathfrak{N}_\psi \cos\frac{Cr_0}{A}(t-\tau)\,d\tau$$
$$- \frac{1}{Cr_0}\int_0^t \mathfrak{N}_\psi(\tau)\,d\tau. \tag{16}$$

Die in den Gleichungen (6) und (7) auftretenden sogenannten *gyroskopischen* Terme $-Cr_0\dot{\vartheta}_1$ resp. $+Cr_0\dot{\psi}_1$ sind das Charakteristische der Stabilierungswirkung, da sie den Anlaß zu Schwingungen um die ungestörte Bewegung geben, und die überall in den Nennern von (15) und (16) stehende Größe Cr_0 verursacht, daß die Störung bei großem Eigenimpuls klein wird.

Diese Stabilierungswirkung wird verwendet im Geradlaufapparat der Torpedos, indem derselbe bei Ablenkungen des Geschosses entweder die betreffenden Steuer betätigt oder durch den Druck auf seine Lagerung die Ablenkung selbst verhindert.[1])

Sodann hat man auf einigen Schiffen bereits den Schlickschen Schiffskreisel[2]) eingebaut, der die Rollbewegungen des Schiffes, das sind Schwingungen um die horizontale Längsachse, verhindern soll.

Ferner benutzt man bei der Einschienenbahn[3]) die Kreiselwirkung zur Stabilierung des Fahrzeuges.

Schließlich möge noch die Stabilierung von Langgeschossen durch den Drall des Geschosses erwähnt werden, doch gehören die hierbei auftretenden Erscheinungen, da die Drehmomente durch den dauernd wirkenden Luftwiderstand hervorgerufen werden, nicht mehr in die hier behandelte Theorie des kräftefreien Kreisels und seiner Störungen, sondern in die Theorie des Kreisels unter Einwirkung äußerer Kräfte.

---

1) F. Klein und A. Sommerfeld, l. c. S. 782.
2) Ebenda S. 794. 3) Ebenda S. 900.

36. Nicht-holonome Bedingungsgleichungen. Die Beschränkungen der Bewegungsfreiheit, die wir bis jetzt betrachtet haben, waren immer endliche Gleichungen zwischen den Koordinaten von der Form

$$\varphi_\mu(x_1, y_1, \ldots, z_n) = 0, \tag{1}$$

aus denen durch Variation

$$\delta\varphi_\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i}\,\delta x_i + \cdots = 0 \tag{2}$$

als Bedingung für die virtuellen Verschiebungen folgte.

Enthielt φ_μ die Zeit t explizite, so war für eine virtuelle Verschiebung die Zeit nicht mit zu variieren, es lautete also die Bedingung einer virtuellen Verschiebung

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i}\,\delta x_i + \cdots = \delta\varphi_\mu - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t}\,\delta t = 0. \tag{3}$$

Wendet man das Hamiltonsche Prinzip an, so ist (3) mit (2) identisch, da bei diesem Prinzip die Zeit nicht mit variiert wird, dagegen ist bei Anwendung des Maupertuisschen Prinzips schon hier ein Unterschied zwischen (3) und (2).

Nun gibt es aber auch Bedingungsgleichungen, die sich nicht in endlicher Form schreiben lassen, die also nur Bedingungen zwischen den Koordinatenänderungen darstellen. Ihre Form ist die folgende

$$\sum_{\nu=1}^{n} \xi_{\varkappa\nu}\,dx_\nu + \eta_{\varkappa\nu}\,dy_\nu + \zeta_{\varkappa\nu}\,dz_\nu = 0; \tag{4}$$

diese entspricht der nichtintegrablen Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \xi_{\varkappa\nu}\,\dot{x}_\nu + \eta_{\varkappa\nu}\,\dot{y}_\nu + \zeta_{\varkappa\nu}\,\dot{z}_\nu = 0. \tag{4'}$$

Solche Gleichungen heißen nach Hertz[1]) nichtholonome Bedingungsgleichungen, während Gleichungen vom Typus (1) oder (2) als holonome Bedingungsgleichungen bezeichnet werden.

Im allgemeinsten Falle werden die Bedingungsgleichungen teils holonom, teils nichtholonom sein.

---

1) H. Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik*, Leipzig 1894, S. 91, Art. 123.

Durch Einführung allgemeiner Koordinaten q_ϱ nehmen die Gleichungen (4) die Form an

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \omega_{\varkappa\varrho}\, dq_\varrho = 0. \tag{5}$$

Hertz[1]) glaubte nun, daß das Hamiltonsche und das Maupertuissche Prinzip zwar für holonome, nicht aber aber für nichtholonome Systeme die richtigen Bewegungen liefere.

Zu dieser irrtümlichen Überzeugung kam er durch Betrachtung eines einfachen speziellen Beispiels, nämlich des Falles, daß eine Kugel gezwungen ist, auf einer horizontalen Ebene zu rollen ohne zu gleiten (die Bedingung des Rollens ohne zu gleiten ist eine nichtholonome Bedingung) durch folgende Abzählung.

In Wirklichkeit sind von einer gegebenen Anfangslage der Kugel aus ∞^2 Bahnen möglich entsprechend den ∞^2 Anfangsrichtungen der Drehachse. Da aber jede Bahn eine einfache Mannigfaltigkeit von Lagen darstellt, so sind von einer gegebenen Anfangslage aus ∞^3 Lagen durch die natürliche Bewegung zu erreichen.

Andrerseits ist die Gesamtheit aller Lagen der Kugel auf der Ebene eine vierfache Mannigfaltigkeit, denn die Lage des Mittelpunktes ist eine zweifache Mannigfaltigkeit, und dasselbe gilt von der Orientierung der Kugel relativ zum festgehaltenen Zentrum.

Da nun, rein kinematisch beurteilt, jede Endlage von einer gegebenen Anfangslage aus durch Rollen ohne Gleiten erreicht werden kann, und zwar auf mannigfache Weise, so muß es eine Bahn geben, auf der dies in kürzester Zeit stattfindet. Das aber ist für kräftefreie Bewegungen die Forderung des Hamiltonschen Prinzips. Nach diesem müßten demnach, so meint Hertz, ∞^4 Endlagen zu erreichen sein. Hier sei also ein Widerspruch.

Diesen geklärt zu haben, ist das Verdienst von Hölder[2]). Er zeigt, daß das Hamiltonsche und Maupertuissche Prinzip dem d'Alembertschen genau äquivalent sind unter der Voraussetzung, daß die Verrückungen, welche eine Lage der wirklichen Bahn in die entsprechende der variierten Bahn überführen, virtuelle sind.

Bei nichtholonomen Bedingungsgleichungen wird die variierte Bahn im allgemeinen aber nicht mit den Bedingungsgleichungen verträglich sein. Wir haben es also bei den genannten Prinzipien nicht mit einem Minimumsproblem, sondern mit einem Variationen

---

1) H. Hertz, l. c. Einleitung S. 22.
2) O. Hölder, *Gött. Nachr.* 1896, S. 122.

enthaltenden Integral zu tun, welches Null gesetzt wird. Nur dann sind die Integralprinzipien in Übereinstimmung mit dem d'Alembertschen Prinzip. Hertz dagegen hat die kürzeste Bahn unter allen denen gesucht, die durch reines Rollen in die Endlage führen, hat also fälschlich vorausgesetzt, daß auch die variierte Bahn der Zwangsbedingung genügt.

Betrachten wir mit Hölder als Beispiel einen einzigen Massenpunkt, der der Bedingungsgleichung

$$\xi(xyz)\,dx + \eta(xyz)\,dy + \zeta(xyz)\,dz = 0 \tag{6}$$

zu genügen hat. Soll (6) integrabel sein, so muß eine Funktion Ω existieren, mit der (6) multipliziert, ein vollständiges Differential ist, also

$$\frac{\partial(\Omega\eta)}{\partial z} = \frac{\partial(\Omega\zeta)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\Omega\zeta)}{\partial x} = \frac{\partial(\Omega\xi)}{\partial z}, \quad \frac{\partial(\Omega\xi)}{\partial y} = \frac{\partial(\Omega\eta)}{\partial x}$$

oder

$$\Omega\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) = \zeta\frac{\partial\Omega}{\partial y} - \eta\frac{\partial\Omega}{\partial z}$$

$$\Omega\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) = \xi\frac{\partial\Omega}{\partial z} - \zeta\frac{\partial\Omega}{\partial x}$$

$$\Omega\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = \eta\frac{\partial\Omega}{\partial x} - \xi\frac{\partial\Omega}{\partial y}.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit ξ, η, ζ und addiert, so erhält man

$$\xi\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + \eta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) + \zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = 0 \tag{7}$$

als Integrabilitätsbedingung.

Die richtige Variation verlangt, daß

$$\xi\,\delta x + \eta\,\delta y + \zeta\,\delta z = 0 \tag{6'}$$

für die Lagenvariationen erfüllt ist, und zwar für alle Punkte der Bahn, also muß auch gelten

$$d(\xi\,\delta x) + d(\eta\,\delta y) + d(\zeta\,\delta z) = 0. \tag{8}$$

Bilden wir dagegen für zwei entsprechende Bahnelemente der wirklichen und der variierten Bahn die Gleichung (6) und subtrahieren dieselben voneinander, so folgt[1])

$$\delta(\xi\,dx) + \delta(\eta\,dy) + \delta(\zeta\,dz) = 0. \tag{9}$$

---

1) Hertz hat angenommen, daß (6) für die wirkliche und für die variierte Bahn gilt.

Wären (8) und (9) gleichzeitig erfüllt, so müßte auch ihre Differenz

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)(\delta y\, dz - dy\, \delta z) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)(\delta z\, dx - dz\, \delta x)$$
$$+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)(\delta x\, dy - dx\, \delta y) = 0 \qquad (10)$$

gelten.

Aus (6) und (6′) folgt aber

$$\delta y\, dz - \delta z\, dy : \delta z\, dx - \delta x\, dz : \delta x\, dy - \delta y\, dx = \xi : \eta : \zeta. \qquad (11)$$

(10) und (11) sind nur miteinander verträglich, wenn entweder die Integrabilitätsbedingung (7) gilt oder wenn

$$\delta x : \delta y : \delta z = dx : dy : dz, \qquad (12)$$

d. h. wenn die Bahn in sich selbst variiert wird.

Da aber (7) und (12) nur ganz bestimmte Annahmen über die Bedingungsgleichungen resp. die Art der Variation sind, so folgt, daß tatsächlich beide Arten der Variation nicht mit einander verträglich sind, daß also die Gleichung (9) bei nichtholonomen Bedingungen falsch ist.

Hölder leitet (l. c.) die Bewegungsgleichungen für eine auf horizontaler Ebene kräftefrei rollende Kugel vom Radius a ab. Die Bedingungsgleichungen, bezogen auf ein fest mit der Kugel verbundenes Koordinatensystem xyz, lauten, wie geometrisch sofort evident ist,

$$\begin{aligned} u &= a(\gamma_3 q - \gamma_2 r) \\ v &= a(\gamma_1 r - \gamma_3 p) \\ w &= a(\gamma_2 p - \gamma_1 q). \end{aligned} \qquad (13)$$

Hier haben u, v, w, p, q, r dieselbe Bedeutung wie in Nr. **26**, und die im Raume feste ζ-Achse (vgl. Nr. **24**) hat die Richtung der Normalen auf der Ebene.

Man darf also auf Grund des Vorigen bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen mit Hülfe des Hamiltonschen Prinzips in den Ausdruck der lebendigen Kraft T nicht die Gleichungen (13) vor dem Variieren einführen, weil das bedeuten würde, daß auch auf der variierten Bahn ein reines Rollen stattfindet.

Voß[1]) zeigt die Äquivalenz der Integralprinzipien mit dem d'Alembertschen Prinzip auch in dem Falle, wo die Bedingungsgleichungen auch die Zeit explizit enthalten.

1) A. Voß, *Gött. Nachr.* 1900, S. 322.

Kapitel IV.

Gravitation.

37. Der freie Fall und der Wurf. Die einfachsten Gravitationserscheinungen treten uns bei den von Galilei studierten Bewegungen entgegen, welche wir bei allen in der Nähe der Erdoberfläche sich selbst überlassenen Körpern beobachten, beim sogenannten *freien Fall.*

Wie Galilei gefunden hat, bewegt sich ein fallender Körper mit konstanter Beschleunigung g, deren Richtung vertikal nach unten weist.

Die Kraft, die nach Newton ja als Produkt aus Masse und Beschleunigung definiert ist, ist also beim Wirken der Schwerkraft der Erde mg, d. h. der Masse des bewegten Körpers selbst proportional.

Legen wir die x- und y-Ache eines rechtwinkligen Koordinatensystems horizontal, die z-Achse vertikal nach oben, so lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -mg. \end{aligned} \tag{1}$$

Durch Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= a_1 + b_1 t \\ y &= a_2 + b_2 t \\ z &= a_3 + b_3 t - \frac{g}{2}t^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Integrationskonstanten bestimmen sich durch Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit. Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems können wir bewirken, daß für $t = 0$ $x = y = z = 0$ ist; dann wird in (2) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Ferner möge die anfängliche Geschwindigkeit in der xz Ebene liegen, also $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = b_2 = 0$ sein. Dann bleibt nach (2) dauernd $y = 0$.

Ist speziell $b_1 = 0$, so ist keine horizontale Geschwindigkeitskomponente vorhanden, und wir haben es mit dem freien Fall resp. senkrechten Wurf zu tun.

Ist die Anfangsgeschwindigkeit Null (freier Fall), so ist $b_3 = 0$, also

$$v = \frac{dz}{dt} = -gt, \tag{3}$$

und

$$z = -\frac{g}{2}t^2. \tag{4}$$

Die Fallgeschwindigkeit ist der Fallzeit, der zurückgelegte Weg dem Quadrat der Zeit proportional.

Aus (3) und (4) ergibt sich

$$|z| = +\frac{v^2}{2g} \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2g|z|} \tag{5}$$

(5) ist der Ausdruck des Energieprinzips, denn da die Kraft mg ist, so ist die potentielle Energie $V = mgz$, also muß

$$T + V = \frac{m}{2}v^2 + mgz = \text{konst.} \tag{5a}$$

sein. Da aber für $t = 0$ $v = 0$ und $z = 0$ ist, so ist die Konstante Null, und (5a) ist mit (5) identisch.

Ist $b_3 > 0$, so haben wir den senkrechten Wurf mit der Anfangsgeschwindigkeit $b_3 = v_0$ nach oben.

Dann folgt aus (2), wenn wir wieder $a_3 = 0$ setzen,

$$z = v_0 t - \frac{g}{2}t^2 \tag{6}$$

als Wurfhöhe zur Zeit t.

Die Geschwindigkeit

$$\frac{dz}{dt} = v_0 - gt \tag{7}$$

ist anfänglich nach oben gerichtet, wird immer kleiner, bis sie zur Zeit

$$t_1 = \frac{v_0}{g} \tag{8}$$

Null wird. Dann hat die Wurfhöhe ihren größten Wert erreicht, der nach (6) und (8)

$$z_1 = \frac{v_0^2}{2g} \tag{9}$$

ist.

Die Konstante in der Gleichung (5a) wird jetzt $\frac{m}{2}v_0^2$, so daß die Gleichung

$$v^2 - 2gz = v_0^2 \tag{10}$$

gilt.

Hat z beim Herunterfallen wieder denselben Wert wie beim Aufsteigen, so hat also auch $|v|$ denselben Wert, nur das Zeichen von v ist entgegengesetzt, da nach (7) v dauernd abnimmt.

Ist z wieder Null geworden, so ist also $v = -v_0$.

Der *schiefe Wurf* wird durch

$$\begin{aligned} x &= a_1 + b_1 t \\ z &= a_3 + b_3 t - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned} \tag{11}$$

dargestellt. Er erfolgt also in einer Vertikalebene.

Wir dürfen $a_1 = a_3 = 0$ setzen, indem wir den Anfangspunkt der Zeit in den Moment verlegen, in welchem der Körper vom Koordinatenursprung aus fortgeschleudert wird, und erhalten als Bahn, indem wir aus den beiden Gleichungen (11) t eliminieren,

$$z = \frac{b_3}{b_1} x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{b_1^2}. \tag{12}$$

Die Wurfbahn ist also eine Parabel mit vertikaler Achse.

Führen wir die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und den Elevationswinkel oder Abgangswinkel α ein, so lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha \cdot t \\ z &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned} \tag{11'}$$

$$z = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \tag{12'}$$

Aus (12) resp. (12′) folgt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b_3}{b_1} - g \frac{x}{b_1^2} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x. \tag{13}$$

Der Scheitel der Parabel wird erreicht für $\frac{dz}{dx} = 0$, also nach (13) für

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}. \tag{14}$$

Dort ist

$$z_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \tag{15}$$

Das ist die maximale Wurfhöhe.

Nach (12′) ist $z = 0$ erstens für $x = 0$ und zweitens für

$$x = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{g}. \tag{16}$$

Das ist die Wurfweite.

Die Flugzeit ergibt sich aus der zweiten Gleichung (11′), indem man in derselben $z = 0$ setzt, zu

$$t = \frac{2 v_0}{g} \sin \alpha \,. \tag{17}$$

Löst man (12′) nach tg α auf, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{g x} \pm \frac{1}{x} \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 - \frac{2 v_0^2 z}{g} - x^2} \tag{18}$$

als derjenige Abgangswinkel, welcher notwendig ist, damit bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 ein bestimmter Zielpunkt mit den Koordinaten x, z getroffen wird.

Aus dem doppelten Vorzeichen kann man schließen, daß für ein und dasselbe Ziel zwei Abgangswinkel möglich sind (Flachschuß und Bogenschuß), falls der Radikand positiv ist.

Diejenigen Zielpunkte, für die die Quadratwurzel imaginär wird, lassen sich überhaupt nicht mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 von dem gegebenen Orte aus treffen.

Bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist die Wurfweite $\frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha$ ein Maximum für den Elevationswinkel $\alpha = 45^0$. Die Wurfhöhe ist dann $\frac{v_0^2}{4g}$.

Die wahren Verhältnisse sind von den hier beschriebenen abweichend, da die Luftreibung nicht mit berücksichtigt ist.

Ballistik.

38. Der Luftwiderstand. Newton stellte das Gesetz auf, daß der Widerstand, den ein durch eine Flüssigkeit oder ein Gas bewegter Körper erleidet, dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist.

Die theoretische Ableitung dieses Gesetzes mit Berücksichtigung aller Reibungserscheinungen, der Luftwirbel, der Verdünnungs- und Verdichtungswellen usw. ist ein Problem der Hydrodynamik, das zu lösen unsere analytischen Hilfsmittel bisher nicht annähernd ausreichen. Deshalb ist man in der Ballistik darauf angewiesen, eine mehr oder weniger gültige empirische Formel zu benutzen.

Für größere Exaktheit hat man den ganzen Geschwindigkeitsbereich in verschiedene Abteilungen, sogenannte „Zonen", zerlegt und für jede ein besonderes Gesetz aufgestellt[1]). Diese Zonenge-

1) Vgl. z. B. C. Cranz, *Compendium der theoretischen äußeren Ballistik*, Leipzig 1896, S. 48—54; *Math. Enc.* **4**, Nr. 18, S. 195, Leipzig 1903.

setze sind von Siacci[1]) in eine einzige Formel zusammengefaßt worden.

Genügt eine geringere Genauigkeit, so kommt man, wie Kruppsche Versuche[2]) zeigen, mit dem quadratischen Gesetz von Newton aus, nach dem bereits Euler[3]) in seinen ballistischen Untersuchungen rechnete.

Demnach können wir die Widerstandskraft

$$W = a R^2 \pi \frac{\delta}{1{,}206} v^2 \qquad (1)$$

setzen, wo v die Geschwindigkeit in m/sec, δ das Gewicht von 1 kg Luft ($\delta_0 = 1{,}206$ ist das Gewicht von 1 kg Luft bei 15°, 750 mm Druck und 50 % Luftfeuchtigkeit), $2R$ das Kaliber (größter Querschnittsdurchmesser) des Geschosses in m bedeutet und W, wie in der Ballistik üblich, in kg-Gew. zu messen ist.

a ist ein Zahlenfaktor, der beim Kruppschen Normalgeschoß (Spitzenhöhe gleich 1,3 Kaliber) für $v < 300 \frac{m}{\mathrm{sec}}$ den Wert 0,014, für $v > 400 \frac{m}{\mathrm{sec}}$ den Wert 0,039 hat. Die Zahl a ist deshalb für die verschiedenen Geschwindigkeitsbereiche verschieden, weil W in Wirklichkeit nicht v^2 proportional ist, sondern einer Funktion $f(v)$ und $f(v)/v^2$ sich durch eine Kurve von der Form der Fig. 23 darstellen läßt. Wir sehen, daß bis zu Geschwindigkeiten von $v = 300\ m/\mathrm{sec}$ $f(v)/v^2$ konstant ist, also das quadratische Gesetz gilt. Dann kommt ein Bereich starker Abhängigkeit des Faktors $f(v)/v^2$ von der Geschwindigkeit in der Nähe der Schallgeschwindigkeit 340 m/sec, deren Grund nach Mach[4]) Verdichtungs- und Verdünnungswellen der Luft vor resp. hinter dem Geschoß sind, die sich mit Schallgeschwindigkeit fortpflanzen. Für große Geschwindigkeiten kann mit grober Annäherung wieder $\frac{f(v)}{v^2}$ konstant angenommen werden.

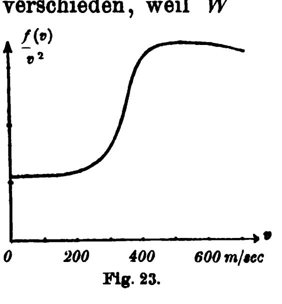


Fig. 23.

---

1) F. Siacci, *Riv. d'art. e gen. 1896*, **1**, S. 5, 195, 341; *Archiv für Art. u. Ingenieuroffiziere des deutschen Reichs* **103**, 1896, S. 5, 195, 341,

2) Krupp, *Arch. f. Art. u. Ingenieuroffiziere des deutschen Reichs* **9**. 1889, p. 193.

3) L. Euler, *Berl. Ber.* **9**, 1755, p. 321.

4) E. Mach und P. Salcher, *Wien. Ber.* **95** II, 1887, S. 746; ibid. **97** II, 1889, S. 41; *Wied. Ann.* **32**, 1887, S. 277.

Beachtenswert ist ein Versuch von Sommerfeld[1]) den in der Kurve Fig. 23 dargestellten Verlauf der Funktion $f(v)/v^2$, wenn auch nicht theoretisch zu erklären, so doch plausibel zu machen, indem er den Widerstand eines mit Unterlichtgeschwindigkeit und mit Überlichtgeschwindigkeit bewegten kugelförmigen Elektrons als Analogon heranzieht.

Im allgemeinen wird das Luftwiderstandsgesetz heutzutage experimentell dadurch ermittelt, daß an zwei nicht zu weit auseinanderliegenden Punkten im Abstande l voneinander, zwischen denen die Flugbahn als geradlinig aufgefaßt werden darf, die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 gemessen und W nach dem Energieprinzip durch die Formel

$$\frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2) = W \cdot l \tag{2}$$

für eine mittlere Geschwindigkeit $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ berechnet wird.

39. Die Bewegungsgleichungen. Setzen wir nach Nr. 38 (1)

$$W = mcv^2, \tag{1}$$

so bedeutet cv^2 die Verzögerung infolge des Luftwiderstandes, und es gelten die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -cv^2 \cos\varphi \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -g - cv^2 \sin\varphi, \end{aligned} \tag{2}$$

unter φ den Winkel verstanden, den die Flugbahn mit der horizontalen x-Achse bildet, während die y-Achse vertikal nach oben gerichtet ist.

Diese Gleichungen sind zu integrieren unter den Anfangsbedingungen

$$\text{für } t = 0: \quad x = 0;\ y = 0;\ \varphi = \alpha;\ v = v_0, \tag{3}$$

wo α der Abgangswinkel ist, der infolge der Laufvibrationen nicht genau mit dem Winkel der Seelenachse zusammenfällt.[2])

Aus (2) folgt, daß bei vertikal nach unten stattfindender Bewegung die Geschwindigkeit schließlich gleichförmig wird und dem absoluten Wert nach

---

1) F. Klein und A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels* 4, Leipzig 1910, S. 925.

2) C. Cranz und K. R. Koch, *Abh. der bayr. Ak. der Wiss.* 19, 1899, S. 745.

$$v_\infty = \sqrt{\frac{g}{c}} \tag{6}$$

beträgt; dies tritt ein, wenn die Widerstandskraft gerade gleich dem Gewicht des Geschosses ist.

40. Der vertikale Wurf und der freie Fall. Ist $\varphi = \pi/2$, so wird nach Nr. 39 (2)

$$\frac{dv}{dt} = -c(v_\infty^2 + v^2). \tag{1}$$

Einmalige Integration ergibt

$$v = -v_\infty \frac{v_\infty \sin\frac{g}{v_\infty}t - v_0 \cos\frac{g}{v_\infty}t}{v_\infty \cos\frac{g}{v_\infty}t + v_0 \sin\frac{g}{v_\infty}t} \tag{2}$$

und nochmalige Integration

$$y = \frac{v_\infty^2}{g} \lg\left(\frac{v_0}{v_\infty}\sin\frac{g}{v_\infty}t + \cos\frac{g}{v_\infty}t\right). \tag{3}$$

Die Geschwindigkeit wird Null zur Zeit T, die aus

$$\operatorname{tg}\frac{gT}{v_\infty} = \frac{v_0}{v_\infty} \tag{4}$$

folgt.

Daraus berechnet sich die Steighöhe aus (3) zu

$$y_{\max} = \frac{v_\infty^2}{2g} \lg\frac{v_0^2 + v_\infty^2}{v_\infty^2}. \tag{5}$$

Beim freien Fall ist $\varphi = -\pi/2$ zu setzen, also nach Nr. 39 (2)

$$\frac{dv}{dt} = -c(v_\infty^2 - v^2), \tag{6}$$

somit

$$v = -v_\infty \operatorname{tgh}\frac{gt}{v_\infty} \tag{7}$$

und

$$y = -\frac{v_\infty^2}{g} \log\cosh\frac{gt}{v_\infty} \tag{8}$$

oder, durch die Geschwindigkeit ausgedrückt,

$$y = -\frac{v_\infty^2}{2g} \lg\frac{v_\infty^2}{v_\infty^2 - v^2}. \tag{9}$$

Wirft man einen Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vertikal nach oben, so kommt er mit der Geschwindigkeit v in die

Anfangslage zurück, die sich ergibt, wenn wir (5) und (9) bis aufs Vorzeichen einander gleich setzen, und zwar wird dann

$$v^2 = v_0^2 \frac{v_\infty^2}{v_0^2 + v_\infty^2}. \tag{10}$$

41. Die ballistische Kurve. Nach den Gleichungen Nr. 39 (2) ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -c\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -g - c\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}. \end{aligned} \tag{1}$$

Dividiert man die erste Gleichung (1) durch $\frac{dx}{dt}$, so ergibt sich durch einmalige Integration

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha e^{-cs}. \tag{2}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{dy}{dx} = p, \tag{3}$$

so ist

$$\frac{dy}{dt} = p\frac{dx}{dt}, \tag{4}$$

und es wird nach der zweiten Gleichung (1) mit Berücksichtigung der ersten

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + g = 0 \tag{5}$$

oder wegen (2)

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}e^{2cs}, \tag{6}$$

woraus, da $ds = dx\sqrt{1+p^2}$ ist,

$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}e^{2cs}ds \tag{7}$$

und durch Integration

$$\Phi(p) = C_1 - \frac{ge^{2cs}}{cv_0^2\cos^2\alpha} \tag{8}$$

folgt, unter $\Phi(p)$ die Funktion

$$\Phi(p) = p\sqrt{1+p^2} + \lg\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) \tag{9}$$

und unter C_1 die Konstante

$$C_1 = \Phi(\operatorname{tg}\alpha) + \frac{g}{cv_0^2\cos^2\alpha} \tag{10}$$

verstanden.

Die Tangente p des Neigungswinkels drückt sich also nach (8) durch die Länge der Flugbahn aus.

Nach (6) und (8) ergibt sich weiter

$$c\,dx = \frac{dp}{\Phi(p) - C_1};$$

ebenso wegen (3)

$$c\,dy = \frac{p\,dp}{\Phi(p) - C_1} \tag{11}$$

und nach (5)

$$\sqrt{g}\,c\,dt = -\frac{dp}{\sqrt{C_1 - \Phi(p)}},$$

und zwar ist das Vorzeichen der Quadratwurzel in der letzten Gleichung positiv, da p mit t abnimmt.

Weiter erhält man noch

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (1 + p^2)$$

oder nach (5) und der letzten Gleichung (11)

$$v^2 = \frac{g}{c}\,\frac{(1 + p^2)}{C_1 - \Phi(p)}. \tag{12}$$

Die Funktion $\Phi(p)$ ist von Euler tabelliert worden, und er hat, da die Integrationen in (11) sich nicht ausführen lassen, die Geschoßbahnen näherungsweise dadurch berechnet, daß er die Differentiale dx, dy, dt, dp in (11) durch kleine, aber endliche Differenzen ersetzte, d. h. er hat die Kurve näherungsweise durch einen Polygonzug dargestellt.

Die Koordinaten x_1, y_1 des Scheitels der Flugbahn sind nach (11), da dort $p = 0$ ist,

$$c x_1 = \int_0^{\operatorname{tg}\alpha} \frac{dp}{C_1 - \Phi(p)}; \quad c y_1 = \int_0^{\operatorname{tg}\alpha} \frac{p\,dp}{C_1 - \Phi(p)}. \tag{13}$$

Die kleinste Geschwindigkeit liegt, vom Schützen aus gerechnet, jenseits des Scheitels, im Gegensatz zur Parabelbewegung im luftleeren Raume, wo sie im Scheitel liegen würde, denn es ist

$$\frac{dv^2}{dt} = 2\left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt}\right).$$

Da aber im Scheitel $v_y = 0$ und $\frac{dv_x}{dt}$ nach (1) dauernd negativ ist, so nimmt v^2 im Scheitel noch ab.

Die Abszisse x' der Asymptote des absteigenden Astes der Flugbahn berechnet sich folgendermaßen. Für den unendlich fernen Kurvenpunkt wird $p = -\infty$, also

$$cx' = \int_{\operatorname{tg}\alpha}^{0} \frac{dp}{\Phi(p) - C_1} + \int_{0}^{-\infty} \frac{dp}{\Phi(p) - C_1}$$

oder nach (13)

$$c(x' - x_1) = -\int_{0}^{\infty} \frac{dp'}{\Psi(p') + C_1}, \tag{14}$$

wenn $p' = -p$ substituiert und

$$\Psi(p') = p'\sqrt{1 + p'^2} - \lg\left(-p' + \sqrt{1 + p'^2}\right) \tag{15}$$

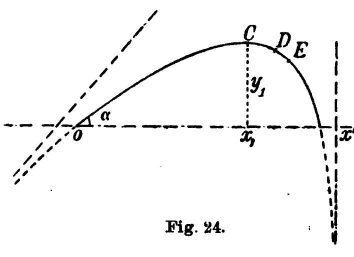


Fig. 24.

gesetzt ist.

Ferner läßt sich zeigen, daß der rückwärts verlängerte aufsteigende Ast auch eine Asymptote besitzt (Fig. 24), und daß der Punkt stärkster Bahnkrümmung D zwischen dem Scheitel C und der Stelle kleinster Geschwindigkeit E liegt.

42. Flache Schußbahnen. Ist p so klein, daß p^2 gegen 1 vernachlässigt werden darf, so wird $\sqrt{1 + p^2} = 1$, also $ds = dx$ und $s = x$, und Nr. 41 (6) ergibt

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -g \frac{e^{2cx}}{v_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{1}$$

Durch einmalige Integration folgt

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha} \cdot \frac{e^{2cx} - 1}{2cx}, \tag{2}$$

und durch nochmalige Integration ergibt sich die Gleichung der Flugbahn

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \cdot \Omega(2xc), \tag{3}$$

wo

$$\Omega(z) = 2\frac{e^z - z - 1}{z^2} \tag{4}$$

ist. Im luftleeren Raume ($c = 0$) wird $\Omega(2xc) = 1$, und aus (3) wird die Parabel Nr. 37 (12').

Über Geschoßabweichungen infolge der Erdrotation siehe unten Kapitel V.

43. Die schiefe Ebene. Tatsächlich sind die Bewegungen, die infolge der Anziehungskraft der Erde an der Erdoberfläche hervorgerufen werden, von Galilei durch den Fall auf der schiefen Ebene studiert worden, da dabei die Bewegungen langsamer vor sich gehen und infolgedessen der Beobachtung zugänglicher sind.

Wir betrachten einen Massenpunkt, der gezwungen ist, auf einer festen Ebene zu bleiben, welche gegen die Horizontale um den Winkel α geneigt ist (Fig. 25).

Fig. 25.

Diese Ebene hat die Gleichung

$$z - x \operatorname{tg} \alpha = 0. \qquad (1)$$

Also gilt die Bedingung zwischen den virtuellen Verrückungen

$$\delta z - \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta x = 0. \qquad (2)$$

Ferner ist nach dem d'Alembertschen Prinzip Nr. 15 (2)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + m \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \left(m \frac{d^2 z}{dt^2} + mg\right) \delta z = 0. \qquad (3)$$

Multipliziert man (2) mit λ und addiert es dann zu (3), so folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{\lambda \operatorname{tg} \alpha}{m} &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + g + \frac{\lambda}{m} &= 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Die drei Gleichungen (4) und die Gleichung (1) genügen zur Bestimmung von x, y, z, λ.

Multiplizieren wir die erste Gleichung (4) mit $\cos \alpha$ und die letzte mit $\sin \alpha$ und addieren die beiden, so ergibt sich

$$\frac{d^2}{dt^2}(x \cos \alpha + z \sin \alpha) + g \sin \alpha = 0, \qquad (5)$$

wo $d(x \cos \alpha + z \sin \alpha) = ds$ die Projektion des Wegelements auf die xz-Ebene ist.

Außer (5) gilt noch

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \qquad (6)$$

und nach (1)

$$\frac{d^2}{dt^2}(x \sin \alpha - z \cos \alpha) = 0.$$

Wir haben also genau dieselben Gleichungen, wie die Gleichungen (1) in Nr. 37, wenn wir dort x durch $x \sin \alpha - z \cos \alpha$, z durch $x \cos \alpha + z \sin \alpha$ und g durch $g \sin \alpha$ ersetzen.

Die Bewegung auf der schiefen Ebene findet also genau analog dem freien Fall statt, nur ist die Beschleunigung im Verhältnis $\sin \alpha : 1$ kleiner.

Um keinen Fehler durch die Reibung beim Gleiten des Körpers auf der schiefen Ebene zu erhalten, läßt man gewöhnlich einen zylindrischen Körper auf der schiefen Ebene rollen. Sei seine Masse M, sein Trägheitsmoment bezüglich der durch den Schwerpunkt gehenden, zur y-Achse parallelen Achse K, so ist, da wir es nur mit *einem* Freiheitsgrad zu tun haben, die Bewegung durch Anwendung des Energieprinzips bestimmt.

Ist die Drehgeschwindigkeit q, die Translationsgeschwindigkeit $\dot{s}$, so ist $\dot{s} = aq$, wenn a den Radius des rollenden Zylinders bezeichnet. Ferner ist die kinetische Energie T gegeben durch

$$2T = M\dot{s}^2 + Kq^2 = M\dot{s}^2 + \frac{K}{a^2}\dot{s}^2$$

und die potentielle Energie

$$V = Mgz,$$

und z und s sind durch die Beziehung $z = s \sin \alpha$ verbunden, so daß nach dem Energieprinzip

$$\frac{1}{2}\left(M + \frac{K}{a^2}\right)\dot{s}^2 + Mgs \sin \alpha = \text{Konst.} \tag{7}$$

wird.

Aus dieser Gleichung erhält man s als Funktion von t. Wir führen das Problem auf die Bewegungsgleichung des freien Falls zurück, indem wir (7) nach t differentiieren, und erhalten

$$\left(M + \frac{K}{a^2}\right)\ddot{s} = -Mg \sin \alpha. \tag{8}$$

Die Beschleunigung ist also

$$\frac{Mg}{M + \frac{K}{a^2}} \sin \alpha.$$

Um den Vorteil des Rollens, aber nicht die Komplikation zu haben, daß man das Trägheitsmoment kennen muß, verbindet man

mit einem sehr leichten Wagen gewöhnlich eine schwerere Masse, die sich bei der Bewegung rein translatorisch verschiebt.

44. Die Atwoodsche Fallmaschine dient auch zum Studium der Fallgesetze.

Über eine Rolle ist ein Seil geführt; auf der einen Seite hängt die Masse m_1 daran, auf der anderen Seite die Masse m_2 (Fig. 26).

Die z-Achse sei vertikal nach oben gerichtet, dann besteht die Bedingungsgleichung

$$z_1 + z_2 = \text{konst.} \tag{1}$$

oder

$$\delta z_1 = -\delta z_2 . \tag{2}$$

Aus dem d'Alembertschen Prinzip folgt

$$\left(m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + m_1 g\right) \delta z_1 + \left(m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + m_2 g\right) \delta z_2 = 0 . \tag{3}$$

Ersetzen wir nach (1) $\frac{d^2 z_1}{dt^2}$ durch $-\frac{d^2 z_2}{dt^2}$ und nach (2) δz_1 durch $-\delta z_2$, so erhalten wir

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} = -\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g . \tag{4}$$

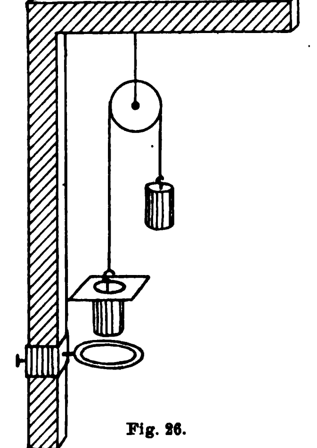


Fig. 26.

Als Beschleunigung wirkt also $\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$; diese Größe kann bequem in weiten Grenzen durch geeignete Wahl von m_1 und m_2 variiert werden.

Der Apparat ist so eingerichtet, daß die Masse $m_2 = m_1 + \mu$ gleich der Masse m_1 ist, nur beschwert durch ein blechförmiges daraufgelegtes Übergewicht μ. Dieses kann an einer beliebigen Stelle der Bahn durch einen am Gestell der Maschine verschiebbaren Ring abgehoben werden. Von diesem Moment an wirkt keine Beschleunigung mehr, die Bewegung geht dann, abgesehen von der Reibung, mit konstanter Geschwindigkeit vor sich.

Berücksichtigt man die Masse der Rolle vom Trägheitsmoment K bezüglich ihrer Drehachse und vom Radius a, so besteht die Beziehung $aq = \dot{z}_2$, wenn q die Drehgeschwindigkeit bedeutet, und aus dem Energieprinzip $\frac{m_1 + m_2}{2} \dot{z}_2^2 + \frac{K}{2a^2} \dot{z}_2^2 + (m_2 - m_1) g z_2 = \text{konst.}$ ersieht man, daß die Beschleunigung $g \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{K}{a^2}}$ ist.

45. Die Wage.[1]) Aus den Prinzipien der Statik läßt sich das Gleichgewicht der Wage berechnen. Die Masse Q_1 des Wagebalkens (Fig. 27) können wir uns im Schwerpunkte S vereinigt denken. Der Abstand des Schwerpunktes von der Mittelschneide sei s, der Abstand der Mittelschneide von jeder der beiden Endschneiden sei L, die Masse eines Gehänges mitsamt der Schale sei Q_2, die Belastung sei P, die sehr kleine Mehrbelastung auf der einen Seite p, und der Winkel, den die Verbindungslinie der Mittelschneide und einer Endschneide mit der Verbindungslinie der Mittelschneide mit dem Schwerpunkte des Balkens bildet, heiße α.

Fig. 27.

Dann ist Gleichgewicht, wenn das Gesamtdrehmoment verschwindet, d. h. wenn

$$(Q_2+P+p)L\sin(\alpha-\varphi) = (Q_2+P)L\sin(\alpha+\varphi) + Q_1 s\sin\varphi \quad (1)$$

ist.[2]) Hier bedeutet φ den Ablenkungswinkel aus der Gleichgewichtslage der unbelasteten Wage.

Daraus ergibt sich, da α genähert 90^0 ist, wenn wir noch $90^0 - \alpha = \varepsilon$ setzen, für kleine φ und ε

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{pL}{Q_1 s + 2(Q_2+P)L\sin\varepsilon}. \quad (2)$$

Die Empfindlichkeit der Wage $\operatorname{tg}\varphi/p$ ist demnach von der nutzbaren Belastung P abhängig, außer wenn $\varepsilon = 0$ ist, d. h. wenn die drei Schneiden in einer Ebene liegen.

1) Man beachte auch den Artikel in der Enc. d. math. Wiss. IV, 1 II, Leipzig 1904, p. 37 von Ph. Furtwängler, *Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen.*

2) Den allgemeineren Fall, daß die beiden Hebelarme, die beiden Schalengewichte und die beiden Winkel α rechts und links ungleich sind, behandelt M. Thiesen, *Ztschr. f. Instrumentenkunde* **2**, 1882, p. 358. In einer zweiten Abhandlung ibid. **3**, 1883, p. 81, berücksichtigt er auch die Nicht-Parallelität der Schneiden. Diese beeinflußt die Empfindlichkeit und läßt den Ausschlag nicht unabhängig sein von der Lage der Last auf der Schale. Durch die Konstruktion der Gehängearretierung, durch gute Beweglichkeit der Schale gegen das Gehänge und durch geeignete Wahl der Stelle, um welche die Bewegung stattfindet, läßt sich diesen Fehlerquellen abhelfen (Kreuzgehänge). Man beachte das Buch von W. Felgenträger, *Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage,* Leipzig u. Berlin 1907.

In diesem Falle ist die Empfindlichkeit e

$$e = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{p} = \frac{L}{Q_1 s}, \tag{3}$$

und diese scheint um so größer zu sein, je länger und leichter der Wagebalken ist, und je näher sein Schwerpunkt der Mittelschneide liegt.

Tatsächlich hat man deshalb auch früher den Wagen einen langen Hebelarm gegeben und denselben, um ihn leichter zu machen, ausgespart. Ferner befindet sich über oder unter der Mittelschneide eine mit Hilfe einer Schraube in vertikaler Richtung verschiebbare Masse, um den Abstand s des Schwerpunkts vom Drehpunkte variieren zu können.

Im allgemeinen wird man es garnicht erreichen können, daß alle drei Schneiden in einer Ebene liegen; deshalb ist (2) anzuwenden. Aus dieser Formel ergibt sich, daß bei ganz starr gedachten Wagebalken die Empfindlichkeit mit wachsender Belastung zunimmt, konstant bleibt oder abnimmt, je nachdem $\varepsilon \lesseqgtr 0$ ist, d. h. je nachdem die Endschneiden über der Mittelschneide, in gleicher Höhe mit derselben oder unter ihr liegen.

In Wirklichkeit sind aber die elastischen Deformationen des Wagebalkens unter dem Einflusse der Belastungen keineswegs zu vernachlässigen. Der Effekt einer solchen Deformation wird der sein, daß erstens der Schwerpunkt des Balkens weiter von der Mittelschneide wegrückt. Dadurch nimmt die Empfindlichkeit auf jeden Fall ab. Zweitens senken sich aber auch die Endschneiden, wodurch ε vergrößert wird. Das kann, wie man leicht einsieht, sowohl eine Vergrößerung wie eine Verkleinerung der Empfindlichkeit zur Folge haben, je nach dem Wert, den ε und die Belastung besitzen.[1])

Häufig justiert man die Wage so, daß das Maximum der Empfindlichkeit bei mittleren Belastungen eintritt.

Zur wirklichen Beurteilung der Empfindlichkeit einer Wage ist die Kenntnis der *dynamischen* Verhältnisse von Wichtigkeit.[2])

---

1) Eine genaue Diskussion des Einflusses der Belastung auf die Empfindlichkeit findet sich bei B. Weinstein, *Handbuch der physikalischen Maßbestimmungen* 2, Berlin 1888, p. 393.

2) Die Differentialgleichungen der Bewegung einer Wage, auch mit Berücksichtigung der Schwingungen der Schalen, finden sich bei B. Weinstein, *l. c.*, p. 372ff; ferner F. J. Stamkart, *Verhandel. Kon. Nederl. Inst.* (3) 1, 1849, p. 63.

Da bei der Bewegung der Wage die Schalen mit ihren Belastungen sich nicht mitdrehen, sondern immer vertikal nach unten hängen, so kann man sich die gesamte Masse der Schale mit Belastung $Q_2 + P$ in der Endschneide konzentriert denken, und es ist dann einfach die ganze Schwingungsdauer T durch die Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{D}}$$

gegeben. Dabei ist das Trägheitsmoment $K = J + 2(Q_2 + P)L^2$, wenn J das Trägheitsmoment des Balkens bezüglich der Mittelschneide bedeutet, und die Direktionskraft, d. h. das Drehmoment, welches die Wage beim Ablenkungswinkel 1 erfährt, ist nach (2)

$$D = g(Q_1 s + 2(Q_2 + P) L \sin \varepsilon),$$

so daß mit Benutzung von (2) und Einführung der Empfindlichkeit $e = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{p}$

$$\frac{T^2}{e} = 4\pi^2 \frac{J + 2(Q_2 + P)L^2}{gL} \tag{4}$$

wird.[1])

Nennen wir den Trägheitsradius des Balkens λ, d. h. setzen wir $Q_1 \lambda^2 = J$, so können wir $\lambda^2 = \vartheta L^2$ setzen, wo ϑ von der Balkenform abhängig sein wird, und wir erhalten

$$T^2 = \frac{4\pi^2 e}{g}[\vartheta Q_1 + 2(Q_2 + P)] L. \tag{5}$$

Mit Thiesen[2]) wollen wir $\frac{1}{2}\vartheta Q_1$ das reduzierte Gewicht des Balkens, P die nutzbare Last, $\frac{1}{2}\vartheta Q_1 + Q_2 = \Pi$ die tote Last, $\Pi + P$ das reduzierte Gesamtgewicht nennen; dann gilt

$$T^2 = \frac{8\pi^2}{g} e(\Pi + P)L. \tag{6}$$

Bei einem bestimmten Gesamtgewichte und gegebener Schwingungsdauer ist also die Empfindlichkeit umgekehrt proportional der Balkenlänge. Dazu kommt noch, daß man bei Verlängerung des Balkens aus Festigkeitsgründen die Massen desselben in stärkerem Maße vergrößern muß.

---

1) Der Zusammenhang von Schwingungsdauer und Empfindlichkeit ist experimentell untersucht worden von Weymann, *Abh. Normal-Eichungs-Komm.* 4, 1902, p. 137; W. Felgenträger, *ibid.*, p. 155.

2) M. Thiesen, *l. c.*, p. 362.

Deshalb ist man neuerdings bestrebt, im Gegensatz zu früher, recht kurzarmige Wagen herzustellen, um deren Einführung sich Bunge[1]) besonders verdient gemacht hat. Dabei verwendet man ein Material, das bei kleinem spezifischem Gewicht einen großen Elastizitätskoeffizienten besitzt, wie z. B. Magnalium.

Die Genauigkeit der Wägung[2]) ist proportional der Empfindlichkeit, also nach (6) proportional T^2, ferner nach den Gesetzen der Ausgleichsrechnung proportional der Wurzel aus der Anzahl Beobachtungen. Da die Anzahl Wägungen, die in einer bestimmten Zeit ausgeführt werden können, aber proportional $1/T$ ist, so ist die Genauigkeit proportional $T^{\frac{3}{2}}$ oder $e^{\frac{3}{4}}$, d. h. die Wage muß so empfindlich wie möglich gestellt werden.

46. Wägung. Um den Einfluß der Reibung zu vermeiden, und um nicht zu lange warten zu müssen, beobachtet man nicht die definitive Einstellung der Wage, sondern leitet dieselbe aus den Umkehrpunkten der Zunge auf der Skale ab. Allerdings werden jetzt auch Wagen konstruiert, bei denen infolge einer besonderen und leicht zu entfernenden Dämpfungsvorrichtung die endgültige Einstellung sehr schnell erfolgt.[3])

Wegen der Dämpfung der Schwingungen muß eine ungerade Zahl Umkehrpunkte b — etwa drei — beobachtet werden, aus denen sich nach der Formel

$$a_0 = \tfrac{1}{4}(b_1 + 2b_2 + b_3)$$

die Ruhelage ergibt, d. h. man hat das Mittel aus dem ersten und dritten Umkehrpunkt zu nehmen und dieses mit dem zweiten Umkehrpunkt wieder zum Mittel zu vereinigen.

So bestimmt man den Nullpunkt a_0' der Wage vor der Wägung. Dann belastet man die eine Wagschale soweit mit Gewichten p_1, daß diese fast vollkommen dem auf der anderen Schale liegenden zu wägenden Körper das Gleichgewicht halten, und bestimmt durch Schwingungsbeobachtungen wie oben die Ruhelage a_1. Zeigt es sich, daß p_1 eine zu $\left\{\begin{matrix}\text{geringe}\\ \text{große}\end{matrix}\right\}$ Belastung ist, so belastet man etwas $\left\{\begin{matrix}\text{mehr}\\ \text{weniger}\end{matrix}\right\}$ mit dem Gewichte p_2 und bestimmt wiederum die Ruhelage a_2. Schließlich entlastet man die Wage und wieder-

1) P. Bunge, *Repertorium f. Experimentalphysik (Carls Rep.)* 3, 1867, p. 269.

2) M. Thiesen, *l. c.*, p. 362.

3) Eine Konstruktion stammt von Crémieu, *Journ. de phys.* 6, 1907, S. 690; s. auch *Zeitschr. f. Instrumentenkunde* 28, 1908, S. 24.

holt die Nullpunktsbestimmung, die a_0'' ergeben möge. Nennt man $a_0 = \frac{a_0' + a_0''}{2}$ das Mittel aus den beiden Nullpunkten, so findet man die wahre Belastung p nach der Interpolationsformel

$$p = p_1 + (p_2 - p_1)\frac{a_0 - a_1}{a_2 - a_1}.$$

Den infolge der Ungleicharmigkeit der Wage auftretenden Fehler eliminiert man durch eine Doppelwägung, d. h. dadurch, daß man zuerst den Körper vom Gewichte Q auf die linke Wagschale legt und die Gewichtstücke auf die rechte, nachher aber umgekehrt. Sind die Längen der beiden Hebelarme L_1 resp. L_2, so gilt für die erste Wägung nach dem Satze von den statischen Momenten

$$QL_1 = PL_2. \tag{1}$$

Bei der zweiten Wägung, bei der das Gewicht $P + p$ auf der Schale liegt, ist

$$(P + p)L_1 = QL_2. \tag{2}$$

Division der beiden Gleichungen ergibt $P(P + p) = Q^2$ oder genähert

$$Q = P + \tfrac{1}{2}p. \tag{3}$$

Das wahre Gewicht ist also das Mittel aus den beiden Wägungsresultaten.

Das Längenverhältnis der Hebelarme erhält man durch Multiplikation der Gleichungen (1) und (2) miteinander. Es folgt $(P + p)L_1^2 = PL_2^2$ oder genähert

$$\frac{L_2}{L_1} = 1 + \frac{1}{2}\frac{p}{P}. \tag{4}$$

Über die Fehlerbestimmung eines Gewichtsatzes findet man bei Weinstein[1]) oder Kohlrausch[2]) Angaben.

Da die Wägungen in Luft ausgeführt werden, muß eine Korrektion wegen des Luftauftriebs angebracht werden. Nach dem Archimedischen Prinzip ist der Gewichtsverlust gleich dem Gewicht der verdrängten Luft. Bezeichnen wir das spezifische Gewicht des zu wägenden Körpers der Masse M mit σ, das der Gewichtstücke m mit δ, das der Luft mit λ, so ist

---

1) B. Weinstein, *Handbuch der phys. Maßbestimmungen* **2**, Berlin 1888, p. 328.

2) F. Kohlrausch, *Lehrbuch d. prakt. Phys.*, 11. Aufl., Leipzig und Berlin 1910, S. 62.

$$M\left(1-\frac{\lambda}{\sigma}\right)=m\left(1-\frac{\lambda}{\delta}\right)$$

oder genähert

$$M=m\left(1-\frac{\lambda}{\delta}+\frac{\lambda}{\sigma}\right). \tag{5}$$

47. Dichte und spezifisches Gewicht. Unter der Dichte d eines Körpers versteht man das Verhältnis seiner Masse m zu seinem Volumen v, es ist also

$$d=\frac{m}{v},$$

und die Dimension der Dichte ist

$$[d]=\left[\frac{m}{v}\right]=[\text{gr cm}^{-3}].$$

Wäre der ursprüngliche Plan geglückt, daß ein Kilogramm die Masse eines Kubikdezimeters Wasser von 4^0 sein soll, so wäre die Dichte des Wassers von 4^0 gleich Eins.[1]) Da aber (vgl. Nr. 6 S. 8) das Kilogramm um ca. 45 mgr zu groß geworden ist, so ist die Dichte des Wassers in ihrem Maximum 0,99996. Für die meisten Zwecke genügt es jedoch, diese Zahl durch den sehr genäherten Wert 1 zu ersetzen.

Das spezifische Gewicht eines Körpers ist definiert als das Verhältnis der Dichte des betreffenden Körpers zu der des Wassers bei 4^0. Der Dimension nach ist das spezifische Gewicht also eine reine Zahl, und das spezifische Gewicht des Wassers von 4^0 ist gleich Eins.

In folgender Tabelle sind die spezifischen Gewichte einiger fester und flüssiger Körper bei Zimmertemperatur angegeben.

	spez. Gew.		spez. Gew.
Aluminium	2,7	Messing	8,1—8,6
Äther	0,717	Nickel	8,9
Alkohol	0,791	Petroleum	0,8
Blei	11,3	Platin	21,4
Eis	0,917	Quecksilber 18°	13,551
Eisen	7,1—7,9	" 0°	13,595
Gewöhnliches Glas	2,5	Schwefelkohlenstoff	1,26
Flintglas	3,0—5,9	Silber	10,5
Kork	0,2	Wasser 18°	0,9986
Kupfer	8,9	Zink	7,1

1) Die Temperatur 4^0 hat man gewählt, weil die Dichte des Wassers als Funktion der Temperatur bei 4^0 ein Maximum hat.

Zur Bestimmung des *spezifischen Gewichts eines festen Körpers* ist die Kenntnis der Masse und des Volumens nötig. Erstere mißt man mit der Wage, das Volumen ermittelt man je nach dem Aggregatzustand auf verschiedene Weise. Bei festen Körpern z. B. kann man, wenn der Körper in eine einfache geometrische Form gebracht werden kann, das Volumen durch direkte Ausmessung der Dimensionen finden. Soll das Resultat jedoch genauer werden, so wird man sich auch zur Volumbestimmung der Wage bedienen, indem man den von Archimedes gefundenen Satz der Hydrostatik benutzt, daß ein Körper in einer Flüssigkeit so viel seines Gewichtes verliert, wie das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit beträgt. Wägt man einen Körper also zuerst in Luft, dann in destilliertem, ausgekochten (um die Luft auszutreiben) Wasser von gemessener Temperatur, indem man ihn z. B. mittels eines Kokonfadens an der Wage befestigt und in ein mit Wasser gefülltes Becherglas hängen läßt, so ergibt die Massendifferenz das Volumen unter der Voraussetzung, daß die Wägung in Luft die Masse ergeben hat, und daß das spezifische Gewicht des Wassers gleich 1 ist.

In Wahrheit aber erfährt der Körper schon bei der ersten Wägung einen Auftrieb, nämlich den der Luft, und das spezifische Gewicht des Wassers bei Zimmertemperatur ist kleiner als 1, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht.[1])

Spezifisches Gewicht des Wassers.

Temp.	spez. Gew.	Temp.	spez. Gew.	Temp.	spez. Gew.
0°	0,999868	6°	0,999968	12°	0,999525
1°	0,999927	7°	0,999929	14°	0,999271
2°	0,999968	8°	0,999876	16°	0,998970
3°	0,999992	9°	0,999808	18°	0,998622
4°	1,000000	10°	0,999727	20°	0,998230
5°	0,999992				

Betrugen die mit der Wage ermittelten Gewichte in Luft und in Wasser m resp. m', so ist das auf den leeren Raum reduzierte Gewicht in Luft $m + V\lambda$, wenn V das Volumen des Körpers, λ die Dichte der Luft bei dem jeweiligen Barometerstand und der Temperatur im Wagekasten bedeutet, also ist der Gewichtsverlust

1) Thiesen, Scheel und Diesselhorst, *Wissensch. Abh. der phys.-techn. Reichsanstalt* 3, 1900, S. 68; vgl. auch Chappuis, *Traveaux et Mém. du Bur. int.* 13 D, 1907, S. 30.

$m + V\lambda - m'$ und nach dem Archimedesschen Prinzip das Volumen $V = \frac{m + V\lambda - m'}{Q}$, unter Q das spezifische Gewicht des Wassers verstanden, oder $V = \frac{m - m'}{Q - \lambda}$.

Setzt man diesen Wert in die Formel

$$s = \frac{m + V\lambda}{V} \tag{1}$$

ein, so erhält man das genaue Resultat

$$s = \frac{m}{m - m'}(Q - \lambda) + \lambda. \tag{2}$$

Das spezifische Gewicht von Flüssigkeiten läßt sich mit Hilfe des Pyknometers bestimmen. Das ist im Prinzip ein Fläschchen mit einer Marke, welches einmal leer, dann mit der betreffenden Flüssigkeit gefüllt und schließlich mit Wasser gefüllt gewogen wird. Die Differenz der zweiten und ersten Wägung gibt die Masse, die Differenz der dritten und ersten Wägung das Volumen. Berücksichtigt man, daß bei der ersten Wägung das Pyknometer nicht leer, sondern mit Luft gefüllt war, und daß das spezifische Gewicht des Wassers nicht genau 1 war, so erhält man wieder die Beziehung (2).

Übrigens läßt sich das Pyknometer auch zur Bestimmung des spezifischen Gewichts fester Körper verwenden, indem man einmal die Substanz, dann das Pyknometer mit Wasser und schließlich mit Wasser und der Substanz gefüllt wägt.

Da die Dichten von Flüssigkeiten in weit stärkerem Maße als die fester Körper von der Temperatur abhängig sind, so ist die Temperatur bei der Füllung des Pyknometers mit der betreffenden Flüssigkeit mit anzugeben.

Bei geringeren Ansprüchen an die Genauigkeit ist die Mohrsche Wage von Nutzen (Fig. 28).

Fig. 28.

Ein Glaskörper G ist mittels eines feinen Platindrahtes an einem in 10 gleiche Teile geteilten Wagebalken befestigt und durch das Gewicht P ins Gleichgewicht gebracht. Taucht der Glaskörper in irgend eine Flüssigkeit, so findet ein Auftrieb statt, der durch Reiter, die auf den Wagebalken gesetzt werden, kompensiert werden kann. Die Gewichte der Reiter verhalten sich wie 1 : 10 : 100, und der schwerste Reiter hat ein Gewicht, welches gleich dem Auftrieb des Glaskörpers in Wasser von 4° ist. Da sich nun die Auf-

triebe des Glaskörpers in verschiedenen Flüssigkeiten wie deren spezifische Gewichte verhalten, ergeben die zur Kompensation benutzten Reiter unmittelbar das spezifische Gewicht der Flüssigkeit.

In der Praxis finden Aräometer oft Anwendung zur Bestimmung der Dichte einer Flüssigkeit; das sind Schwimmer, die mit einem Stiel versehen sind (vgl. Fig. 29). Solche Körper tauchen je nach dem spezifischen Gewicht der Flüssigkeit verschieden weit in dieselbe ein, und man liest das spezifische Gewicht direkt an einer am Stiel befindlichen Skala ab. In einem bestimmten technischen Betriebe ist das spezifische Gewicht häufig nur von Interesse, weil es über die Zusammensetzung der Flüssigkeit (z. B. Wassergehalt) Auskunft gibt. Dann ist es zweckmäßiger, Aräometer zu benutzen, auf deren Skala nicht das spezifische Gewicht, sondern der Prozentgehalt angegeben ist (Alkoholometer, Mostwagen usw.).

Fig. 29.

Das *spezifische Gewicht von Gasen*, z. B. der Luft, läßt sich nach Régnault bestimmen, indem man einen mit zwei Hähnen versehenen Glaskolben leer (d. h. evakuiert), ferner mit Gas von gemessener Temperatur t und gemessenem Druck p, schließlich mit Wasser gefüllt wägt. Aus den so bestimmten Gewichten ergibt sich die Masse des im Kolben eingeschlossenen Gases, sowie das Volumen und somit das spezifische Gewicht. Dieses ist in starkem Maße von Druck und Temperatur abhängig. Nach dem für Gase gültigen Boyle-Gay Lussacschen Gesetz ist das spezifische Gewicht bei t^0 und einem Druck von p mm Quecksilbersäule durch die Formel

$$s = s_0 \frac{p}{760\,(1 + \alpha t)}$$

gegeben, unter s_0 das spezifische Gewicht bei 0^0 und 760 mm Druck und unter α den Ausdehnungskoeffizienten der Gase 0,00367 verstanden (vgl. die Abschnitte über die Gasgesetze).

Das spezifische Gewicht der trockenen atmosphärischen Luft bei 0^0 und 760 mm Druck beträgt $s_0 = 0{,}0012932$.

Unter Gas- resp. Dampfdichte versteht man gewöhnlich das spezifische Gewicht eines Gases oder Dampfes, bezogen auf Luft als Einheit.

Da sich nach dem Avogadroschen Gesetze die Gas- und Dampfdichten (das sind die Dichten ungesättigter Dämpfe) wie die Molekulargewichte verhalten, so kann man bei bekannter chemischer Konstitution eines Gases seine Dichte berechnen. Be-

zeichnen d, M resp. d', M' die Dichten und Molekulargewichte zweier Stoffe, so gilt also die Beziehung

$$\frac{d}{d'} = \frac{M}{M'}.$$

Wählen wir als den einen Stoff z. B. Sauerstoff, dessen Dichte $d' = 1{,}1043$, dessen Molekulargewicht $M' = 32$ ist, so erhalten wir für ein beliebiges anderes Gas

$$d = \frac{M}{28{,}98}.$$

Der Chemiker pflegt nicht die Dichte der Luft als Einheit zu nehmen, sondern die des Sauerstoffes gleich 32 zu setzen. Dann sind Dichten und Molekulargewichte numerisch einander gleich.

Wegen der Möglichkeit, auf Grund des Avogadroschen Gesetzes aus der Dampfdichte auf das Molekulargewicht eines Stoffes zu schließen, sind verschiedene Methoden zur Dampfdichtebestimmung ausgearbeitet worden, z. B. von Gay-Lussac, Hofmann, Victor Meyer. Bei allen diesen Methoden ermittelt man das Volumen einer gewogenen Menge Substanz, nachdem man sie in den Dampfzustand gebracht hat, entweder direkt oder durch Messung der bei der Verdampfung verdrängten Luftmenge (V. Meyer).

Fig. 30.

Über die Messung von Gasdichten durch die Ausströmungsgeschwindigkeit von Gasen siehe den betreffenden Abschnitt der Hydrodynamik.

48. Die Brückenwage. Seien die Gewichte, die an den beiden Zugstangen AB und CD angreifen, resp. q_1 und q_2, so ist im Falle des Gleichgewichts (vgl. Fig. 30)

$$Pl = q_1 e + q_2 f. \qquad (1)$$

Bezüglich der Schneide S als Drehpunkt ist

$$q_1 b = Q a, \tag{2}$$

und bezüglich A als Drehpunkt ist der auf S lastende Druck Q'

$$Q' b = Q(b - a). \tag{3}$$

Ferner bezüglich S' als Drehpunkt

$$q_2 d = Q' c \tag{4}$$

oder wegen (3)

$$q_2 d = Q \frac{b - a}{b} c. \tag{4'}$$

Setzt man q_1 und q_2 aus (2) und (4′) in (1) ein, so erhält man

$$P = \frac{Q}{lb}\left[ae + (b - a)\frac{c}{d} f\right]. \tag{5}$$

Soll P unabhängig von der Lage der Last Q auf AS sein, so muß

$$e = \frac{cf}{d}$$

sein. Dann wird nämlich

$$P = \frac{Qe}{l}. \tag{6}$$

Der Effekt ist also derselbe, als ob die Last direkt an der Zugstange AB hinge, man hat aber den Vorteil, auf der Brückenwage auch ausgedehnte Körper wägen zu können.

Ist $e/l = 0{,}1$ oder $0{,}01$, so heißt die Wage auch Dezimal- resp. Zentesimalwage.

49. Mikrowagen. Um sehr kleine Substanzmengen zu messen, hat Nernst[1]) eine Wage aus einem Glasfaden konstruiert, die ähnlich wie eine Briefwage funktioniert, nur daß die Direktionskraft nicht durch die Schwere, sondern durch die Torsion eines Quarzfadens gegeben wird.

Eine noch größere Empfindlichkeit besitzt die von Ramsay[2]) beschriebene Wage, welche Whytlaw-Gray kürzlich konstruiert hat. Diese ist im Prinzip eine gewöhnliche zweiarmige Hebelwage, deren Wagebalken aus 0,1 mm dicken Quarzglasstäbchen zusammengesetzt ist. Die ganze Wage befindet sich in einem

---

1) W. Nernst, *Zeitschr. f. Elektrochemie*, 1903, S. 623.
2) W. Ramsay, *Journ. phys.* (5) **1**, 1911, S. 429.

evakuierbaren Kasten, der mit einem Manometer versehen ist, und die Luftverdünnung wird soweit getrieben (etwa 80 mm Quecksilberdruck), daß keine störenden Luftströmungen mehr auftreten. Auf der Seite des Wagebalkens, auf welchem die zu wägende Substanz sich befindet, ist eine mit Luft gefüllte Hohlkugel angebracht. Der Ausschlag der Wage bei Belastung wird durch den veränderten Auftrieb infolge von Luftdruckveränderungen im Wagekasten kompensiert, wodurch das Gewicht rechnerisch ermittelt werden kann.

Um die Leistungsfähigkeit verschiedener Apparate beurteilen zu können, geben wir nach Ramsay[1]) folgende kleine Tabelle, die die Massen verzeichnet, welche noch festgestellt werden können:

Gute Präzisionswage	10^{-4} gr
Nernstsche Mikrowage	10^{-6} „
Whytlaw-Graysche Wage	3.10^{-9} „
Spektroskop zeigt Helium an	2.10^{-10} „
Geruch (Merkaptan)	10^{-11} „
Elektroskop	10^{-12} „.

50. Das Pendel.[2]) Das Pendel verdient Interesse, weil mit seiner Hilfe die Erdbeschleunigung g bestimmt wird.

Nennen wir die Ablenkung aus der Ruhelage φ, das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse (Schneide) J, so ist die kinetische Energie

$$T = \frac{J}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \qquad (1)$$

Die potentielle Energie ist

$$V = Mgh(1 - \cos\varphi), \qquad (2)$$

wenn M die Masse des Pendels, h den Abstand des Schwerpunkts vom Drehpunkte bedeutet, und wenn die potentielle Energie des unabgelenkten Pendels gleich Null gesetzt ist.

Nach dem Energieprinzip ist $\frac{d}{dt}(T + V) = 0$ oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mgh}{J}\sin\varphi \qquad (3)$$

die Bewegungsgleichung des physischen Pendels.

1) W. Ramsay, *Journ. phys.* (5) 1, 1911, S. 429.

2) Man beachte auch den Artikel in der *Enz. d. math. Wiss. IV* 1 II, Leipzig 1904, S. 37 von Ph. Furtwängler, Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen.

Kann man die Masse als in einem Punkte vereinigt annehmen, dessen Abstand von der Schneide l ist, und von der Masse des Fadens absehen, so bezeichnet man das Pendel als mathematisches Pendel. Dann ist $J = Mh^2$ und $h = l$, also

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{3'}$$

Aus (3) folgt, daß die Schwere auf das Pendel, welches um den Winkel φ aus seiner Gleichgewichtslage abgelenkt ist, ein zurücktreibendes Drehmoment vom Betrage

$$\mathfrak{N} = Mgh\sin\varphi$$

ausübt. Ist φ klein, so ist das Drehmoment proportional dem Ablenkungswinkel φ, in Formel $\mathfrak{N} = Mgh\varphi$. Immer wenn eine solche Proportionalität zwischen dem Drehmoment und dem Ablenkungswinkel stattfindet, nennt man den Quotienten aus $\mathfrak{N}$ und φ die Direktionskraft. Diese hat also beim Pendel den Wert

$$D = Mgh.$$

Setzt man $\frac{J}{Mh} = l$, so heißt l die Länge des korrespondierenden mathematischen Pendels; der Punkt auf der Verbindungslinie der Schneide mit dem Schwerpunkt im Abstande l von der Schneide heißt der Schwingungsmittelpunkt.

Aus (3) erhält man das Integral der lebendigen Kraft, indem man mit $\frac{d\varphi}{dt}$ multipliziert und nach der Zeit integriert. Dies ergibt sich aber auch direkt aus der Gleichung $T + V =$ konst. in der Form

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{2g}{l}\cos\varphi = -H, \tag{4}$$

wo H eine Konstante ist.

Das Integral von (4) hat verschiedene Form, je nachdem $|H| \lesseqgtr \frac{2g}{l}$ ist.

Der für die Praxis wichtigste Fall ist der, daß $H < \frac{2g}{l}$ ist (dann überschlägt sich das Pendel nicht). In diesem Falle können wir einen Winkel φ_0 durch die Gleichung

$$H = \frac{2g}{l}\cos\varphi_0 \tag{5}$$

einführen, durch den (4) in

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \qquad (4')$$

übergeht, und wir erkennen, daß für $\varphi = \pm\varphi_0$ die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ wird.

Zur Integration von (4') substituiere man

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad \cos\varphi_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2},$$

und da nach (4') $\varphi > \varphi_0$ unmöglich ist, so setze man

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0}{2}\cdot\sin u,$$

also (6)

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \sin\frac{\varphi_0}{2}\cos u\,du.$$

Dadurch erhält man, wenn für $t = 0$ $\varphi = 0$ ist,

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2 u}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t \qquad (7)$$

oder

$$u = \operatorname{am}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,\ \sin\frac{\varphi_0}{2}\right),^{1)} \qquad (8)$$

woraus nach (6)

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0}{2}\operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,\ \sin\frac{\varphi_0}{2}\right) \qquad (9)$$

folgt.

Die ganze Schwingungsdauer T bekommt man, wenn man in (9) $\varphi = \varphi_0$ und $t = \frac{T}{4}$ setzt. Man kann aber auch in (7) nach (6) $u = \frac{\pi}{2}$ und $t = \frac{T}{4}$ setzen und erhält

$$T = 4K\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (10)$$

wenn K das vollständige elliptische Integral erster Gattung mit

---

[1]) Wegen der elliptischen Integrale und Funktionen vgl. man z. B. E. Pascal, *Repert. der höheren Math.* 1, Leipzig 1900, S. 150 u. 416 oder O. Schlömilch, *Compendium der höh. Analysis* 2, 2. Aufl., Braunschweig 1866, S. 283 u. 367.

dem Modul $k = \sin\frac{\varphi_0}{2}$, d. h.

$$K = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2 u}}$$

bedeutet.

Da aber

$$K = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}$$

ist, so folgt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\varphi_0}{2} + \cdots\right\}. \tag{11}$$

Nennt man die Schwingungsdauer für unendlich kleine Bögen T_0, setzt man also

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mhg}}, \tag{12}$$

so wird nach (11) genähert

$$T_0 = T(1 - \tfrac{1}{16}\varphi_0^2). \tag{13}$$

Wir können also auf Grund von (12) den Satz aufstellen, der, wie wir später sehen werden, immer für unendlich kleine Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage Gültigkeit hat, daß die Schwingungsdauer gleich dem 2π-fachen der Wurzel aus dem Quotienten von Trägheitsmoment und Direktionskraft ist.

Durch (13) kann man die Korrektion auf unendlich kleine Bögen bewerkstelligen, und zwar genügt es, bei praktischen Messungen, bei denen man für φ_0 stets sehr kleine Winkel wählt, das arithmetische Mittel zwischen der Amplitude am Anfang und am Ende der Messung zu benutzen.

Aus der Bestimmung von T_0 und l ergibt sich nach (12) die Erdbeschleunigung g, und zwar ist l nach (3) und (3′) als $l = \frac{J}{Mh}$ definiert.

Ist $-H > \frac{2g}{l}$, so wird aus (4), wenn wir $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ setzen und $-H = H'$ einführen,

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = H' + \frac{2g}{l} - \frac{4g}{l}\sin^2\frac{\varphi}{2} = \left(\frac{2g}{l} + H'\right)\left(1 - \frac{4\frac{g}{l}}{\frac{2g}{l} + H'}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

$$\frac{\frac{4g}{l}}{\frac{2g}{l} + H'} = k^2 \tag{14}$$

ist also ein echter Bruch, und es ist

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{lk^2}\left(1 - k^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\right), \tag{15}$$

d. h. auch für $\varphi = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$, wo $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ seinen kleinsten Wert hat, ist es noch positiv, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ wird also nicht Null und hat somit wegen der Stetigkeit immer dasselbe Vorzeichen.

Aus (15) ergibt sich

$$\int_0^{\frac{\varphi}{2}} \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{l}}\, t \tag{16}$$

oder

$$\varphi = 2 \operatorname{am}\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{l}}\, t, k\right). \tag{16'}$$

Setzen wir in (16) $\varphi = \pi$ und gleichzeitig $t = \frac{T}{2}$, so folgt für die Umlaufszeit T

$$2Kk\sqrt{\frac{l}{g}} = T \tag{17}$$

oder

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}\,\pi\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}. \tag{18}$$

Aus (15) sieht man, wenn man in dieser Gleichung $\varphi = 0$ setzt, daß k umgekehrt proportional der Winkelgeschwindigkeit $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$ im tiefsten Punkte ist. Für sehr große $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$ wird k unendlich klein, also die Klammer in (18) gleich 1, und nach (15) wird dann

$$k\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0},$$

d. h. nach (18)

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0}.$$

Dann wird die Umlaufszeit der Anfangsgeschwindigkeit umgekehrt proportional, wie das auch bei gleichförmigen Rotationen ohne Kraftwirkungen der Fall ist. Bei sehr schnellen Rotationen darf man eben die potentielle Energie gegenüber der sehr großen kinetischen Energie vernachlässigen und diese allein als konstant ansehen.

Kehren wir zum zuerst betrachteten Falle der eigentlich pendelnden Bewegung zurück. Besteht das Pendel z. B. aus einer Kugel vom Radius a und der Masse m, die an einem dünnen Draht hängt, und ist der Abstand der Schneide vom Mittelpunkte der Kugel L, so ist das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich einer durch ihren Mittelpunkt gehenden Achse $\frac{2}{5} a^2 m$, also bezüglich der Schneide $mL^2 + \frac{2}{5} ma^2$ (vgl. Nr. 28). Ist ferner die Masse des Drahtes μ, so ist sein Beitrag[1]) zum Trägheitsmoment $\frac{\mu L^2}{3}$, somit

$$J = mL^2\left(1 + \frac{2}{5}\frac{a^2}{L^2} + \frac{\mu}{3m}\right).$$

Ferner ist

$$Mh = mL + \mu\frac{L}{2} = mL\left(1 + \frac{\mu}{2m}\right),$$

also der Abstand des Schwingungsmittelpunkts von der Schneide

$$l = \frac{J}{Mh} = L\left(1 + \frac{2}{5}\frac{a^2}{L^2} - \frac{1}{6}\frac{\mu}{m}\right)$$

und nach (12) und (13) genähert

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}\left(1 + \frac{1}{8}\varphi_0^2 + \frac{2}{5}\frac{a^2}{L^2} - \frac{1}{6}\frac{\mu}{m}\right). \tag{19}$$

Die Schwingungsdauer wird meistens nach der Methode der Koinzidenzen durch Vergleich mit einem Pendel von bekannter Schwingungsdauer (Uhrpendel) festgestellt. Die Hauptfehlerquelle dieser Methode beruht darin, daß der mittlere Uhrgang im Laufe eines ganzen Tages astronomisch kontrolliert wird, während es auf den mittleren Uhrgang während der Beobachtungszeit ankommt.

---

1) Wenn die Fadenlänge $L - a$ in diesem Korrektionsgliede genähert durch L ersetzt wird.

Bisher haben wir den *Einfluß der umgebenden Luft auf die Schwingungsdauer* nicht mit berücksichtigt. Dieser besteht erstens in einer Verminderung der Direktionskraft infolge des Auftriebs der Luft (vgl. Hydrostatik). Ist die Dichte der Luft λ, die der Pendelkugel σ, so gibt die rechte Seite von (19) eigentlich nicht g, sondern $\gamma = g\left(1 - \frac{\lambda}{\sigma}\right)$, es ist also rechts in der Klammer von (19) noch der Summand $\frac{\lambda}{\sigma}$ hinzuzufügen. Zweitens aber wird durch die Bewegung der Luft, wie Bessel[1]) gezeigt hat, noch das Trägheitsmoment der schwingenden Masse vergrößert. Das Resultat dieser Untersuchung ist, daß zu der Masse M des Pendelkörpers noch ein Glied kM_L hinzukommt, wo M_L die Masse der vom Pendel verdrängten Luft bedeutet und k von der Form des Pendels abhängt.

Theoretisch wurde k für kugelförmige Pendelkörper von Poisson[2]) und für ellipsoid(linsen)förmige von Green[3]) berechnet. Es fand aber eine Abweichung von dem empirisch festgestellten Einfluß statt, da die Luftreibung nicht mit berücksichtigt war. Ihr wurde von Stokes[4]) und in umfassender Weise von O. E. Meyer[5]) Rechnung getragen.

Die Schwingungsdauer ist von der Schneidenform auch nicht ganz unabhängig. Faßt man die Schneide als Kreiszylinder vom Radius ϱ auf, der auf seiner ebenen Unterlage rollt ohne zu gleiten, so ist die potentielle Energie $V = Mg(h + \varrho)(1 - \cos\varphi)$, während die kinetische Energie in Größen erster Ordnung bezüglich $\frac{\varrho}{l}$ unverändert bleibt. An der reduzierten Pendellänge l ist also noch $-\varrho\frac{l}{h}$ als Korrektion anzubringen.[6])

1) F. W. Bessel, *Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels,* Abh. Berlin. Ak. 1826 = *Collection* 4, S. 124 = *Ostwalds Klassiker Nr. 7,* Leipzig 1889. Mit derselben Frage beschäftigten sich E. Sabine, *Phil. Trans.* **119**, London 1829, p. 207 = *Collection* **5**, p. 134; F. Baily, *Phil. Trans.* **122**, London 1832, p. 399 = *Collection* **5**, p. 185.

2) S. D. Poisson, *Paris. Mém. de l'Ac.* **11**, 1832, p. 521.

3) G. Green, *Edingb. Phil. Soc. Trans.* **13**, 1836, p. 54.

4) G. G. Stokes, *Cambr. Phil. Trans.* **9** II, 1856, p. 8 = *Math. and phys. papers* **3**, Cambridge 1901, p. 1 = *Collection* **5**, p. 277.

5) O. E. Meyer, *J. f. Math.* **73**, 1871, S. 31; **75**, 1872, S. 336.

6) L. Euler, *Nova Acta Ac. Petrop.* **6**, 1788, Hist. p. 93; Mém. p. 145; P. S. Laplace, *Ann. chim. phys.* **3**, 1816, S. 92. Unter allgemeineren Voraussetzungen auch F. W. Bessel, *Untersuch. über die Länge des Sekundenpendels, Abhandl.,* Berlin 1826, Art. 25. 30.

Der Einfluß elastischer Deformationen auf die Bewegung des Pendels wurde von Helmert[1]) eingehend diskutiert.

51. Das Reversionspendel. Die Größe l läßt sich exakter mit einem Reversionspendel bestimmen. Diesem liegt der von Huygens aufgestellte Satz zugrunde, daß die Schwingungsdauer eines Pendels dieselbe ist, gleichgültig ob es um die Drehachse oder um eine durch den Schwingungsmittelpunkt gelegte Achse schwingt. Dieser Satz läßt sich folgendermaßen beweisen:

P_1, h_1, S, h_2, P_2

Fig. 31.

Der Abstand des Schwerpunktes S (Fig. 31) von den Schneiden P_1 und P_2 sei h_1 resp. h_2, das Trägheitsmoment des Pendels bezüglich einer durch S gehenden zu P_1 und P_2 parallelen Achse sei J', dann ist (vgl. Nr. **28**) das Trägheitsmoment bezüglich P_1 $J_1 = J' + Mh_1^2$. Die reduzierte Pendellänge bei der Schwingung um P_1 ist demnach

$$l_1 = \frac{J' + Mh_1^2}{Mh_1}.$$

Ebenso ist

$$l_2 = \frac{J' + Mh_2^2}{Mh_2} \tag{1}$$

die reduzierte Pendellänge bei der Schwingung um P_2.

Ist die Massenverteilung so eingerichtet, daß die Schwingungsdauern T_1 und T_2 einander gleich sind, so ist auch $l_1 = l_2 = l$, und es folgt

$$l = \frac{J' + Mh_1^2}{Mh_1}, \quad l = \frac{J' + Mh_2^2}{Mh_2}. \tag{2}$$

Multipliziert man die beiden Gleichungen (2) mit h_1 resp. h_2 und subtrahiert sie voneinander[2]), so ergibt sich

$$l = h_1 + h_2, \tag{3}$$

d. h. *die reduzierte Pendellänge ist gleich dem Schneidenabstand.* Die Aufgabe, g zu bestimmen, besteht demnach darin, an einem mit zwei Schneiden versehenen Pendel eine Masse zu verschieben, bis die Schwingungsdauer dieselbe ist bei Schwingungen um die eine wie um die andere Schneide. Man mißt diese Schwingungsdauer T und den Schneidenabstand l und berechnet g nach der Formel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.[3])

1) F. R. Helmert, *Astr. Nachr.* **148**, 1897, S. 345.

2) Dabei ist Voraussetzung, daß $h_1 \neq h_2$ ist.

3) H. Kater, *London. Phil. Trans.* **108**, 1818, p. 33; J. Bohnenberger, *Astronomie*, Tübingen 1811.

Damit Symmetrie in der äußeren Form vorhanden ist und die mitbewegte Luft so bei den Schwingungsversuchen um beide Schneiden denselben Einfluß hat, ohne daß der Schwerpunkt in der Mitte liegt, hat Bessel[1]) an beiden Enden des Pendels zylindrische Gewichte angebracht, von denen das eine hohl, das andere voll war.

Besser als die Schwingungsdauern genau gleich zu machen, mißt man beide annähernd gleiche Schwingungsdauern T_1 und T_2 und ermittelt die Schwingungsdauer T eines mathematischen Pendels von der Länge des Schneidenabstandes durch Rechnung.

Es ist

$$\begin{aligned} T_1^2 &= 4\pi^2 \frac{Mh_1^2 + J'}{Mh_1 g} \\ T_2^2 &= 4\pi^2 \frac{Mh_2^2 + J'}{Mh_2 g}, \end{aligned} \tag{4}$$

also

$$T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2 = \frac{4\pi^2}{g}(h_1^2 - h_2^2). \tag{5}$$

Da aber T durch die Gleichung

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}(h_1 + h_2) \tag{6}$$

definiert ist, so folgt aus (5) und (6)

$$T^2 = \frac{T_1^2 h_1 - T_2^2 h_2}{h_1 - h_2} \tag{7}$$

oder

$$T^2 = T_1^2 - \frac{(T_2^2 - T_1^2)h_2}{h_1 - h_2},$$

d. h. da T_1 und T_2 annähernd einander gleich sind, genähert

$$T = T_1 + \frac{1}{2}\frac{(T_1^2 - T_2^2)h_2}{T_1(h_1 - h_2)} = T_1 + \frac{(T_1 - T_2)h_2}{h_1 - h_2}. \tag{8}$$

Man muß, wenn man nach diesem Verfahren rechnen will, allerdings, wenn auch nur roh, die Lage des Schwerpunktes ermitteln.

Schließlich möge noch ein Zahlenwert angegeben werden: F. Kühnen und Ph. Furtwängler bestimmten g im geodätischen Institut in Potsdam zu

$$g = 981{,}273 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}\right].$$

---

1) F. W. Bessel, *Astr. Nachr.* **30**, 1850, S. 1.

Über die Abhängigkeit der Erdbeschleunigung von der geographischen Breite siehe unten den Abschnitt über die Erdrotation.

52. Die Bifilaraufhängung.[1]) Als Aufhängung mit meßbarer Direktionskraft wird vielfach die sogenannte Bifilaraufhängung verwendet. An einer festen horizontalen Stange der Länge o hängt an zwei Fäden von der Länge l eine horizontale Stange u (Fig. 32). In der Gleichgewichtslage sind o und u einander parallel. Wirkt aber auf einen an u starr befestigten Apparat ein Drehmoment um die Vertikale, so ändert u seine Richtung; dadurch wird u mitsamt den daran hängenden Massen M gehoben, es tritt ein rückwirkendes Drehmoment ein, das mit wachsender Ablenkung größer wird, und es findet Gleichgewicht statt, wenn dieses Drehmoment gleich dem äußeren ist.

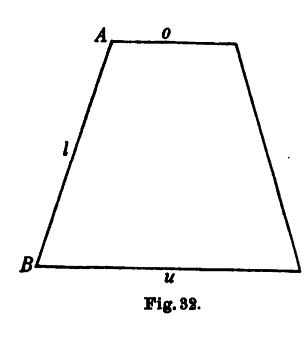


Fig. 32.

Um die Direktionskraft der Bifilaraufhängung zu bestimmen, berechnen wir die Arbeit, die geleistet wird, wenn die untere Stange den Winkel φ mit der oberen bildet und um $d\varphi$ weiter gedreht wird.

Wir führen ein Koordinatensystem ein, dessen Ursprung in der Mitte der oberen Stange liegt, dessen x-Achse die Richtung der oberen Stange hat, dessen z-Achse vertikal nach unten geht, und dessen y-Achse auf beiden senkrecht steht. Dann hat A die Koordinaten

$$x_1 = \frac{o}{2}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0$$

und B

$$x_2 = \frac{u}{2}\cos\varphi, \quad y_2 = \frac{u}{2}\sin\varphi, \quad z_2 = h,$$

und es ist

$$\left(\frac{u}{2}\cos\varphi - \frac{o}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\sin\varphi\right)^2 + h^2 = l^2 = \text{konst.} \tag{1}$$

$d\varphi$ und dh stehen in einem Zusammenhang, den man durch Differentiation von (1) erhält, nämlich

$$\left[-\left(\frac{u}{2}\cos\varphi - \frac{o}{2}\right)\frac{u}{2}\sin\varphi + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \sin\varphi\cos\varphi\right] d\varphi + h\,dh = 0. \tag{2}$$

---

1) Die Bifilarsuspension stammt von S. Harris, *Phil. Trans.* 1836, S. 417; eine eingehende Theorie derselben findet sich bei F. Kohlrausch, *Wied. Ann.* **17**, S. 737, 1882.

Die Arbeit, welche die Schwerkraft bei Vergrößerung des Winkels φ um $d\varphi$ leistet, ist also

$$Mg\,dh = \mathfrak{N}\,d\varphi = -\frac{Mg}{4h}\,ou \sin\varphi\, d\varphi\,,$$

woraus

$$\mathfrak{N} = -\frac{Mgou}{4h}\sin\varphi \tag{3}$$

und für die Direktionskraft bei kleinen Ablenkungen

$$\frac{|\mathfrak{N}|}{\varphi} = D = \frac{Mgou}{4h} \tag{4}$$

folgt.

53. Das Zwei-Körperproblem. Kepler fand empirisch, daß sich die Planeten nach folgenden Gesetzen bewegen:

1) Die Bahn ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.

2) Der Radiusvektor von der Sonne zum Planeten beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3) Die Quadrate der Umlaufszeiten sind proportional den Kuben der großen Achsen der Bahnellipsen.

Aus diesen Gesetzen läßt sich die Beschleunigung, welche der Planet erfährt, und damit die Kraft, die auf ihn wirkt, ableiten.

Wählen wir zur Bahnebene die xy-Ebene, zum Koordinatenursprung die Sonne, dann folgt, wenn wir den Ort des Planeten durch Polarkoordinaten r, w angeben, aus dem zweiten Gesetz, da

$$x = r\cos w\,, \quad y = r\sin w \tag{1}$$

ist,

$$r^2\frac{dw}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c\,, \tag{2}$$

denn $\frac{r^2}{2}\frac{dw}{dt}$ ist die in der Zeiteinheit vom Radiusvektor überstrichene Fläche. Also ergibt sich durch Differentiation nach t

$$\frac{d^2x}{dt^2} : \frac{d^2y}{dt^2} = x : y\,, \tag{3}$$

d. h.

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \beta\,\frac{x}{r} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \beta\,\frac{y}{r}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Hier bedeutet β den Betrag der Beschleunigung, die in Richtung des Radiusvektors wirkt.

Multiplizieren wir die beiden Gleichungen (4) resp. mit $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ und addieren, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}v^2 = \beta\frac{dr}{dt}. \tag{5}$$

Da aber

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{w}^2 \tag{6}$$

ist, und aus (6) mit Hilfe von (2)

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2} \tag{7}$$

folgt, so ergibt (5)

$$\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} + \beta. \tag{8}$$

Nun ist aber nach dem ersten Gesetz die Bahn eine Ellipse, deren Gleichung

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos w} \tag{9}$$

lautet, wenn a die halbe große Achse, $b = a\sqrt{1-e^2}$ die halbe kleine Achse, also e die numerische Exzentrizität bedeutet. Daher folgt

$$\dot{r} = \frac{dr}{dw}\dot{w} = \frac{a(1-e^2)e\sin w}{(1+e\cos w)^2}\frac{dw}{dt},$$

und das wird nach (9) und (2)

$$\dot{r} = \frac{ec\sin w}{a(1-e^2)}. \tag{10}$$

Somit wird

$$\ddot{r} = \frac{ec}{a(1-e^2)}\cos w\frac{dw}{dt} = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1-e^2)}\right), \tag{11}$$

und wir erhalten durch Vergleich mit (8)

$$\beta = -\frac{c^2}{a(1-e^2)r^2}. \tag{12}$$

Da $\beta < 0$ ist, so ist die Beschleunigung auf die Sonne hin gerichtet.

$c\,dt$ ist nach (2) die doppelte in der Zeit dt vom Radiusvektor beschriebene Fläche, also ist

$$cT = 2ab\pi = 2a^2\sqrt{1-e^2}\,\pi, \tag{13}$$

wenn T die Umlaufszeit bedeutet.

Eliminieren wir durch (13) c aus (12), so erhalten wir

$$\beta = -\frac{4a^3\pi^2}{T^2r^2}. \tag{14}$$

Nach dem dritten Gesetz hat $\frac{a^3}{T^2}$ für alle Planeten denselben Wert, also ist

$$\beta = -\frac{C}{r^2}, \tag{15}$$

unter C eine universelle Konstante verstanden.

Auf einen Planeten der Masse m wirkt also eine Kraft $m\beta$, die nach der Sonne gerichtet, der Masse des Planeten direkt und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Newton[1]) verallgemeinerte die Erfahrungen von Galilei über die Fallbewegung und von Kepler über die Planetenbewegung, indem er beide Erscheinungen unter sein Gesetz der allgemeinen Massenanziehung oder Gravitation subsumierte. Nach diesem Gesetz üben zwei Massen m_1 und m_2, die im Abstande r voneinander sich befinden, entgegengesetzt gleiche Kräfte aufeinander aus, die den Abstand zu verkleinern suchen, und zwar ist die Größe der Kraft

$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{16}$$

wo k eine universelle, d. h. nur vom Maßsystem, aber nicht von dem speziellen Stoff, aus dem die Massen bestehen, abhängige Konstante, die sogenannte *Gravitationskonstante* bedeutet.

Verändert r im ganzen Bereiche der betrachteten Bewegung sich nicht wesentlich, sondern behält es immer denselben Wert R, so wird die auf m_1 wirkende Kraft

$$f = \frac{k m_2}{R^2}\cdot m_1 = g\cdot m_1, \tag{17}$$

wo g konstant ist.

Diese Verhältnisse liegen beim freien Fall vor; denn wie unten (S. 131) gezeigt werden wird, wirkt die Anziehung einer Kugel auf einen außerhalb ihr befindlichen Körper ungefähr so, als ob ihre gesamte Masse m_2 im Mittelpunkt vereinigt wäre. Die Erdbeschleunigung g hängt also durch die Formel

$$g = \frac{k m_2}{R^2} \tag{18}$$

---

1) J. Newton, *Philos. nat. principia mathematica*, 2. Ausgabe, Cambridge 1713; 3. Buch propositio II, S. 362.

mit der Gravitationskonstanten, der Masse und dem Radius der Erde zusammen.

Aus (17) folgt, daß die Erdbeschleunigung mit wachsender Höhe h über der Erdoberfläche abnehmen muß.

Nennen wir g_0 resp. g die Beschleunigung eines frei fallenden Körpers auf der Erdoberfläche resp. in der Höhe h über derselben, so ergibt sich

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}. \tag{19}$$

Ist h klein gegen R, so ist in erster Annäherung

$$g = g_0 \left(1 - 2\frac{h}{R}\right). \tag{20}$$

Aus dem Newtonschen Gesetz ergibt sich die Bewegung eines Himmelskörpers in folgender Weise:

Befinden sich nur zwei Massen m_1 und m_2 im Raume, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= k \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{x_2 - x_1}{r_{12}} \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= k \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{y_2 - y_1}{r_{12}} \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= k \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{z_2 - z_1}{r_{12}} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{x_2 - x_1}{r_{12}} \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -k \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{y_2 - y_1}{r_{12}} \\ m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= -k \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Hier bedeutet

$$r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Dividieren wir (21) durch m_1, (22) durch m_2 und subtrahieren erstere Gleichungen von letzteren, so folgt, wenn wir

$$x_2 - x_1 = \xi, \quad y_2 - y_1 = \eta, \quad z_2 - z_1 = \zeta \tag{23}$$

setzen,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -k(m_1 + m_2)\frac{\xi}{r_{12}^3} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -k(m_1 + m_2)\frac{\eta}{r_{12}^3} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -k(m_1 + m_2)\frac{\zeta}{r_{12}^3}. \end{aligned} \tag{24}$$

Hier ist $r_{12}^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, und ξ, η, ζ sind die Koordinaten von m_2 relativ zu m_1.

Multipliziert man die dritte Gleichung (24) mit η, die zweite mit $-\zeta$ und addiert, so folgt

$$\frac{d}{dt}\left(\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt}\right) = 0$$

oder nach der Integration

$$\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt} = c_1 .$$

Ebenso ist

$$\zeta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\zeta}{dt} = c_2 \tag{25}$$

$$\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt} = c_3 .$$

Multipliziert man diese Gleichungen resp. mit ξ, η, ζ und addiert dann, so ergibt sich

$$c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta = 0 . \tag{26}$$

m_2 bewegt sich also dauernd in einer festen, durch m_1 gehenden Ebene.

Diese machen wir durch geeignete Wahl des Koordinatensystems zur $\xi\eta$-Ebene. Dann ist dauernd $\zeta = 0$, also auch $\frac{d\zeta}{dt} = 0$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$. Aus (24) wird somit

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k(m_1 + m_2)\frac{\xi}{r_{12}^3}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -k(m_1 + m_2)\frac{\eta}{r_{12}^3} \tag{24'}$$

$$\zeta = 0 .$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit ξ, die erste mit $-\eta$ und addiert, so erhält man

$$\frac{d}{dt}\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) = 0 ,$$

also

$$\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt} = c . \tag{25'}$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten

$$\xi = r\cos w ; \quad \eta = r\sin w$$

folgt

$$r^2 \frac{dw}{dt} = c. \tag{27}$$

Dies ist das zweite Keplersche Gesetz.

Multipliziert man in (24′) die erste Gleichung mit $\frac{d\xi}{dt}$, die zweite mit $\frac{d\eta}{dt}$ und addiert, so ergibt sich

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) = -k(m_1 + m_2)\frac{dr_{12}}{r_{12}^2 dt}. \tag{28}$$

Die Integration liefert

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \frac{k(m_1 + m_2)}{r_{12}} = h. \tag{29}$$

In Polarkoordinaten schreibt sich (29)

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{w}^2) - \frac{k(m_1 + m_2)}{r} = h. \tag{29′}$$

Nun ist $\dot{r} = \frac{dr}{dw}\dot{w}$; $\dot{w}$ drückt sich aber durch (27) aus, also hat man

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dw}\right)^2 + r^2\right\}\frac{c^2}{r^4} = h + \frac{k(m_1 + m_2)}{r} \tag{30}$$

oder

$$\frac{dr}{dw} = \sqrt{\frac{2r^4}{c^2}\left(h + \frac{k(m_1 + m_2)}{r}\right) - r^2}. \tag{31}$$

Setzt man $\frac{1}{r} = u$, so wird

$$-\frac{du}{\sqrt{\frac{2h}{c^2} + \frac{2k}{c^2}(m_1 + m_2)u - u^2}} = -dw$$

oder

$$-\frac{du}{\sqrt{-\left[\frac{k(m_1 + m_2)}{c^2} - u\right]^2 + \frac{2h}{c^2} + \frac{k^2(m_1 + m_2)^2}{c^4}}} = dw,$$

woraus sich durch Quadratur

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(w - w_0)} \tag{32}$$

ergibt.

Hier ist

$$p = \frac{c^2}{k(m_1 + m_2)} = a(1 - e^2)$$
$$e = \sqrt{\frac{2hc^2}{k^2(m_1 + m_2)^2} + 1}; \tag{33}$$

c und h bestimmen sich durch Anfangslage und -geschwindigkeit.

Je nachdem $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$ ist, ist die Bahnkurve eine Ellipse, Parabel, Hyperbel. (32) zeigt also, daß das Newtonsche Gesetz allgemeinere Bahnkurven gibt, als das erste Keplersche Gesetz.

Für eine elliptische Bahn folgt aus (27) die Umlaufszeit T

$$cT = 2a^2\sqrt{1 - e^2}\,\pi \tag{34}$$

oder mit Benutzung der ersten Gleichung (33)

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k(m_1 + m_2)}{4\pi^2}. \tag{35}$$

Das dritte Keplersche Gesetz gilt also nicht in Strenge, sondern nur angenähert, wenn die Masse des Planeten klein gegen die des Zentralkörpers ist.

Fassen wir die Bahnkurve des Mondes als Kreis vom Radius a auf, so ergibt sich die auf den Mond wirkende Beschleunigung relativ zur Erde als $\frac{k(m_1 + m_2)}{a^2}$, und dies ist nach (35) $\frac{4\pi^2 a}{T^2}$. Andrerseits ist die Erdbeschleunigung auf eine Masse m_2' an der Erdoberfläche $\frac{k(m_1 + m_2')}{R^2} = g$, wenn R der Erdradius ist, denn die Anziehung einer Kugel ist dieselbe, als wenn ihre ganze Masse sich im Zentrum befände, wie in der Potentialtheorie gezeigt werden wird. Vernachlässigen wir die Masse des Mondes und die des fallenden Körpers gegen die der Erde, so folgt

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2 R^2} = g. \tag{36}$$

Wegen der falsch bestimmten Mondparallelachse, aus der sich a ergibt, konnte Newton anfänglich diese Beziehung nicht verifizieren; erst eine genauere Bestimmung derselben ermutigte ihn zur Publikation seines Gesetzes.[1])

Schließlich mögen noch einige in der Astronomie gebräuchliche Größen definiert werden.

---

1) Man vgl. die Kritik dieser Erzählung bei F. Rosenberger, *Isaac Newton und seine physikalischen Prinzipien,* Leipzig 1895, S. 120.

Der Punkt der Ellipsenbahn, welcher auf der großen Achse nahe dem Brennpunkt liegt, in welchem der Zentralkörper sich befindet, für den nach (32) $w = w_0$ ist, heißt das *Perihel*, der andere Ellipsenpunkt auf der großen Achse ($w = w_0 + \pi$) heißt das *Aphel.*

In (32) sind nur drei willkürliche Konstanten $p = a(1 - e^2)$, e und w_0, während das allgemeine Integral von (24) sechs willkürliche Konstanten enthalten muß.

Es ist aber die feste Ebene durch den Zentralkörper zur $\xi\eta$-Ebene gemacht worden; dadurch ist über zwei Konstanten verfügt. Ferner muß noch, um den Ort des Planeten auf der Ellipse anzugeben, sein Ort zu einer bestimmten Zeit t_0, die sogenannte Epoche gegeben sein.

In der Astronomie wählt man folgendermaßen sechs Integrationskonstanten als *Elemente der Bahn* bei heliozentrischen Koordinaten:

Die Ebene der Ellipsenbahn schneidet aus einer Kugel um die Sonne als Zentrum einen größten Kreis heraus; dieser schneidet den festen größten Kreis der Ekliptik in zwei Punkten, dem aufsteigenden und dem absteigenden Knoten. Der Winkelabstand Θ zwischen dem festen Frühlingspunkt auf der Ekliptik und dem aufsteigenden Knoten heißt die *Länge des aufsteigenden Knotens.* Die Bahnebene ist bestimmt, wenn außer Θ noch die *Neigung* φ der Bahnebene gegen die Ekliptik angegeben ist.

Die Richtung der großen Achse ist gegeben, wenn man den Winkel zwischen dem aufsteigenden Knoten und dem Perihel in der Bahnebene $\varpi - \Theta$ angibt; ϖ heißt die *Länge des Perihels.* Die Form der Ellipse ergibt sich aus der *großen Halbachse* a und der *numerischen Exzentrizität* e. Zur Ortsbestimmung des Planeten in der Bahn dient schließlich folgende Angabe: Zur Zeit τ, $\tau + T$, $\tau + 2T, \ldots$ gehe der Planet durch das Perihel; ein gedachter Planet laufe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $n = \frac{2\pi}{T}$ in der Bahn, und befinde sich mit dem wahren Planeten gleichzeitig im Perihel. Der Winkel, den der gedachte Planet mit dem Perihel bildet, die sogenannte *mittlere Anomalie,* ist $\zeta = n(t - \tau)$. Die *Länge* des gedachten Planeten ist also $l = \varpi + \zeta = \varpi + n(t - \tau)$. Zur Zeit 0 ist die Länge $\varepsilon = \varpi - n\tau$; ε heißt die *mittlere Länge der Epoche.*

Θ, φ, ϖ, a, e, ε heißen die elliptischen Elemente der Bahn. In Fig. 33 ist

$$\Omega N = \Theta, \quad \sphericalangle\, \Pi N E = \varphi.$$

Π sei das Perihel; dann ist $\Omega N + N\Pi = \varpi$. P sei der Ort des Planeten, dann ist die wahre Länge $\Omega N + NP$. ΠP heißt wahre Anomalie, es ist die Größe, die wir in den Rechnungen mit $w - w_0$ bezeichnet hatten.

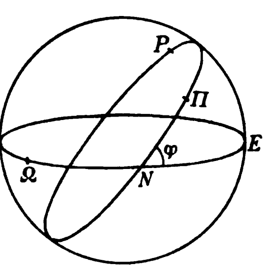


Fig. 33.

54. Störungstheorie. Befinden sich mehr als zwei Massen im Raume, so wird das Problem, die Bewegung derselben anzugeben, wesentlich komplizierter, ja es ist schon unmöglich, die Differentialgleichungen im Falle dreier Massen zu integrieren, d. h. das sogenannte Dreikörperproblem zu lösen.

Da diese Frage aber für die Astronomie von großer Bedeutung ist, so hat man approximative Methoden entwickelt, welche die Tatsache benutzen, daß die Bewegung eines Himmelskörpers (Planet) im wesentlichen durch *einen* Körper (Sonne) bestimmt wird, und daß in weit geringerem Maße die anderen Himmelskörper (Mond und andere Planeten) ihren Einfluß ausüben, so daß die von diesen ausgeübten Kräfte als *Störungskräfte* angesehen werden können.

Die Methode dieser Rechungen stammt von Lagrange und beruht darauf, daß man zunächst die störenden Körper fortdenkt und so rechnet, als ob nur zwei Himmelskörper (Sonne und Planet) vorhanden wären, und dann die Anwesenheit jener dadurch berücksichtigt, daß man entweder die *Variationen der Koordinaten* bestimmt, welche durch die Störungskräfte hervorgerufen werden, oder daß man die Elemente der elliptischen Bahn, die für das Zweikörperproblem Konstante sind, als Funktionen der Zeit auffaßt. Diese Methode heißt die Methode der *Variation der Elemente.*

Die Störungen zerfallen in zwei Teile, erstens die *periodischen* Störungen, die sich durch goniometrische Funktionen der Zeit ausdrücken lassen, und zweitens die *säkularen* Störungen, die der Zeit oder irgend einer Potenz derselben proportional anwachsen.

Für die Entwicklung dieser Theorie, die sehr verständlich bei Tisserand[1]) dargestellt ist, sind die mechanischen Theoreme von Hamilton und Jacobi von grundlegender Bedeutung.

Bei Tisserand[2]) findet man z. B. die von Gauß[3]) abgelei-

1) F. Tisserand, *Traité de Mécanique céleste* **1**, Paris 1889.
2) L. c. S. 433.
3) C. F. Gauß, *Werke* **3**, S. 331.

teten Formeln für die Änderungsgeschwindigkeit der Elemente der elliptischen Bahn.

55. Die Bestimmung der Gravitationskonstanten.[1]) Die Bestimmung der Konstanten k in dem Gesetz für die Anziehungskraft $k\frac{m_1 m_2}{r^2}$ zweier Massen m_1 und m_2, die sich im Abstande r voneinander befinden, ist von Wichtigkeit, einmal, weil k eine universelle Naturkonstante für jegliche Materie darstellt, dann, weil sich aus k, der Erdbeschleunigung g und dem Erdradius R die mittlere Dichte der Erde und die gesamte Erdmasse ergibt (vgl. S. 107 unten), und drittens, weil sich aus der Erdmasse auf Grund astronomischer Beobachtungen die Masse der übrigen Planeten und der Sonne berechnen läßt.

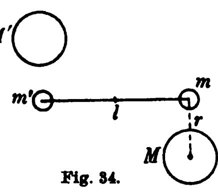


Fig. 34.

Eine Methode der Messung war die, daß die bekannten ablenkenden Massen M und M' neben die ebenfalls bekannten Massen m und m' einer Drehwage in den bekannten Abstand r gebracht wurden (vgl. Fig. 34). Dabei lagen m und M in einer anderen Horizontalebene als m' und M', damit die Wirkung von M auf m in geringerem Maße durch die entgegengesetzte Wirkung von M auf m' aufgehoben wurde. Die Massen M und M' lassen sich durch Drehung in die in Fig. 35 angedeutete Lage bringen. Dadurch wird das Drehmoment auf die Drehwage um $\mathfrak{R} = 2k\frac{mM}{r^2}l$ geändert, wenn l den Hebelarm der Drehwage bedeutet und $m' = m$, $M' = M$ ist.

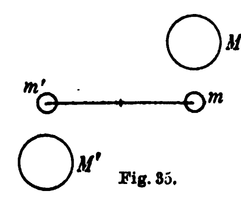


Fig. 35.

Die hierdurch hervorgerufene Ablenkung φ wird mit Fernrohr und Skala beobachtet. Um aus φ das Drehmoment $\mathfrak{R}$ und damit k berechnen zu können, muß noch die Direktionskraft der Aufhängung bekannt sein. Diese läßt sich aus der Schwingungsdauer T und dem Trägheitsmoment J der Drehwage nach der Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}$$

1) Vgl. auch den Artikel in der Enc. der math. Wiss. V, 1, Art. 2, Leipzig 1903 von J. Zenneck, *Gravitation.* Weitere Literatur: J. H. Poynting, *The mean density of the earth.* London 1894. F. Richarz und O. Krigar-Menzel, *Berl. Abhandlungen,* 1898, Anhang. C. V. Boys, *Rapp. congrès internat. phys.* **3**, p. 306, Paris 1900. Referate: F. Richarz, *Vierteljahrschr. astr. Ges.* **24**, 1889, p. 18 und 184.

ermitteln, und es ist dann $D\varphi = \mathfrak{N}$, also

$$k = \frac{4\pi^2 J\varphi r^2}{T^2 2mMl}. \tag{1}$$

Mit dieser Versuchsanordnung arbeiteten Cavendish[1]), Reich[2]), Baily[3]), Cornu und Baille[4]), Boys[5]) und der Jesuitenpater Braun[6]).

Letzterer hat auch die festen Massen M und M' in die Verlängerung des Wagebalkens gebracht und aus der Verkleinerung der Schwingungsdauer auf die Vergrößerung der Direktionskraft geschlossen. Die Resultate waren in guter Übereinstimmung mit denen der vorigen Drehwagen-Methode.

Wilsing[7]) benutzte ein Doppelpendel, dessen Schwerpunkt nur sehr wenig unterhalb des Drehpunktes lag; bei diesem war also die Schwere die Direktionskraft.

Die gewöhnliche Wage wurde zur Bestimmung von k zuerst von Jolly[8]), später von Poynting[9]) und von Richarz und Krigar-Menzel[10]) verwendet.

Das Prinzip der Jollyschen Methode besteht darin, daß eine Masse m entweder auf die untere oder auf die obere Wagschale (vgl. Fig. 36) gelegt werden kann und dadurch der Attraktion einer Masse M einmal nur sehr wenig, das zweite Mal ziemlich stark ausgesetzt ist. Es tritt dadurch eine Gewichtsdifferenz μ auf, aus der nach der Formel

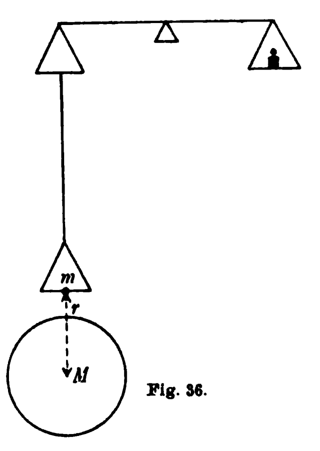


Fig. 36.

$$\mu g = k\frac{mM}{r^2} \tag{2}$$

1) H. Cavendish, *London, Phil. Trans.* 88, 1798, S. 469.
2) F. Reich, *Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittels der Drehwage*, Freiberg 1838; *Neue Versuche mit der Drehwage*, Leipzig 1852.
3) F. Baily, *Lond. Astr. Soc. Mem.* **14**, 1843.
4) A. Cornu u. J. Baille, Paris *C. R.* **76**, 1873, p. 954.
5) C. V. Boys, *Lond. Phil. Trans.* **186** (A), 1895, p. 1.
6) C. Braun, *Wien. Denkschr.* **64**, 1897, p. 187.
7) J. Wilsing, *Potsdam astrophysik. Obs.* **6**, 1887, Nr. 22 und 23.
8) Ph. v. Jolly, *Münch. Abh.* (2) **14**, 1881; *Ann. Phys. Chem.* **14**, 1881, p. 331.
9) J. H. Poynting, *The mean density of the earth.*, London 1894.
10) F. Richarz u. O. Krigar Menzel, *Berliner Abhandlungen*, 1898, Anhang.

auf k geschlossen werden kann. (In Formel (2) ist angenommen, daß die Anziehungskraft von $\underline{M}$ auf m, wenn m auf der oberen Schale liegt, vernachlässigt werden darf.)

Da infolge des langen Drahtes zwischen den beiden Wagschalen die Jollysche Anordnung Luftströmungen sehr ausgesetzt war, so bildet die Versuchsanordnung von Richarz und Krigar Menzel dagegen eine entschiedene Verbesserung (vgl. Fig. 37).

Fig. 37.

Die Masse M bestand aus 100000 kg Blei, der Effekt war dadurch, daß die eine Schale sich über, die andere unter M befand, verdoppelt.

Da, wie in der Potentialtheorie gezeigt wird, die Anziehung, die eine Kugel, deren Dichte nur Funktion des Radius ist, auf eine außerhalb der Kugel befindliche Masse ausübt, dieselbe ist, als wenn die gesamte Masse der Kugel in ihrem Zentrum vereinigt wäre, so folgt daraus

$$g = \frac{k\underline{M}}{R^2}, \quad \text{also} \quad \underline{M} = \frac{R^2 g}{k}, \tag{3}$$

wenn $\underline{M}$ die Masse, R den Radius der Erde bedeutet.

Da aber $\underline{M} = \frac{4\pi}{3} R^3 \Delta$ ist, unter Δ die mittlere Dichte der Erde verstanden, so ist schließlich

$$\Delta = \frac{3}{4\pi} \frac{g}{kR}. \tag{4}$$

Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

		k	Δ
Drehwage	Boys Braun	$6.658 \cdot 10^{-8}$ [$cm^3\,sec^{-2}\,gr^{-1}$]	5.527
Doppelpendel	Wilsing	6.596	5.577
Wage	Poynting	6.698	5.4934
	Richarz u. Krigar Menzel	6.685	5.5050.

Potentialtheorie.

56. Das Potential diskreter Massen. Die Kraft, mit der eine Masse m am Orte $p(x, y, z)$ von einer anderen Masse m_1 am Orte $p_1(x_1, y_1, z_1)$ nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz angezogen wird, ist $k\frac{m m_1}{r_1^2}$, wenn

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

bedeutet. Die Komponenten dieser Kraft sind resp.

$$\mathfrak{F}_x = k\frac{m \cdot m_1}{r_1^2}\,\frac{x_1 - x}{r_1}; \quad \mathfrak{F}_y = k\frac{m m_1}{r_1^2}\,\frac{y_1 - y}{r_1}; \quad \mathfrak{F}_z = k\frac{m m_1}{r_1^2}\,\frac{z_1 - z}{r_1}. \tag{1}$$

Definieren wir eine Funktion

$$V = \frac{m_1}{r_1}, \tag{2}$$

so ist

$$\mathfrak{F}_x = km\frac{\partial V}{\partial x}; \quad \mathfrak{F}_y = km\frac{\partial V}{\partial y}; \quad \mathfrak{F}_z = km\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{3}$$

Sind n anziehende Massenpunkte $m_1(x_1, y_1, z_1)$, $m_2(x_2, y_2, z_2) \ldots$ vorhanden, so sind die Komponenten der Kraft auf $m(x, y, z)$

$$\mathfrak{F}_x = km\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu}{r_\nu^3}(x_\nu - x), \text{ usw.}; \tag{4}$$

und wenn wir

$$V = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu}{r_\nu} \tag{5}$$

setzen, so wird

$$\mathfrak{F}_x = km\frac{\partial V}{\partial x} \text{ usw.} \tag{6}$$

oder in einer beliebigen Richtung s

$$\mathfrak{F}_s = km\frac{\partial V}{\partial s} \tag{7}$$

d. h. in Vektorschreibweise

$$\mathfrak{F} = km \operatorname{grad} V. \tag{8}$$

V heißt das *Potential* der Kraft im Punkte x, y, z.[1])

Eine Fläche, die sämtliche Punkte $V(x,y,z) = \text{Konst.}$ verbindet, heißt eine Äquipotentialfläche oder Niveaufläche des Potentials.

Da V sich nicht verändert, wenn man von einem beliebigen Punkte einer Äquipotentialfläche tangential unendlich wenig vorwärts geht, so hat nach (7) $\mathfrak{F}$ keine Tangentialkomponente an einer Äquipotentialfläche oder: *Die Kraft steht senkrecht zu den Äquipotentialflächen.*

---

1) Häufig wird auch für kV eine besondere Bezeichnung eingeführt, und diese Größe wird dann Potential genannt.

Man konstruiere im Raum unendlich viele Äquipotentialflächen, die je einem bestimmten Werte des Potentials V entsprechen, und zwar seien benachbarte Flächen durch eine ganz bestimmte unendlich kleine Differenz ε der Konstanten charakterisiert. Dann ist die Kraft an einem bestimmten Orte umgekehrt proportional dem Abstande benachbarter Äquipotentialflächen. Denn da die Kraft senkrecht zur Fläche steht, so ist $|\mathfrak{F}| = km \cdot \frac{\partial V}{\partial n}$ (n Normalenrichtung), und da nach Konstruktion $dV = \varepsilon$ ist, wenn dn gleich dem unendlich kleinen Abstande zweier benachbarter Flächen am Orte der Kraft gewählt wird, so ist $|\mathfrak{F}| = \frac{km\varepsilon}{dn}$, d. h. umgekehrt proportional dn.

Die Arbeit, welche die Kräfte leisten, wenn man m vom Punkte $p(x, y, z)$ bis zum Punkte $p'(x', y', z')$ verschiebt, ist nach (6)

$$A = \int\limits_{x\,y\,z}^{x'\,y'\,z'} (\mathfrak{F}_x dx + \mathfrak{F}_y dy + \mathfrak{F}_z dz) = km\,[V(x', y', z') - V(x, y, z)], \tag{9}$$

d. h. bis auf den Faktor km ist *die Arbeit durch die Zunahme des Potentials gegeben.*

Da nach (5) das Potential eindeutig durch den Ort gegeben ist, so ist die Arbeit, unabhängig vom Wege, nur durch Anfangs- und Endlage bestimmt.

Da ferner nach (5) das Potential in einem Punkte, der unendlich fern von allen anziehenden Massen liegt, Null ist, so ergibt sich aus (9), daß das Potential im Punkte $p(x, y, z)$ bis auf den Faktor k gleich der Arbeit ist, die die Kräfte des Systems leisten, wenn man die Masse $m = 1$ aus dem Unendlichen nach p schafft.

Aus (9) folgt noch, daß die Kräfte des Systems im Ganzen keine Arbeit leisten, wenn Anfangs- und Endpunkt auf derselben Äquipotentialfläche liegen.

Die Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt m unter dem Einflusse der anziehenden Kräfte lauten

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= km\frac{\partial V}{\partial x} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= km\frac{\partial V}{\partial y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= km\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \tag{10}$$

Multipliziert man die Gleichungen (10) resp. mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ und addiert sie dann, so erhält man

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v^2\right) = \frac{d}{dt}(kmV),$$

oder wenn man

$$-kmV = U \tag{11}$$

setzt, so ist

$$T + U = \text{konst.} \tag{12}$$

Hier ist T die kinetische, U die potentielle Energie des Massenpunktes m. (12) stellt das Integral der lebendigen Kraft dar.

Sind n Massenpunkte vorhanden, so ist die Arbeit, die man leistet, wenn man jedem Massenpunkt eine unendlich kleine Verschiebung erteilt, aus (4) zu berechnen. Berücksichtigen wir zunächst nur die Massen m_λ und m_ν, so folgt

$$\begin{aligned} d'A_{\lambda\nu} &= km_\lambda dx_\lambda \frac{m_\nu}{r_{\lambda\nu}^3}(x_\nu - x_\lambda) + \cdots + km_\nu dx_\nu \frac{m_\lambda}{r_{\lambda\nu}^3}(x_\lambda - x_\nu) + \cdots \\ &= -k\frac{m_\lambda m_\nu}{r_{\lambda\nu}^3}(x_\nu - x_\lambda)(dx_\nu - dx_\lambda) + \cdots. \end{aligned} \tag{13}$$

Da aber $(x_\nu - x_\lambda)(dx_\nu - dx_\lambda) + \cdots = r_{\lambda\nu} \cdot dr_{\lambda\nu}$ ist, so folgt

$$d'A_{\lambda\nu} = kd\frac{m_\lambda m_\nu}{r_{\lambda\nu}}. \tag{14}$$

Die Gesamtarbeit erhält man, wenn man über alle Paare von Massenpunkten summiert. Da man aber, wenn man λ und ν von 1 bis n laufen läßt und nur die Terme, in denen $\lambda = \nu$ ist, fortläßt, alle Paare doppelt rechnen würde, so ist der Faktor $\frac{1}{2}$ hinzuzufügen, und man bekommt

$$d'A = d\left(\frac{1}{2}k\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\lambda m_\nu}{r_{\lambda\nu}}\right). \tag{15}$$

Da nun nach dem Energieprinzip die von den Kräften des Systems geleistete Arbeit gleich der Abnahme der Energie W sein muß, so gilt auch

$$-dW = d\left(\frac{1}{2}k\sum_{\lambda}\sum_{\nu}\frac{m_\lambda m_\nu}{r_{\lambda\nu}}\right), \tag{16}$$

und da die Gravitationsenergie für den Fall, daß je zwei Massenpunkte unendlich weit voneinander entfernt sind, Null gesetzt

werden kann, so wird

$$W = -\frac{k}{2}\sum_{\lambda}\sum_{\nu}\frac{m_\lambda m_\nu}{r_{\lambda\nu}}. \tag{17}$$

(17) können wir noch umformen. Es ist

$$\sum_{\lambda}\sum_{\nu}\frac{m_\lambda m_\nu}{r_{\lambda\nu}} = \sum_{\lambda} m_\lambda \sum_{\nu}\frac{m_\nu}{r_{\lambda\nu}} = \sum_{\lambda} m_\lambda V_\lambda,$$

wo V_λ das Potential im Punkte p_λ bedeutet, also

$$W = -\frac{k}{2}\sum_{\lambda} m_\lambda V_\lambda. \tag{18}$$

Haben wir erstens eine Massenverteilung m_1, der das Potential V_1 und die Energie W_1 entspricht, und zweitens eine Massenverteilung m_2, welcher das Potential V_2 und die Energie W_2 zukommt, so folgt, da die Potentiale sich einfach addieren, wenn die beiden Massenverteilungen gleichzeitig vorhanden sind,

$$W = -\frac{k}{2}\sum (m_1 + m_2)(V_1 + V_2) = W_1 + W_2 + W_{12}, \tag{19}$$

wo

$$W_{12} = -\frac{k}{2}\sum (m_2 V_1 + m_1 V_2) \tag{20}$$

ist. Da aber nach (5) $\sum m_2 V_1 = \sum m_1 V_2$ ist, so können wir auch

$$W_{12} = -k\sum m_1 V_2 = -k\sum m_2 V_1 \tag{21}$$

schreiben. W_{12} heißt die wechselseitige Energie der beiden Systeme.

Verschieben sich die Systeme 1 und 2 beide je als starre Systeme, so ändern sich bei der Verschiebung W_1 und W_2 nicht, es ist also

$$d'A = -dW_{12}. \tag{22}$$

57. Kontinuierliche Massenverteilung. Sind die anziehenden Massen kontinuierlich im Raume S verteilt, und zwar mit der im allgemeinen örtlich variablen Dichte ϱ, so daß

$$\varrho\, dS = dm \tag{1}$$

ist, so gilt auch dann noch die Definition für das Potential. Es tritt nur anstatt einer Summation eine Integration auf, und es ist

$$V = \int \frac{\varrho}{r}\, dS. \tag{2}$$

Hier bedeutet ϱ die Dichte im variablen Punkte x', y', z' des Raumes S, über den integriert wird, r den Abstand des Punktes x, y, z, in dem V gesucht wird, von x', y', z'.

Ebenfalls ist die Kraft auf eine Masse m

$$\mathfrak{F}_x = km \int \frac{\varrho}{r^3} (x' - x)\, dS \quad \text{usw.} \tag{3}$$

d. h.

$$\mathfrak{F}_x = km \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{usw.} \tag{4}$$

Diese Formeln bereiten keine Schwierigkeiten, solange der angezogene Punkt in endlicher Entfernung von den anziehenden Massen liegt, da dann die Integranden stets endlich bleiben. Wenn aber der angezogene Punkt oder Aufpunkt im Innern der anziehenden Massen oder Quellpunkte liegt, so wird der Integrand für die Quellpunkte, die dem Aufpunkte unendlich nahe liegen, unendlich groß. Es soll gezeigt werden, daß auch dann noch die Integrale auf den rechten Seiten von (2) und (3) endlich bleiben.

Wir denken uns zu diesem Zwecke eine Kugel vom Radius a um den Aufpunkt als Zentrum gelegt und die Integration in (2) über den Innen- und Außenraum der Kugel erstreckt. V setzt sich dann additiv aus V_i und V_a zusammen

$$V = V_i + V_a. \tag{5}$$

Während nun in V_a der Integrand durchweg endlich bleibt, ist das in

$$V_i = \int \varrho \frac{dS}{r} \tag{6}$$

nicht der Fall, wo sich die Integration über das Volumen der Kugel erstreckt.

Führen wir den räumlichen Winkel $d\omega$ ein, unter dem ein Volumenelement vom Aufpunkte aus erscheint, so können wir $dS = r^2 d\omega dr$ setzen, und (6) geht in

$$V_i = \iint \varrho r\, dr\, d\omega \tag{7}$$

über. Für $\lim a = 0$ wird also $V_i = 0$ und $V_a = V$.

Dasselbe läßt sich von dem Integral (3) beweisen, da $\frac{x' - x}{r}$ als Kosinus eines Winkels immer endlich bleibt. Da aber V_i und $\mathfrak{F}_{xi}$ endliche und stetige Funktionen des Aufpunktes sind, so läßt

sich auch der Nachweis führen, daß (4) mit (3) auf Grund von (2) identisch ist, was nicht selbstverständlich ist, da in (3) zuerst nach x differentiiert und dann über S integriert wird, während diese Operationen in (4) in umgekehrter Reihenfolge auszuführen sind.

Für die Energie ergibt sich entsprechend Nr. **56** (18)

$$W = -\frac{k}{2}\int \varrho V dS. \tag{8}$$

58. Flächen- und Liniendichte. Trotzdem in endlichen Räumen natürlich immer endliche Massen enthalten sind, ist es rechnerisch häufig zweckmäßig, anzunehmen, daß Massen flächenhaft verteilt sind, d. h. daß auf einem Flächenelement $d\sigma$ die Masse $dm = \varrho_\sigma d\sigma$ vorhanden ist. In Wirklichkeit ist $dm = \varrho \cdot h \cdot d\sigma$, wo h die kleine (endliche) Dicke bedeutet, in der die Masse über die Fläche verteilt ist. Denken wir uns h unendlich klein und ϱ entsprechend unendlich groß werdend, so daß $\varrho \cdot h = \varrho_\sigma$ unverändert bleibt, so ändert sich dadurch das Potential nicht merklich, wir haben es dann aber mit einer endlichen Flächendichte zu tun.

Ebenso spricht man von Liniendichte, wenn $dm = \varrho_s ds$ ist, wo ds das Element einer Linie bedeutet und ϱ_s endlich ist.

In ähnlicher Weise wie in Nr. **57** läßt sich zeigen, daß das Potential auch in unmittelbarer Nähe einer mit Flächendichte belegten Fläche σ endlich und beim Durchgang durch die Fläche stetig bleibt. Dasselbe gilt für die Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial s}$, wenn s eine tangentiale Richtung an σ bedeutet, aber nicht für $\frac{\partial V}{\partial n}$, unter n die Normalenrichtung verstanden (vgl. Nr. **61** (7)).

59. Der Gaußsche Satz. Das Oberflächenintegral $\int \mathfrak{A}_n d\sigma$ eines beliebigen Vektors $\mathfrak{A}$ über eine geschlossene Fläche σ mit der äußeren Normalen n soll in ein Raumintegral verwandet werden.

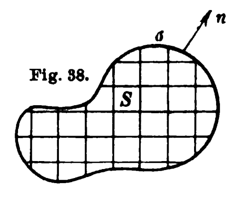


Fig. 38.

Zu dem Zwecke zerlegen wir den von σ umschlossenen Raum S (vgl. Fig. 38) durch Ebenen, welche den Koordinatenebenen parallel sind, in unendlich kleine Parallelepipeda mit den Kanten dx, dy, dz und bilden das Integral $\int \mathfrak{A}_n d\sigma$ über die Oberfläche eines solchen Parallelepipeds.

Die rechte Seitenfläche vom Inhalte $dy\,dz$ und der äußeren Normalen x (vgl. Fig. 39) liefert zu dem Integral den Beitrag

$\mathfrak{A}_x\,dy\,dz$, während die linke Seitenfläche, deren äußere Normale $-x$ ist, den Beitrag $-\mathfrak{A}_x\,dy\,dz$ liefert. Beide würden sich vollkommen aufheben, wenn nicht die rechte Seitenfläche die x-Koordinate $x + dx$ hätte, während die linke Seitenfläche die x-Koordinate x hat. Man muß also an der rechten Seitenfläche $\mathfrak{A}_x$ für den Argumentwert $x + dx$ nehmen, und es ist nach dem Taylorschen Satze

$$\mathfrak{A}_x(x + dx) = \mathfrak{A}_x + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}\,dx,$$

Fig. 39.

so daß die Summe

$$\left(\mathfrak{A}_x + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz - \mathfrak{A}_x\,dy\,dz = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

wird.

Fügt man noch die Beiträge der anderen beiden Flächenpaare des Parallelepipeds hinzu, so erhält man als Wert des Oberflächenintegrals

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

oder, da man

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{A} \tag{1}$$

(sprich Divergenz $\mathfrak{A}$) zu bezeichnet pflegt, so wird das Oberflächenintegral

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} \cdot dS.$$

Bilden wir diesen Ausdruck für alle Parallelepipede, in die der Raum S zerlegt ist, und summieren, so erhalten wir einerseits

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{A} \cdot dS.$$

Andrerseits heben sich die Beiträge der Oberflächenintegrale der gemeinsamen Fläche zweier aneinander grenzender Parallelepipede auf, da die äußeren Normalen dieser Fläche die entgegengesetzte Richtung haben, je nachdem wir sie zu dem einen oder anderen Parallelepiped rechnen. Es bleiben bei der Summierung der Oberflächenintegrale der einzelnen Parallelepipeda also nur die Beiträge übrig, welche die Grenzfläche σ des Raumes S liefert. Das ist aber $\int \mathfrak{A}_n\,d\sigma$.

Somit erhalten wir den von Gauß zuerst abgeleiteten, für einen beliebigen Raum S mit der Grenzfläche σ gültigen Satz

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{A} \cdot dS = \int \mathfrak{A}_n\,d\sigma. \tag{2}$$

div $\mathfrak{A}$ bedeutet nach (2) also den Grenzwert, dem sich $\frac{\int \mathfrak{A}_n d\sigma}{\int dS}$ mit abnehmendem Volumen $\int dS$ nähert.

Bei der Ableitung dieser Beziehung ist $\mathfrak{A}$ als eine in S stetige Funktion vorausgesetzt worden.

Ist dagegen die Normalkomponente von $\mathfrak{A}$ an einer Fläche σ unstetig, so ergibt das Oberflächenintegral über einen unendlich kleinen Zylinder, dessen Basisflächen $d\sigma$ (vgl. Fig. 40) zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche parallel derselben liegen, und dessen Höhe h unendlich klein gegen die Leardimensionen von $d\sigma$ ist, so daß die Mantelfläche des Zylinders gegen die Basisflächen vernachlässigt werden kann,

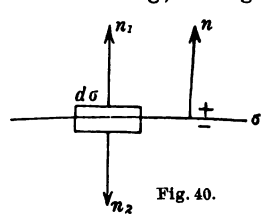


Fig. 40.

$$\mathfrak{A}_{n1}\, d\sigma + \mathfrak{A}_{n2}\, d\sigma,$$

oder, wenn wir eine bestimmte Normalenrichtung n von σ als die positive einführen, so daß $n_1 = -n_2 = n$ ist,

$$(\mathfrak{A}_n^+ - \mathfrak{A}_n^-)\, d\sigma.$$

Nach dem Gaußschen Satze wird also

$$(\mathfrak{A}_n^+ - \mathfrak{A}_n^-)\, d\sigma = \operatorname{div} \mathfrak{A} \cdot h \cdot d\sigma, \tag{3}$$

oder, wenn wir

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} \cdot h = \operatorname{div}_\sigma \mathfrak{A} \tag{4}$$

als Flächendivergenz bezeichnen,

$$\mathfrak{A}_n^+ - \mathfrak{A}_n^- = \operatorname{div}_\sigma \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt, da h unendlich klein, daß an Flächen, an denen $\mathfrak{A}_n$ unstetig ist, div $\mathfrak{A}$ unendlich groß wird.

60. Das Oberflächenintegral $\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$. Es befinde sich eine Masse m außerhalb einer geschlossenen Fläche σ. Wir bilden das Integral $\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$ über die Oberfläche von σ, wenn $V = \frac{m}{r}$ das Potential der Masse, n die äußere Normale der Oberfläche bedeutet.

Der körperliche Winkel $d\omega$, unter dem ein Element $d\sigma$ der Fläche erscheint, ist

$$d\omega = \pm \frac{d\sigma \cos(n, r)}{r^2},$$

wo das obere, resp. untere Vorzeichen gilt, je nachdem der von

m aus gezogene Radiusvektor die Fläche von innen nach außen oder umgekehrt durchsetzt (vgl. Fig. 41). Ferner ist $\frac{\partial r}{\partial n} = \cos(n, r)$. Demnach ergibt sich

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$$

$$= -\int \frac{m}{r^2} \cos(n, r)\, d\sigma$$

$$= m \int \mp d\omega\,.$$

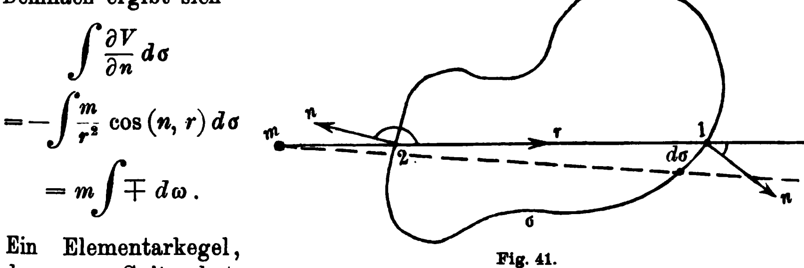


Fig. 41.

Ein Elementarkegel, der m zur Spitze hat, schneidet nun aus σ zwei Elemente heraus, deren Beiträge zum Integral entgegengesetzt gleich sind. Es wird also

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0\,. \tag{1}$$

Diese Formel gilt noch, wenn V das Potential beliebig vieler außerhalb der Fläche befindlicher Massen darstellt. Liegt eine Masse m innerhalb der Fläche, so kann man eine Kugel vom Radins a um m als Zentrum legen und die Kugelfläche K mit zur inneren Begrenzung eines Raumes rechnen (vgl. Fig. 42). Auf diesen Raum ist (1) anwendbar, und es gilt somit

$$\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma + \int_K \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0\,, \tag{2}$$

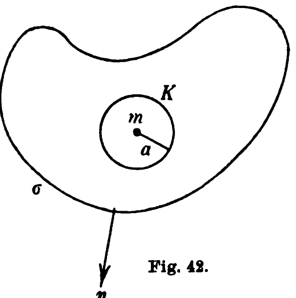


Fig. 42.

wo dn auf K die äußere Normale des Raumes, d. h. die innere Normale der Kugel bedeutet. Es ist also $dn = -da$.

Nun läßt sich aber das über K erstreckte Integral leicht ausführen, denn es ist $\frac{\partial V}{\partial n} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{m}{a^2}$ und $d\sigma = a^2 d\omega$, also

$$\int_K \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int \frac{m}{a^2} a^2 d\omega = 4\pi m \text{ und folglich nach (2)}$$

$$\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = -4\pi m\,. \tag{3}$$

(3) gilt noch, wenn mehrere Massen sich im Innern befinden. Dann erhalten wir also

$$\int\limits_{\sigma} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = -4\pi \sum m_i. \tag{4}$$

Hier können beliebig viele äußere Massen vorhanden sein; $\sum m_i$ bedeutet die Summe sämtlicher inneren Massen.

61. Die Poissonsche Gleichung. Wendet man die Gleichung Nr. 59 (2) auf den Potentialvektor $\mathfrak{A} = \operatorname{grad} V$ an, dessen Komponenten $\mathfrak{A}_x = \frac{\partial V}{\partial x}$, $\mathfrak{A}_y = \frac{\partial V}{\partial y}$, $\mathfrak{A}_z = \frac{\partial V}{\partial z}$ sind, so erhält man mit Beachtung von Nr. 59 (1)

$$\int \operatorname{div} \operatorname{grad} V dS = \int \Delta V \cdot dS = \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma, \tag{1}$$

wenn ΔV eine Abkürzung für

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{2}$$

ist.

Andrerseits ist nach Nr. 60 (4), wenn wir die Massen in S als kontinuierlich mit der Dichte ϱ verteilt annehmen,

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = -4\pi \int \varrho \, dS. \tag{3}$$

Durch Vergleich von (1) und (3) folgt

$$\int \Delta V dS = -\int 4\pi\varrho \, dS, \tag{4}$$

und da der Raum S ganz beliebig ist, so müssen die Integranden der in (4) rechts und links stehenden Integrale einander gleich sein, d. h. es ist

$$\Delta V = -4\pi\varrho. \tag{5}$$

Das ist die Poissonsche Gleichung. Sie geht außerhalb attrahierender Massen, also für $\varrho = 0$, in

$$\Delta V = 0 \tag{6}$$

über. (6) ist die Laplacesche Gleichung der Potentialtheorie.

Wendet man schließlich die Gleichung Nr. 60 (4) auf einen kleinen flachen Zylinder an, dessen Basisflächen zu beiden Seiten einer Fläche σ sich befinden, auf der die Flächendichte ϱ_σ ausgebreitet ist, so erhält man

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^- = -4\pi\varrho_\sigma. \tag{7}$$

62. Kraftlinientheorie. Der Vektor $\mathfrak{g} = k$ grad V ist nach Formel Nr. 56 (8) die Kraft auf die Masse 1 oder die Gravitationsfeldstärke. Auf einem Flächenelement $d\Sigma$, das senkrecht zur Richtung von $\mathfrak{g}$ steht, denke man sich $|g| \cdot d\Sigma$ $\mathfrak{g}$-Linien oder Kraftlinien gezeichnet, wenn $|g|$ der absolute Wert von $\mathfrak{g}$ ist, und zwar soll eine $\mathfrak{g}$-Linie in ihrem ganzen Verlaufe die Richtung des Vektors $\mathfrak{g}$ repräsentieren. Die Differentialgleichung der Kraftlinien lautet also

$$dx : dy : dz = \mathfrak{g}_x : \mathfrak{g}_y : \mathfrak{g}_z \,. \tag{1}$$

Da an *jeder* Stelle so viele $\mathfrak{g}$-Linien auf einer unendlich klein gedachten Flächeneinheit senkrecht stehen sollen, wie $|g|$ angibt, so müssen $\mathfrak{g}$-Linien entspringen und münden können, denn an zwei Stellen eines $\mathfrak{g}$-Linienbündels braucht nicht $|g_1| d\Sigma_1 = |g_2| d\Sigma_2$ zu sein.

Um dies genauer zu übersehen, wollen wir die Bedeutung des Oberflächenintegrals $k\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma$ ermitteln. Es ist, wenn wir $d\Sigma$ als Projektion von $d\sigma$ senkrecht zur Richtung des Vektors $\mathfrak{g}$ auffassen (Fig. 43), $d\Sigma = d\sigma \cos(n, \mathfrak{g})$. Ferner ist

$$\mathfrak{g}_n = k\,\frac{\partial V}{\partial n} = |g| \cdot \cos(n, \mathfrak{g}),$$

also ist

$$|g| \cdot d\Sigma = \mathfrak{g}_n d\sigma = k\,\frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma.$$

Fig. 43.

Da aber $|g| \cdot d\Sigma$ nach der Konstruktionsvorschrift die Anzahl $\mathfrak{g}$-Linien oder Kraftlinien bedeutet, die $d\Sigma$ durchsetzen, und da durch $d\sigma$ ebensoviele hindurchgehen, weil $d\Sigma$ durch dieselben $\mathfrak{g}$-Linien begrenzt wird wie $d\sigma$ (vgl. Fig. 43), so bedeutet $k\frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma$ die Anzahl Kraftlinien, die durch $d\sigma$ in positiver Richtung hindurchtreten.

Ist σ eine geschlossene Fläche, so ist $k\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma$ die Anzahl von innen nach außen σ durchdringender Kraftlinien, und das ist nach Nr. 60 (4)

$$k\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = -\,4\pi k \sum m_i \,. \tag{2}$$

Das bedeutet: *Bei jeder Masseneinheit münden* $4\pi k$ *Kraftlinien.* Da es keine negativen Massen gibt, so können also im Endlichen nur Kraftlinien *münden*, aber keine entspringen; dieselben kommen alle aus dem Unendlichen.

63. Der Greensche Satz und die Eindeutigkeit des Potentials. Bedeutet U eine beliebige Funktion des Orts, die mit ihren ersten Differentialquotienten stetig ist, so ergibt sich für einen beliebigen Raum S durch partielle Inregration

$$\int\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right\}dS=\int\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\cdots\right\}dS$$
$$-\int U\Delta U dS \quad (1)$$

oder vektoranalytisch:

$$\int \mathrm{grad}^2\, U dS=\int \mathrm{div}\,(U\,\mathrm{grad}\,U)dS-\int U\Delta U dS. \quad (1')$$

Für das erste Integral auf der rechten Seite kann man aber nach dem Gaußschen Integralsatz $\int U\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma$ schreiben, wenn σ die Begrenzungsfläche des Raumes S, n die äußere Normale auf σ bedeutet.

Somit lautet (1)

$$\int \mathrm{grad}^2\, U dS=\int U\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma-\int U\Delta U dS. \quad (2)$$

Die Formel (2) ist unter dem Namen des Greenschen Satzes bekannt. Diesen Satz kann man dazu benutzen, nachzuweisen, daß es bei gegebener Massenverteilung nur *eine* Funktion V gibt, die der Gleichung Nr. 61 (5)

$$\Delta V=-4\pi\varrho \quad (3)$$

genügt, wenn V noch den weiteren Bedingungen zu gehorchen hat, daß es im Unendlichen wie $1/R$ verschwindet, unter R die Entfernung von irgend einem festen Punkt im Endlichen verstanden, und daß an gewissen Flächen σ_1 eine Unstetigkeit der Normalkomponente von grad V vorhanden ist, entsprechend der Gleichung Nr. 61 (7)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^+-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^-=-4\pi\varrho_\sigma \quad (4)$$

und an anderen Flächen σ_2, die mit zur Begrenzung des Raumes gehören, V selbst gegeben ist, und daß V im ganzen Raume stetig ist.

Nehmen wir an, es gäbe zwei Funktionen V_1 und V_2, die allen soeben aufgezählten Bedingungen genügen, so bilden wir die Funktion

$$V_1-V_2=U. \quad (5)$$

Diese genügt nach (3) und (4) den Bedingungen

$$\Delta U = 0 \tag{6}$$

im ganzen Raume und

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^{+} - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^{-} = 0 \tag{7}$$

auch an den Flächen σ_1, d. h. U und seine Ableitungen sind im ganzen Raume stetig. An den Flächen σ_2 ist $U = 0$ und im Unendlichen verschwindet U wie $1/R$, also $\frac{\partial U}{\partial n}$ wie $1/R^2$, da aber $d\sigma = R^2 d\omega$ wird, so bleibt immer noch das Produkt $U\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma$ verschwindend klein, selbst wenn man es über einen beliebigen Teil einer unendlich großen Fläche integriert.

Deshalb verschwindet das erste Integral rechts von (2) sowohl an den Flächen σ_2 als auch an der Begrenzungsfläche des Raumes im Unendlichen; das zweite Integral verschwindet wegen (6), also ist $\int \operatorname{grad}^2 U dS = 0$, und da der Integrand wesentlich positiv ist, so muß $\operatorname{grad} U = 0$, also $U = \text{konst.}$ sein. Da aber U im Unendlichen Null ist, so ist es im ganzen Raume Null, d. h. $V_1 = V_2$. V ist somit tatsächlich eindeutig bestimmt.

Einen weiteren Satz von Green leiten wir folgendermaßen ab. Durch partielle Integration ergibt sich die Gleichung

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \cdots\right)dS = \int\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \cdots\right)dS - \int U\Delta V dS \tag{8}$$

oder vektoranalytisch:

$$\int(\operatorname{grad} U, \operatorname{grad} V)\,dS = \operatorname{div}(U \operatorname{grad} V)\,dS - \int U\Delta V dS. \tag{8'}$$

Vertauschen wir in dieser Formel U mit V und subtrahieren die so erhaltene Gleichung von (8'), so ergibt sich, da

$$\int \operatorname{div}(U \operatorname{grad} V)\,dS = \int U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma$$

ist,

$$\int\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma = \int(U\Delta V - V\Delta U)\,dS. \tag{9}$$

Diesen Satz von Green kann man verwenden, um ein Integral der Gleichung

$$\Delta V = -4\pi\varrho \tag{10}$$

zu finden.

Da die Gleichung (9) nur gilt, wenn U und V mit ihren ersten Differentialquotienten endlich und stetig sind, so dürfen wir, falls der Aufpunkt p im Innern des Raumes S liegt, nur dann

$$U = \frac{1}{r} \tag{11}$$

setzen, wo r den Abstand eines variablen Punktes $q(x'\,y'\,z')$ von dem festen Punkte $p(x, y, z)$ bedeutet, wenn wir den Punkt p durch eine Hülle, also etwa durch eine Kugel K vom Radius a mit p als Zentrum von S ausschließen und K mit zur Oberfläche von S rechnen.

Da $\Delta U = \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ ist, so ergibt sich dann aus (9)

$$\int \frac{\Delta V}{r}\,dS = \int\limits_{\sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)d\sigma$$

$$+ \int\limits_{K}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)d\sigma. \tag{12}$$

Wählt man für S den unendlichen Raum, so fällt das erste Integral rechts fort, wenn V wie $1/R$ im Unendlichen verschwindet. Im zweiten Integral ist $dn = -da$, $r = a$, $d\sigma = a^2 d\omega$, also

$$\int\limits_{K}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)d\sigma = -\int\left(+\frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{V}{a^2}\right)a^2 d\omega,$$

und wenn man a kleiner und kleiner werden läßt, wird die rechte Seite $-4\pi V_p$, so daß nach (12) und (10)

$$V_p = \int \frac{\varrho}{r}\,dS \tag{13}$$

folgt.

Wir haben somit (13) als Integral von (10) gefunden, wie wir (10) früher als Folge von (13) (vgl. Nr. 61 (5)) abgeleitet hatten.

64. Das Potential einer Kugelschale. Um die Anziehung zu bestimmen, die eine Kugelschale, deren Dichte ϱ nur Funktion des Radius u ist, auf einen Massenpunkt m ausübt, bilden wir das Potential

$$V = \int \frac{\varrho\,dS}{r}. \tag{1}$$

Zu dem Zwecke führen wir räumliche Polarkoordinaten u und ϑ ein, indem wir die Verbindungslinie R von m mit dem Kugelzentrum zur Polarachse wählen und schneiden eine unendlich dünne Kugelschale vom Radius u und der Dicke du aus der Kugelschale heraus (Fig. 44). Ihr Beitrag zum Potential ist

$$dV = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\varrho}{r}\, 2\pi u^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot du\,.$$

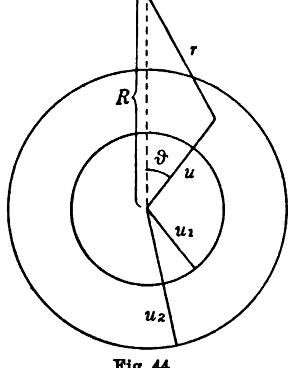


Fig. 44.

Nun ist aber

$$r^2 = R^2 + u^2 - 2Ru\cos\vartheta,$$

also

$$r\,dr = Ru \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

so daß

$$dV = \int \varrho \cdot \frac{2\pi u\, du\, dr}{R}$$

wird. Den Werten $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ entsprechen die Werte $u - R$ und $u + R$ resp. $R - u$ und $R + u$ für r, je nachdem m im Hohlraum der Kugelschale oder außerhalb der Kugelschale liegt. Im ersteren Falle wollen wir m einen inneren, im zweiten einen äußeren Punkt nennen.

Somit ergibt die Integration nach r für $R < u_1$

$$dV_i = 4\pi u\, du \cdot \varrho, \quad V_i = 4\pi \int_{u_1}^{u_2} \varrho(u) u \cdot du, \tag{2}$$

für $R > u_2$

$$dV_a = \frac{4\pi u^2 du \cdot \varrho}{R}, \quad V_a = \frac{4\pi}{R} \int_{u_1}^{u_2} \varrho(u) u^2 du = \frac{M}{R}, \tag{3}$$

wo M die Masse der Kugelschale bedeutet.

V_i ist von den Koordinaten von m ganz unabhängig. Da man aber die Kraft, die auf m wirkt, durch Differentiation des Potentials nach den Koordinaten von m erhält, so folgt:

Auf einen Punkt im Hohlraum einer Kugelschale, deren Dichte nur Funktion des Radius ist, wirkt keine Kraft.

Die Formel (3) ergibt: *Die Anziehung einer Kugelschale auf einen äußeren Punkt ist dieselbe, als wenn die Gesamtmasse der Kugel im Mittelpunkt konzentriert wäre.*

Das gilt auch noch, wenn die Kugel eine Vollkugel ist, ein Resultat, das für die Astronomie Bedeutung hat.

Liegt der Massenpunkt im Innern der Massen der Kugelschale, ist also $u_1 < R < u_2$, so können wir uns die Kugelschale durch eine Kugelfläche vom Radius R in zwei zerlegt denken, und m ist ein äußerer Punkt für die Kugelschale mit den Radien u_1 und R, dagegen ein innerer Punkt für die Kugelschale mit den Radien R und u_2. Letztere wirkt also nicht auf m, erstere ergibt nach (2) und (3) das Potential

$$V = \frac{4\pi}{R}\int\limits_{u_1}^{R} \varrho(u) u^2 du + 4\pi \int\limits_{R}^{u_2} \varrho(u) u\, du, \tag{4}$$

und für konstante Dichte ϱ

$$V = \frac{4\pi}{3R} \varrho (R^3 - u_1^3) + 2\pi\varrho(u_2^2 - R^2). \tag{5}$$

Für eine Vollkugel $(u_1 = 0)$ wird

$$V = -\frac{2\pi}{3}\varrho R^2 + 2\pi\varrho u_2^2, \tag{6}$$

oder die Anziehungskraft, die aus Symmetriegründen natürlich die entgegengesetzte Richtung des Radius R hat,

$$\mathfrak{F} = km\frac{\partial V}{\partial R} = -k\frac{4\pi}{3}\varrho R m. \tag{7}$$

Es wirkt also eine Kraft, die dem Abstand vom Zentrum proportional ist. (Quasielastische Kraft; vgl. Theorie der Schwingungen.) Der Mittelpunkt ist für den angezogenen Massenpunkt eine Lage stabilen Gleichgewichts.

65. Das Potential des Ellipsoids. Das Potential des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

welches homogen mit der Masse der Dichte ϱ erfüllt ist, lautet im Innenraum

$$V_i = \pi\varrho\int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{D} \tag{2}$$

und im Außenraum.

$$V_a = \pi\varrho\int\limits_\lambda^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{D}. \tag{3}$$

Hier ist zur Abkürzung

$$D = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right)\left(1 + \frac{s}{b^2}\right)\left(1 + \frac{s}{c^2}\right)} \tag{4}$$

gesetzt, und λ ist die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1\,, \tag{5}$$

wenn x, y, z die Koordinaten des Aufpunktes bedeuten, der außerhalb des Ellipsoids (1) liegt.

Daß (2) und (3) die verlangten Ausdrücke sind, kann man dadurch beweisen, daß man zeigt, daß sie allen charakteristischen Bedingungen des Potentials genügen unter Zuhilfenahme des Eindeutigkeitsbeweises (Nr. **63**).[1])

Abgeleitet wurden die Formeln (2) und (3) zuerst von Dirichlet mit Hilfe der Theorie des diskontionuierlichen Faktors.[2])

Ist das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, so vereinfachen sich die Formeln (2) und (3) beträchtlich, und die in ihnen enthaltenen elliptischen Integrale gehen in einfachere Transzendente über.

Der schwere Kreisel.

66. Die Bewegungsgleichungen und ihre Integrale. Es soll als wichtigster Fall nur der symmetrische Kreisel behandelt werden. Sein Schwerpunkt S liege im Abstande l vom Drehpunkte auf der Symmetrieachse.

Die potentielle Energie des Kreisels ist

$$V = Mgl\cos\vartheta = P\cos\vartheta\,, \tag{1}$$

wenn P zur Abkürzung für Mgl gesetzt ist, und ϑ den Winkel bedeutet, den die Symmetriehalbachse, auf der S liegt, mit der nach oben gerichteten Vertikalen bildet.

Wie beim kräftefreien Kreisel lauten zwei Integrale (vgl. Nr. **34** (15))

$$\begin{aligned}(A\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\,\dot\psi + C\cos\vartheta\,\dot\varphi &= K_1\\ C\cos\vartheta\,\dot\psi + C\dot\varphi &= K_2\,,\end{aligned} \tag{2}$$

aus denen sich

$$A\sin^2\vartheta\,\dot\psi = K_1 - K_2\cos\vartheta$$

1) Vgl. z. B. H. Weber-Riemann, *Die partiellen Differentialgleichungen der math. Phys.* **1**, 2. Aufl., Braunschweig 1910, S. 264.

2) Siehe Ostwalds *„Klassiker der exakten Wissenschaften“* Nr. 19.

ergibt, oder wenn man

$$\cos\vartheta = u$$

setzt,

$$\dot\psi = \frac{K_1 - K_2 u}{A(1-u^2)} \quad \text{und} \quad \dot\varphi = \frac{K_2}{C} - \frac{(K_1 - K_2 u)u}{A(1-u^2)}. \tag{3}$$

K_2 ist der Drehimpuls bezüglich der Kreiselsymmetrieachse (vgl. die aus (14) folgende Gleichung für $\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}$ der Nr. **34**), er bleibt nach (2) konstant, d. h. es ist (vgl. Nr. **33** (8))

$$\frac{K_2}{C} = r_0,$$

so daß die Gleichungen (3) sich schreiben

$$\dot\psi = \frac{\beta - b r_0 u}{1-u^2}, \quad \dot\varphi = r_0(1-b) + \frac{b r_0 - \beta u}{1-u^2}, \tag{4}$$

wenn

$$\frac{K_1}{A} = \beta, \quad \frac{C}{A} = b$$

gesetzt ist.

Schließlich haben wir noch die Energiegleichung (vgl. Nr. **34** (14))

$$A(\dot\vartheta^2 + \dot\psi^2 \sin^2\vartheta) + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta)^2 + 2P\cos\vartheta = 2h, \tag{5}$$

die mit Berücksichtigung von (4) die Form annimmt,

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (\alpha - au)(1-u^2) - (\beta - b r_0 u)^2, \tag{6}$$

wenn

$$\alpha = \frac{2h - C r_0^2}{A}, \quad a = \frac{2P}{A}$$

gesetzt wird.

Bezeichnen wir die rechte Seite von (6) mit U, schreiben also

$$U = (\alpha - au)(1-u^2) - (\beta - b r_0 u)^2, \tag{7}$$

so wird

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}} \tag{8}$$

und nach (4)[1])

$$\begin{aligned} \psi &= \int \frac{\beta - b r_0 u}{1-u^2} \frac{du}{\sqrt{U}} \\ \varphi &= r_0(1-b)t + \int \frac{b r_0 - \beta u}{1-u^2} \frac{du}{\sqrt{U}}. \end{aligned} \tag{9}$$

---

1) Lagrange, *Méc. anal. s.* **2**, *sect.* IX Nr. 35, Paris 1815, S. 264.

Da nach (7) U für $u = \pm 1$ im allgemeinen < 0 ist, so muß $U = 0$ zwei reelle Wurzeln e_1 und e_2 zwischen -1 und $+1$ haben. Da U ferner für $u = +\infty$ selber $+\infty$ wird, wenn $P > 0$ ist, so liegt in diesem Falle, auf den wir uns beschränken wollen, die dritte Wurzel e_3 zwischen $+1$ und $+\infty$.

U läßt sich also in der Form

$$U = \frac{2P}{A}(u - e_1)(e_2 - u)(e_3 - u) \tag{10}$$

schreiben, und $e_1 = \cos\vartheta_1$ resp. $e_2 = \cos\vartheta_2$ geben die beiden Parallelkreise, zwischen denen die Kreiselspitze sich bewegen muß.

Durch die Substitution

$$\frac{u - e_1}{e_2 - e_1} = \sin^2\gamma \tag{11}$$

nimmt (8) mit Beachtung von (10) die Form an

$$t = \sqrt{\frac{2A}{P(e_3 - e_1)}}\int_0^\gamma \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\gamma}}, \tag{12}$$

wenn die Zeit von einem tiefsten Punkte der Bahn an gerechnet und

$$\gamma = \arcsin\sqrt{\frac{u - e_1}{e_2 - e_1}}, \quad k = \sqrt{\frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1}} \tag{13}$$

gesetzt ist.

Die Dauer der Bewegung der Kreiselspitze vom tiefsten $(u = e_1)$ bis zum höchsten $(u = e_2)$ Punkte der Bahn ist also

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{2A}{P(e_3 - e_1)}}\, K\left(\sqrt{\frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1}}\right), \tag{14}$$

wenn K das vollständige elliptische Integral erster Gattung bezeichnet.

Durch Umkehrung von (12) mit Benutzung der in (13) gegebenen Formel für γ folgt

$$\cos\vartheta = e_1 + (e_2 - e_1)\,\mathrm{sn}^2\sqrt{\frac{P(e_3 - e_1)}{2A}}\,t. \tag{15}$$

Wir haben es also mit einer periodischen Bewegung der Kreiselspitze zu tun mit der Periode T bezüglich ϑ, die durch (14) gegeben ist.

Drücken wir in den beiden Gleichungen (9) u nach (11) durch γ aus, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\psi &= H_1 \Pi(k, \gamma, p_1) + H_2 \Pi(k, \gamma, p_2) \\
\varphi &= H_1 \Pi(k, \gamma, p_1) - H_2 \Pi(k, \gamma, p_2) + r_0(1-b)t,
\end{aligned} \tag{16}
$$

wenn

$$
H_1 = \frac{\beta + b r_0}{1+e_1} \sqrt{\frac{A}{2P(e_3 - e_1)}}, \quad H_2 = \frac{\beta - b r_0}{1-e_1} \sqrt{\frac{A}{2P(e_3 - e_1)}}
$$

$$
p_1 = \frac{e_2 - e_1}{1+e_1}, \quad p_2 = -\frac{e_2 - e_1}{1-e_1}
$$

ist und

$$
\Pi(k, \gamma, p) = \int_0^\gamma \frac{1}{1 + p \sin^2\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\gamma}}
$$

das elliptische Integral dritter Gattung mit dem Argument γ, dem Parameter p und dem Modul k bedeutet, wobei γ und k wie oben durch (13) bestimmt sind.

Hier sind ψ und φ von einem Punkte der Bahn an gerechnet, in dem die Kreiselspitze ihre tiefste Lage hat.

Die erste Gleichung (16) ergibt ψ als Funktion von γ und somit nach (11) auch als Funktion von $u = \cos\vartheta$, d. h. diese Gleichung resp. die erste Gleichung (9) stellt direkt die Gleichung der Bahnkurve der Kreiselspitze dar.

Die halbe Spannweite $\overline{\psi}$ der Bögen, die die Kreiselspitze beschreibt, erhält man, wenn man in (16) $\gamma = \frac{\pi}{2}$ setzt. So ergibt sich

$$
\overline{\psi} = H_1 \Pi\left(k, \frac{\pi}{2}, p_1\right) + H_2 \Pi\left(k, \frac{\pi}{2}, p_2\right). \tag{17}
$$

Nun ist aber[1])

$$
\Pi\left(\frac{\pi}{2}, p\right) = K \cdot E(p) - pE,
$$

wenn K und E die vollständigen elliptischen Integrale erster resp. zweiter Gattung und $E(p)$ das unvollständige Integral zweiter Gattung bedeuten. Daraus folgt

$$
\overline{\psi} = K[H_1 E(p_1) + H_2 E(p_2)] - E(H_1 p_1 + H_2 p_2). \tag{18}
$$

67. Die pseudoreguläre Präzession. Ist der Impuls K_2 in Richtung der Figurenachse sehr groß, so daß $\frac{K_1 - K_2 \cos\vartheta}{K_2}$

1) Vgl. z. B. H. Durège, *Theorie der ellipt. Funktionen*, 3. Aufl., Leipzig 1878, S. 80.

stets eine kleine Zahl bleibt, und daß auch $\frac{AP}{K_2^2}$ sehr klein ist, so fallen die beiden Wurzeln e_1 und e_2 der Gleichung $U=0$ nahezu zusammen, wie man erkennt, wenn man $U(e_1)=0$ setzt und nachweist, daß $e_2-e_1=-2\frac{U'(e_1)}{U''(e_1)}$, eine Gleichung, die aus der Taylorschen Entwicklung $U(e_2)=U(e_1)+U'(e_1)(e_2-e_1)+U''(e_1)\frac{(e_2-e_1)^2}{2}$ folgt, tatsächlich sehr klein ist (vgl. Formel (5)). Dann wird also die Kreiselachse ihre Neigung gegen die Vertikale nur sehr wenig verändern. In diesem Falle vereinfachen sich die Formeln beträchtlich.

Dann wird nämlich nach Nr. 66 (13) k sehr klein, also nach Nr. 66 (15)

$$u=\cos\vartheta=e_1+(e_2-e_1)\sin^2\sqrt{\frac{P(e_3-e_1)}{2A}}\,t, \tag{1}$$

oder, wenn wir $\sin^2 x$ durch $\cos 2x$ ausdrücken,

$$u=\frac{e_1+e_2}{2}-\frac{e_2-e_1}{2}\cos\sqrt{\frac{2P(e_3-e_1)}{A}}\,t=u_0+\delta u. \tag{2}$$

Da aber nach Nr. 66 (4)

$$\dot\psi=\frac{\beta-br_0u}{1-u^2}$$

ist, so ergibt sich mit Vernachlässigung höherer Potenzen von δu

$$\dot\psi=\frac{\beta-br_0u_0}{1-u_0^2}+\frac{br_0(1+u_0^2)-2\beta u_0}{(1-u_0^2)^2}\,\frac{e_2-e_1}{2}\cos\sqrt{\frac{2P(e_3-e_1)}{A}}\,t \tag{3}$$

und durch Integration nach t

$$\psi=\frac{\beta-br_0u_0}{1-u_0^2}\,t$$

$$+\sqrt{\frac{A}{2P(e_3-e_1)}}\,\frac{br_0(1+u_0^2)-2\beta u_0}{(1-u_0^2)^2}\,\frac{e_2-e_1}{2}\sin\sqrt{\frac{2P(e_3-e_1)}{A}}\,t. \tag{4}$$

Vernachlässigt man die periodischen Glieder in (2) und (4), so hat man es mit einer regulären Präzession zu tun. Die periodischen Glieder stellen eine *Nutation* der Kreiselspitze dar.[1]

Voraussetzung dieser Formeln ist, daß $\vartheta \neq 0$ ist, d. h. daß der Kreisel kein aufrechter ist.

---

1) Vgl. F. Klein u. A. Sommerfeld, *Theorie des Kreisels* 2, Leipzig 1898, S. 276 u. 291 ff., wo auch der Grad der Annäherung diskutiert ist.

Die in diesen Formeln vorkommende Differenz $\frac{e_2 - e_1}{2}$ hat den kleinen Wert

$$\frac{e_2 - e_1}{2} = \frac{K_1 - K_2 \cos \vartheta_0}{K_2} - \frac{A P}{K_2{}^2} \sin^2 \vartheta_0, \tag{5}$$

und e_3 nimmt den großen Wert

$$e_3 = \frac{K_2{}^2}{2 A P} \tag{6}$$

an.

Mit diesen Näherungsausdrücken gehen die Formeln (2) und (4) in die folgenden über, wenn wir noch den Anfangspunkt der Zeit so verschieben, daß die Kreiselspitze für $t = 0$ im mittleren Parallelkreis liegt[1]),

$$\cos \vartheta = \cos \vartheta_0 + \left(\frac{K_1 - K_2 \cos \vartheta_0}{K_2} - \frac{A P}{K_2{}^2} \sin^2 \vartheta_0\right) \sin \frac{K_2}{A} t \tag{2'}$$

$$\psi = \frac{P}{K_2} t + \left(\frac{K_1 - K_2 \cos \vartheta_0}{K_2 \sin^2 \vartheta_0} - \frac{A P}{K_2{}^2}\right) \cos \frac{K_2}{A} t. \tag{4'}$$

68. Die Präzession der Erdachse. Die Erdachse behält nicht dauernd dieselbe Richtung im Raume, sondern beschreibt in ca. 26000 Jahren einen Kreiskegel um die Normale der Ekliptik. Der Winkel zwischen dieser Normalen und der Erdachse beträgt ungefähr $23\,^1/_2\,^0$.

Diese Erscheinung findet ihre Erklärung in der Kraftwirkung von Sonne und Mond auf die rotierende Erde, und zwar speziell auf den um den Äquator befindlichen, durch die Abplattung hervorgerufenen Massenwulst.

Sonne und Mond haben die Tendenz, die Ebene dieses Massenrings in ihre Ebene zu drehen; es wirken also Drehmomente um die Knotenlinien der Erde bezüglich der scheinbaren Sonnenbahn und der Mondbahn. Die Drehmomente lassen sich durch eine einfache Reihenentwicklung des Potentials darstellen[2]), sie verursachen eine Rotation der Figurenachse um die Normale auf der Ekliptik, und zwar ergibt es sich, daß die Wirkung des Mondes trotz seiner kleineren Masse infolge seiner geringeren Entfernung über doppelt so groß ist als die der Sonne.

---

1) Vgl. F. Klein und A. Sommerfeld, ibid. S. 302.
2) Vgl. z. B. F. Klein u. A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels* 3, Leipzig 1903, S. 633.

Kapitel V.

Festlegung eines Koordinatensystems. Erddrehung. Zentrifugalkraft.

69. Das Inertialsystem. In neuerer Zeit ist mit Recht die Frage aufgeworfen worden, für welches Bezugssystem und für welches Zeitmaß das Trägheitsgesetz resp. die Newtonschen Bewegungsgleichungen gelten, da der Begriff der absoluten Bewegung doch vom physikalischen Standpunkte aus sinnlos sei. Um die Klärung dieser Frage haben sich Mach[1]), Lange[2]), Streintz[3]) und Carl Neumann[4]) besonders verdient gemacht.

Nach Lange wird ein räumlich-zeitliches Bezugssystem, in dem die Newtonschen Bewegungsgleichungen gelten, oder spezieller, in dem isolierte Punkte sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, ein Inertialsystem genannt.

Die Substitutionen

$$\begin{aligned} x' &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 (t - t_0) \\ y' &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 (t - t_0) \\ z' &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4 (t - t_0) \end{aligned} \tag{1}$$

enthalten die 16 Konstanten $\alpha, \alpha_1, \ldots, t_0$, von denen aber die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ nicht voneinander unabhängig sein, sondern den Relationen einer orthogonalen Koordinatentransformation gehorchen sollen. Diese Substitutionen lassen die Newtonschen Bewegungsgleichungen invariant, also gibt es ∞^{10} Inertialsysteme.

Zwei verschiedene Inertialsysteme haben somit im allgemeinen verschiedene Anfangspunkte, verschiedene Achsenrichtungen, verschiedenen Anfangspunkt der Zeit, und der Ursprung des einen

---

1) E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, 5. Aufl., Leipzig 1904, S. 238.

2) L. Lange, *Über das Beharrungsgesetz*, Ber. d. Ges. d Wiss. zu Leipzig 37, 1885, S. 353; *Die Geschichte und Entwicklung des Bewegungsbegriffes*, Leipzig 1886; *Das Inertialsystem vor dem Forum der Naturforschung*, Wundts philosophische Studien 20, 1902.

3) H. Streintz, *Die physik. Grundlagen d. Mechanik*, Leipzig 1883.

4) Carl Neumann, *Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie*, Leipzig 1870; *Über die sogenannte absolute Bewegung*, Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904. Weitere Literatur findet sich in dem Referat von A. Voß, *Encycl. d. math. Wissensch.* 4 I, S. 30ff., Leipzig 1901—1908.

hat gegen den des anderen eine konstante geradlinige Geschwindigkeit, dagegen ist die Zeiteinheit in beiden dieselbe, wenigstens wenn man fordert, daß die Massen und die Gravitationskonstante in den verschiedenen Bezugssystemen dieselben Werte haben sollen.

Um zu sehen, inwieweit das Newtonsche Gesetz ein rein formales Gesetz ohne Inhalt ist, und inwieweit es objektive Gesetzmäßigkeiten enthält, stellen wir folgende Mannigfaltigkeitsbetrachtungen an.[1])

Es seien in einem beliebigen empirischen Koordinatensystem (z. B. dem Fixsternsystem) ξ, η, ζ zu ω Zeitpunkten einer empirischen Zeitskala (die z. B. durch die Erdrotation gegeben ist) die Koordinaten von n Massenpunkten gegeben. Gesucht werde in jedem der ω Zeitpunkte die Lage eines Koordinatensystems x, y, z und ω Werte $t_1, t_2, \ldots, t_\omega$ eines Parameters t, so daß die Bewegung in diesem Bezugssystem sich nach dem Newtonschen Gesetz vollzieht.

Zwischen den x, y, z und ξ, η, ζ bestehen nun die Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \tag{2}$$

in denen die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \ldots, \gamma_3$ den Relationen der Richtungskosinus bei Koordinatentransformationen genügen, so daß (2) 6 voneinander unabhängige Koeffizienten enthält, die zu den ω Zeiten verschiedene Werte haben können.

Gegeben sind also $3n\omega$ Koordinaten $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Gesucht sind 6ω Transformationskoeffizienten, ω Zeitwerte $t_1, \ldots, t_\omega$ und $3n\omega$ Koordinaten x, y, z. Letztere drücken sich aber durch die $6n$ Größen aus, welche z. B. die Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten bestimmen, da ja die späteren Lagen durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen berechenbar sind. Da es aber, wie wir oben gesehen hatten, ∞^{10} Inertialsysteme gibt, so bleiben 10 von den gesuchten Größen willkürlich, und man hat

$3n\omega$ gegebene und $6n + 7\omega - 10$ gesuchte Größen.

Damit die gesuchten Größen auf jeden Fall widerspruchsfrei gefunden werden können, muß also

$$3n\omega \leqq 6n + 7\omega - 10 \tag{3}$$

---

1) Vgl. E. Anding, *Über Koordinaten und Zeit*, Encycl. d. math. Wiss. 6 II, Art. 1, S. 3. Man beachte auch H. Seeliger, *Über die sogenannte absolute Bewegung*, Münchener Ak. Ber. 1906, S. 85.

sein. Für drei Massenpunkte z. B. ($n = 3$) muß also $\omega \leqq 4$ sein, d. h. die Behauptung, daß 3 Himmelskörper sich auf Grund von Positionsbeobachtungen zu 4 Zeitpunkten nach dem Newtonschen Gesetz bewegen, ist ohne realen Inhalt. Erst die Tatsache, daß sie dies zu mehr Zeitpunkten, nämlich zu allen Zeiten, tun, ist der Ausspruch eines physikalischen Gesetzes.

Nun ist es nicht völlig ausgeschlossen, daß die Planeten sich nicht ganz genau nach dem Newtonschen Gesetze bewegen[1]), denn es ergeben sich Differenzen zwischen den nach dem Newtonschen Gesetze berechneten und beobachteten säkularen Änderungen der Elemente der Planetenbahnen, die die wahrscheinlichen Fehler der Beobachtungen überschreiten. Das hat zu dem Gedanken geführt, das empirische Koordinatensystem könnte möglicherweise kein Inertialsystem sein, sondern gegenüber einem Inertialsystem eine kleine Drehgeschwindigkeit besitzen.

Anding[2]) zeigt, daß man die Fehler merklich zum Verschwinden bringen kann durch die Annahme, daß das empirische System sich in 100 Jahren um — 7,3″ gegen das Inertialsystem dreht, und zwar um den Pol der Ekliptik.[3]) Allerdings ist diese Auffassung nur vom Standpunkte einer reinen Planetenmechanik zu halten, wie Anding bemerkt, denn sie hat zur Folge, daß der gesamte Fixsternkomplex sich in einer rückläufigen Bewegung gegen das Inertialsystem befindet, wofür ein mechanischer Grund nicht recht einzusehen ist.

Inwiefern man die Rotation des empirischen Systems im Inertialsystem gewissen Störungskräften äquivalent setzen kann — ein Satz, der zur Ableitung der obigen Resultate gebraucht worden ist —, wird man durch die Ausführungen der nächsten Nummer einsehen.

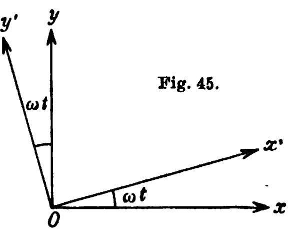


Fig. 45.

70. Das d'Alembertsche Prinzip im rotierenden Koordinatensystem. Von zwei Koordinatensystemen sei das eine x, y, z in Ruhe, während das andere x', y', z' mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiere. Die z'-Achse sei die Rotationsachse, sie falle mit der z-Achse zusammen (Fig. 45).

---

1) S. Newcomb, *The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy*, Washington 1895.
2) E. Anding, l. c.
3) Vgl. auch H. Seeliger, l. c.

In die Gleichung des d'Alembertschen Prinzips

$$\sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x + \cdots\right) = \sum (\mathfrak{F}_x\,\delta x + \cdots) \tag{1}$$

mögen anstatt der x, y, z die x', y', z' eingeführt werden, die durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ y &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \end{aligned} \tag{2}$$

miteinander verknüpft sind.

Schreiben wir zur Abkürzung $\cos \omega t = c$, $\sin \omega t = s$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= x'c - y's \\ y &= x's + y'c \end{aligned} \tag{2'}$$

und

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta x' c - \delta y' s \\ \delta y &= \delta x' s + \delta y' c, \end{aligned} \tag{3}$$

da bei der Bildung der virtuellen Verrückungen die Zeit nicht mit variiert wird.

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d^2 x'}{dt^2}\,c - \frac{d^2 y'}{dt^2}\,s - 2\,\frac{dx'}{dt}\,s\omega - 2\,\frac{dy'}{dt}\,c\omega - x'c\omega^2 + y's\omega^2 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d^2 x'}{dt^2}\,s + \frac{d^2 y'}{dt^2}\,c + 2\,\frac{dx'}{dt}\,c\omega - 2\,\frac{dy'}{dt}\,s\omega - x's\omega^2 - y'c\omega^2 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d^2 z'}{dt^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Folglich ergibt sich aus (1)

$$\sum m \left\{ \left(\frac{d^2 x'}{dt^2} - 2\,\frac{dy'}{dt}\,\omega - x'\omega^2\right)\delta x' + \left(\frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\,\frac{dx'}{dt}\,\omega - y'\omega^2\right)\delta y' + \frac{d^2 z'}{dt^2}\,\delta z' \right\} = \sum (\mathfrak{F}_{x'}\delta x' + \mathfrak{F}_{y'}\delta y' + \mathfrak{F}_{z'}\delta z'). \tag{5}$$

Das im ruhenden Koordinatensystem gültige d'Alembertsche Prinzip (1) ist also nach (5) auch im rotierenden System gültig, wenn man eine Zusatzkraft mit den Komponenten

$$m\left(\omega^2 x' + 2\omega\,\frac{dy'}{dt}\right), \quad m\left(\omega^2 y' - 2\omega\,\frac{dx'}{dt}\right), \quad 0 \tag{6}$$

zu $\mathfrak{F}$ *hinzufügt* und lautet

$$\sum m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\,\delta x'+\cdots\right)=\sum\left\{\mathfrak{F}_{x'}+m\left(\omega^2 x'+2\omega\frac{dy'}{dt}\right)\right\}\delta x'$$
$$+\sum\left\{\mathfrak{F}_{y'}+m\left(\omega^2 y'-2\omega\frac{dx'}{dt}\right)\delta y'\right\}+\mathfrak{F}_{z'}\delta z'. \qquad (7)$$

71. Anwendungen. 1. *Ein materieller Punkt in relativer Ruhe.* Es sei $\frac{dx'}{dt}=0,\ \frac{dy'}{dt}=0$. Dann lautet nach Nr. 70 (6) die Zusatzkraft $m\omega^2 x,\ m\omega^2 y,\ 0$. Diese Kraft heißt die *Zentrifugalkraft*. Ihre Größe ist $m\omega^2\varrho$, wenn $\varrho=\sqrt{x^2+y^2}$ den Abstand von der Rotationsachse bedeutet. Da die Geschwindigkeit im ruhenden System $v=\omega\varrho$ ist, so folgt für die Zentrifugalkraft auch $\frac{mv^2}{\varrho}$.

Im *rotierenden* System ist das Problem der relativen Ruhe also auf ein statisches zurückgeführt, wenn neben den eigentlichen Kräften noch die Zentrifugalkraft eingeführt wird.

Vom *ruhenden* System aus beurteilt ist eine Zentripetalbeschleunigung $\frac{v^2}{\varrho}=\varrho\omega^2=v\omega$ vorhanden.

Bei ruhender Erde sei die Anziehungskraft auf einen Körper in der Nähe der Erdoberfläche mG. Dann ist das Gewicht mg bei rotierender Erde die Resultante aus mG und der Zentrifugalkraft $C=m\omega^2\varrho$. Der Winkel zwischen der Richtung von G und dem Äquator heiße φ, der Winkel zwischen der Richtung von g und dem Äquator heiße ψ (Fig. 46).

Nach dem Parallelogrammgesetz muß nun sein

$$\left.\begin{aligned}-mG\cos\varphi+m\omega^2\varrho&=-mg\cos\psi\\ -mG\sin\varphi&=-mg\sin\psi.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Ferner ist $\varrho=R\cos\varphi$, wenn R den Erdradius bedeutet. Mit Vernachlässigung von ω^4 ergibt sich

$$g=G\left(1-\frac{\omega^2 R}{G}\cos^2\varphi\right)\qquad(2)$$

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{1-\frac{\omega^2 R}{G}}.\qquad(3)$$

Fig. 46.

Hieraus folgt

$$\psi-\varphi=\frac{1}{2}\,\frac{\omega^2 R}{G}\sin 2\varphi\qquad(4)$$

als Lotabweichung.

Da

$$R = \frac{4 \cdot 10^9}{2\pi} [\text{cm}], \quad \omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \left[\frac{1}{\text{sec}}\right], \quad G = g_{Pol} = 983 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}\right]$$

ist, so folgt

$$\frac{\omega^2 R}{G} = \frac{1}{292}, \quad \text{also} \quad g = G\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{292}\right).$$

In Wirklichkeit muß aber die Zahl 292 durch 191 ersetzt werden; diese Abweichung von der Theorie hat ihren Grund in der Abplattung der Erde, der in den obigen Formeln nicht Rechnung getragen ist.[1])

Fährt ein Eisenbahnzug mit der Geschwindigkeit v auf einer Kurve vom Krümmungsradius r, und soll die Resultante aus dem Gewicht und der Zentrifugalkraft senkrecht auf der Schmiegungsebene der Bahn stehen, so muß die äußere (vom Krümmungsmittelpunkt entferntere) Schiene eine Überhöhung

$$h = \frac{v^2 l}{r g} \tag{5}$$

erfahren, wenn l die Spurbreite bedeutet.[2])

2. *Der freie Fall.* Die Kraft im rotierenden Koordinatensystem auf einen bezüglich desselben ruhenden Massenpunkt ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}'_{x'} &= \mathfrak{F}_{x'} + m\omega^2 x' \\ \mathfrak{F}'_{y'} &= \mathfrak{F}_{y'} + m\omega^2 y' \\ \mathfrak{F}'_{z'} &= \mathfrak{F}_{z'}. \end{aligned} \tag{6}$$

Also wird aus Nr. **70** (7)

$$\sum m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\,\delta x' + \cdots\right)$$

$$= \left\{\left(\mathfrak{F}'_{x'} + 2\omega m\frac{dy'}{dt}\right)\delta x' + \left(\mathfrak{F}'_{y'} - 2\omega m\frac{dx'}{dt}\right)\delta y' + \mathfrak{F}'_{z'}\,\delta z'\right\}. \tag{7}$$

Enthalten die in den x', y', z' ausgedrückten Bedingungsgleichungen die Zeit nicht, so können die wirklichen Änderungen dx', dy', dz' anstatt der virtuellen gesetzt werden. Ist ferner nur *ein* Grad von Bewegungsfreiheit (Bewegung auf einer relativ zur Erde

1) S. Günther, *Handbuch der Geophysik*, 2. Aufl., 1, Stuttgart 1897, S. 80.

2) Infolge einer Kreiselwirkung der rotierenden Räder wird die Überhöhung noch etwas größer sein müssen; vgl. F. Klein und A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels* 4, Leipzig 1910, S. 771.

festen Kurve) vorhanden, so genügt das Energieintegral, das aus

$$\sum\left(m\frac{d^2x'}{dt^2}-\mathfrak{F}_{x'}'\right)\frac{dx'}{dt}+\cdots=0$$

folgt. Zu den Kräften kommt dann also einfach die Zentrifugalkraft hinzu.

Da wir es beim freien Fall mit einem freien Massenpunkt zu tun haben, zerfällt (7) in

$$\begin{aligned}\frac{d^2x'}{dt^2}&=\frac{\mathfrak{F}_{x'}'}{m}+2\omega\frac{dy'}{dt}\\ \frac{d^2y'}{dt^2}&=\frac{\mathfrak{F}_{y'}'}{m}-2\omega\frac{dx'}{dt}\\ \frac{d^2z'}{dt^2}&=\frac{\mathfrak{F}_{z'}'}{m},\end{aligned}\qquad(8)$$

und zwar ist der absolute Wert der Kraft

$$|\mathfrak{F}'|=mg.$$

Denken wir uns das Koordinatensystem parallel mit sich aus dem Erdzentrum in den Ort der Fallbewegung verschoben, so wird

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{F}_{x'}'}{m}&=-g\cos\psi\\ \frac{\mathfrak{F}_{y'}'}{m}&=0\\ \frac{\mathfrak{F}_{z'}'}{m}&=-g\sin\psi,\end{aligned}\qquad(9)$$

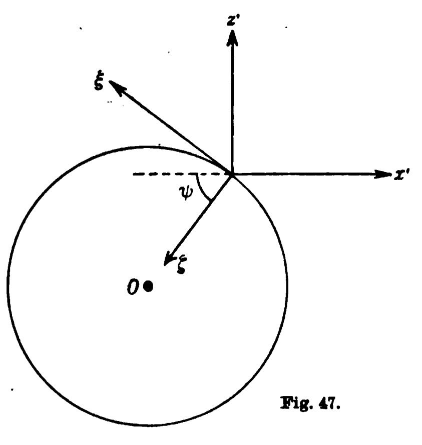


Fig. 47.

und drehen wir nun noch das Koordinatensystem um die y'-Achse (vgl. Fig. 47) bis die x'- und z'-Achse in die horizontale ξ- resp. die in die Richtung von g weisende ζ-Richtung übergeht (die ξ-Achse liegt also horizontal und weist nach Norden, die η-Achse ist horizontal und weist nach Osten, die ζ-Achse ist vertikal nach unten gerichtet), so wird

$$\mathfrak{F}_\xi=0,\quad \mathfrak{F}_\eta=0,\quad \mathfrak{F}_\zeta=mg \qquad (10)$$

und

$$\xi=-x'\sin\psi+z'\cos\psi,\quad \eta=y',\quad \zeta=-x'\cos\psi-z'\sin\psi. \qquad (11)$$

Aus (8) und (11) folgen für $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$, $\ddot{\zeta}$ die Gleichungen für die relative Bewegung

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -2\omega\frac{d\eta}{dt}\sin\psi\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= +2\omega\left(\frac{d\xi}{dt}\sin\psi + \frac{d\zeta}{dt}\cos\psi\right)\\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= g - 2\omega\frac{d\eta}{dt}\cos\psi,\end{aligned} \tag{12}$$

die unter den Anfangsbedingungen $\xi = \eta = \zeta = \dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0$ die genäherten Lösungen geben

$$\begin{aligned}\xi &= -\left(\frac{g}{2}t^2\right)\frac{\omega^2 t^2}{6}\sin 2\psi\\ \eta &= \left(\frac{g}{2}t^2\right)\frac{2}{3}\omega t\cos\psi\\ \zeta &= \frac{g}{2}t^2\left(1 - \frac{\cos^2\psi}{3}\omega^2 t^2\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Da ωt sehr klein ist, ist η, die Abweichung nach Osten, leichter merkbar als ξ, die Abweichung nach Norden. Reich hat beide Abweichungen konstatiert.[1])

3. *Der schiefe Wurf.* Wir wollen die Gleichungen (12) unter den Anfangsbedingungen für $t = 0$

$$\xi = \eta = \zeta = 0, \quad \frac{d\xi}{dt} = a, \quad \frac{d\eta}{dt} = b, \quad \frac{d\zeta}{dt} = c \tag{14}$$

integrieren, dabei aber alle Glieder, die ωt in der zweiten Potenz enthalten, vernachlässigen.

Einmalige Integration ergibt

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= a - 2\omega\eta\sin\psi\\ \frac{d\eta}{dt} &= b + 2\omega(\xi\sin\psi + \zeta\cos\psi)\\ \frac{d\zeta}{dt} &= c + gt - 2\omega\eta\cos\psi.\end{aligned} \tag{15}$$

Aus diesen Gleichungen folgt in erster Näherung

$$\xi = at, \quad \eta = bt, \quad \zeta = ct + \frac{g}{2}t^2. \tag{16}$$

---

1) F. Reich, *Fallversuche über die Umdrehung der Erde*, Freiberg 1832. Wegen der Theorie vgl. man R. Hoppe, *Arch. d. Math. u. Phys.* **64**, 1879, S. 96.

Substituiert man die genäherten Werte (16) auf der rechten Seite der Gleichungen (15), so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= a - 2\omega \sin\psi\, bt\\ \frac{d\eta}{dt} &= b + 2\omega\left(at\sin\psi + ct\cos\psi + \frac{g}{2}t^2\cos\psi\right)\\ \frac{d\zeta}{dt} &= c + gt - 2\omega bt\cos\psi\end{aligned} \qquad (17)$$

und nach nochmaliger Integration

$$\begin{aligned}\xi &= at - \omega bt^2\sin\psi\\ \eta &= bt + \omega t^2(a\sin\psi + c\cos\psi) + \frac{\omega g}{3}t^3\cos\psi\\ \zeta &= ct + \frac{g}{2}t^2 - \omega bt^2\cos\psi\,.\end{aligned} \qquad (18)$$

Der Schuß in der Meridianrichtung. Nennen wir den Abgangswinkel eines mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in der Meridianrichtung abgefeuerten Geschosses α, so ist $a = v_0\cos\alpha$, $b = 0$, $c = -v_0\sin\alpha$. Also bleiben ξ und ζ und damit die Schußdauer

$$t_1 = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha$$

(vgl. Nr. **37** (17)) und die Schußweite durch die Rotation der Erde unbeeinflußt, dagegen wird η für $t = t_1$

$$\eta_1 = \frac{4\omega v_0^3}{g^2}\sin^2\alpha\left[\sin(\psi - \alpha) + \frac{2}{3}\cos\psi\sin\alpha\right]. \qquad (19)$$

Auf der nördlichen Halbkugel ist für mittlere Breiten und die üblichen Abgangswinkel $\eta > 0$, wenn α spitz (Schuß nach Norden), $\eta < 0$, wenn α stumpf (Schuß nach Süden) ist, d. h. vom Schützen aus gerechnet findet die Abweichung stets nach rechts statt, umgekehrt auf der südlichen Halbkugel. Am Äquator ist die Abweichung eine Linksabweichung.

Der Schuß nach Osten oder Westen. Es ist $a = 0$, $b = v_0\cos\alpha$, $c = -v_0\sin\alpha$; somit

$$\begin{aligned}\xi &= -\omega v_0 t^2\sin\psi\cos\alpha\\ \eta &= v_0\cos\alpha\cdot t - \omega t^2 v_0\sin\alpha\cos\psi + \frac{\omega g}{3}t^3\cos\psi\\ \zeta &= -v_0\sin\alpha\cdot t + \frac{g}{2}t^2 - \omega v_0\cos\alpha\cos\psi\cdot t^2.\end{aligned} \qquad (20)$$

Dadurch ergibt sich die Schußdauer zu

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\left(1 + \frac{2\omega v_0}{g}\cos\alpha\cos\psi\right) \tag{21}$$

und die seitliche Abweichung

$$\xi_1 = -\frac{4\omega v_0^3}{g^2}\sin\psi\cos\alpha\sin^2\alpha, \tag{22}$$

die stets nach der rechten Seite des Schützen erfolgt.

Ferner ist

$$\eta_1 = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha + \frac{4v_0^3\omega}{3g^2}(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha\cos\psi, \tag{23}$$

d. h. beim Schuß nach Osten wird die Schußweite für Abgangswinkel, die $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{größer}\end{matrix}\right\}$ sind als 60^0, $\left\{\begin{matrix}\text{vergrößert}\\ \text{verkleinert}\end{matrix}\right\}$. Beim Schuß nach Westen ist es umgekehrt.

Literatur und Formeln über den Einfluß der Erdrotation bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes findet man bei Cranz.[1])

Der Zentrifugalregulator. Zwei Massen A und A' hängen an Stangen OA und OA' (Fig. 48), die um ein Gelenk in O drehbar sind. Rotiert die Achse OO' mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω, so werden die Stangen sich unter einem Winkel α gegen die Vertikale einstellen.

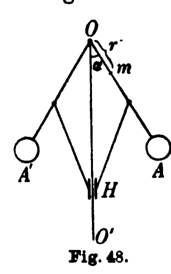


Fig. 48.

Man findet α, indem man im mitbewegten Bezugssystem die Zentrifugalkraft einführt und fragt, wann zwischen dieser und der Schwerkraft Gleichgewicht ist.

Nennen wir r den Abstand eines Massenpunktes m von O, so ist das Drehmoment der Schwere auf den materiellen Teil OA des Systems $\sum mgr\sin\alpha$. Die Zentrifugalkraft auf einen Punkt m ist $mr\omega^2\sin\alpha$, der Hebelarm dieser Kraft bezüglich O ist $r\cos\alpha$, somit das Drehmoment $mr^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha$, also muß

$$g\sum mr = \omega^2\sum mr^2\cdot\cos\alpha \tag{24}$$

sein, oder, wenn wir den Trägheitsradius k von OA bezüglich O und den Abstand s des Schwerpunktes von O einführen,

$$\cos\alpha = \frac{gs}{\omega^2 k^2}. \tag{25}$$

---

1) C. Cranz, *Kompendium d. theor. äußeren Ballistik,* Leipzig 1896, S. 183; *Math. Enc.* 4, Nr. 18, S. 224.

Bei größerer Umlaufsgeschwindigkeit ω wird also α größer; dadurch wird die Hülse H heraufgezogen und betätigt z. B. die Drosselklappe am Zylinder einer Dampfmaschine so, daß die Dampfzufuhr etwas geringer wird und dadurch ω wieder verkleinert wird und umgekehrt.

Über die Stabilität dieser Vorrichtung vgl. man die Ausführungen in Nr. 85.

72. Das Foucaultsche Pendel. Im Jahre 1851 hat Foucault zum ersten Male in Paris durch einen Laboratoriumsversuch die Rotation der Erde nachgewiesen, indem er zeigte, daß die Schwingungsebene eines Fadenpendels sich relativ zur Erde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht. Folgendermaßen ergibt sich die Theorie dieses Experiments. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen eines auf der rotierenden Erde schwingenden Fadenpendels lauten nach Nr. 71 (7) und (11)

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -2\omega \sin\psi \frac{d\eta}{dt} + \lambda\xi \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= 2\omega\left(\sin\psi\frac{d\xi}{dt} + \cos\psi\frac{d\zeta}{dt}\right) + \lambda\eta \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= g - 2\omega\cos\psi\frac{d\eta}{dt} + \lambda(\zeta + l), \end{aligned} \tag{1}$$

während die Nebenbedingung

$$\xi^2 + \eta^2 + (l + \zeta)^2 = l^2 \tag{2}$$

besteht.

Multipliziert man die Gleichungen (1) resp. mit $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, so folgt unter Berücksichtigung von (2)

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2) = \frac{d}{dt}(g\zeta)$$

oder

$$\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2 = 2g\zeta + H \tag{3}$$

als Integral der lebendigen Kraft.

Multipliziert man ferner die zweite Gleichung (1) mit ξ, die erste mit $-\eta$, so ergibt sich

$$\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2} = 2\omega\sin\psi\left(\xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt}\right) + 2\omega\cos\psi\,\xi\frac{d\zeta}{dt}. \tag{4}$$

Bei unendlich kleinen Schwingungen ist (4) integrabel, denn dann ist nach (2)

$$\zeta = -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2l}, \tag{5}$$

also fällt das letzte Glied in (4) als unendlich klein von höherer Ordnung fort, und man erhält als Flächensatz

$$\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = c + \omega \sin\psi\,(\xi^2 + \eta^2). \tag{6}$$

Wegen (3) und (5) ist

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = -g\,\frac{\xi^2 + \eta^2}{l} + H. \tag{7}$$

Setzen wir

$$\xi = r\cos\vartheta\,; \quad \eta = r\sin\vartheta\,,$$

so wird aus (6) und (7)

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = c + r^2\omega\sin\psi \tag{8}$$

resp.

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = -g\,\frac{r^2}{l} + H, \tag{9}$$

und wenn wir die Substitution machen

$$\vartheta - \vartheta_0 - \omega\sin\psi\cdot t = \Theta, \tag{10}$$

so folgt aus (8) und (9)

$$r^2\frac{d\Theta}{dt} = c \tag{11}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 = \left(-\frac{g}{l} - \omega^2\sin^2\psi\right)r^2 + h. \tag{12}$$

Wird ω^2 vernachlässigt, so wird

$$\left.\begin{aligned} r^2\frac{d\Theta}{dt} &= c \\ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 &= -\frac{g}{l}r^2 + h. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Diese Gleichungen enthalten ω nicht; in r und Θ ist also die Bewegung bei rotierender Erde genau ebenso, wie in r und ϑ bei ruhender Erde. Nach (10) scheint sich die Erde unter dem Pendel mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega\sin\psi$ um die Vertikale zu drehen.

Die Integration von (13) ergibt bei geeigneter Wahl des Anfangspunktes der Zeit

$$r^2 = a^2\cos^2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + b^2\sin^2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t, \tag{14}$$

wo $a^2 + b^2 = \frac{lh}{g}$, $a^2b^2 = \frac{c^2 l}{g}$ ist.

Ferner folgt

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{c}{a^2 \cos^2 \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + b^2 \sin^2 \sqrt{\frac{g}{l}}\, t},$$

so daß sich

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \tag{15}$$

ergibt, wenn wir für $t = 0$ $\Theta = 0$ annehmen.

Setzen wir $\xi' = r \cos \Theta$; $\eta' = r \sin \Theta$, so wird

$$\xi' = a \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

$$\eta' = b \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Der Massenpunkt beschreibt im allgemeinsten Falle in dem System r, Θ eine Ellipse mit derselben Schwingungsdauer wie im ruhenden System, und mit fester Richtung der großen Achse; d. h. die große Achse läuft im System, das relativ zu der Erde fest ist, E. S. W. mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin \psi$.

Wird das Pendel aus der größten Elongation a ohne Anfangsgeschwindigkeit relativ zur Erde losgelassen, so ist für $t = 0$, $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, also $\frac{d\Theta}{dt} = -\omega \sin \psi$, somit $-a^2 \omega \sin \psi = c$ und das Verhältnis der Amplituden $b/a = \omega \sin \psi \sqrt{l/g}$.

Die im Obigen gegebene approximative Integration läßt sich auch genauer durchführen.[1])

73. Das Foucaultsche Gyroskop; der Kreiselkompaß. Foucault hat auch die Kreiselbewegung zum Nachweis der Erdrotation benutzt. Wir wollen zeigen, daß das möglich ist, indem wir nachweisen, daß ein symmetrischer, in seinem Schwerpunkt unterstützter Kreisel von zwei Freiheitsgraden die Tendenz hat, sich in die Richtung der Erdachse einzustellen.

Wir hatten in Nr. 70 Formel (7) gesehen, daß wir das d'Alembertsche Prinzip auch bezüglich eines mit der Erde rotierenden Koordinatensystems x', y', z' anwenden können, wenn wir zu den eigentlichen Kräften $\mathfrak{F}$ noch eine Kraft auf jeden Massenpunkt

---

1) Binet, *C. R.* **32**, 1851, p. 197. J. Franz, *Diss. Halle* 1872. W. Dumas, *Crelles J.* **50**, 1855, p. 52 und 126. Kamerlingh Onnes, *Dissert. Groningen* 1879 siehe auch Ph. Furtwängler, *Math. Enc.* IV 1, p. 5.

mit den Komponenten

$$m\omega^2 x' + 2m\omega\frac{dy'}{dt}; \quad m\omega^2 y' - 2m\omega\frac{dx'}{dt}; \quad 0$$

addieren.

Nennen wir, wie in Nr. 67 (6)

$$\mathfrak{F}_{x'} + m\omega^2 x' = \mathfrak{F}'_{x'}; \quad \mathfrak{F}_{y'} + m\omega^2 y' = \mathfrak{F}'_{y'}; \quad \mathfrak{F}_{z'} = \mathfrak{F}'_{z'}, \tag{1}$$

so kommt zu dieser Kraft $\mathfrak{F}'$ infolge der relativen Bewegung des materiellen Systems noch die sogenannte Coriolissche Kraft

$$\mathfrak{F}''_{x'} = 2m\omega\frac{dy'}{dt}; \quad \mathfrak{F}''_{y'} = -2m\omega\frac{dx'}{dt}; \quad \mathfrak{F}''_{z'} = 0 \tag{2}$$

hinzu.

Die Kraft $\mathfrak{F}'$ können wir die Kraft auf den relativ zur Erde ruhenden Massenpunkt nennen. Sie ist die Resultante aus der Zentrifugalkraft und der eigentlichen Kraft. Wir haben sie deshalb eingeführt, weil gerade sie dem Experiment auf der Erde direkt zugänglich ist. So ist z. B. die empirisch bestimmte Erdbeschleunigung die Resultante aus der Anziehungskraft der Erde und der Zentrifugalkraft. Wir wollen demgemäß kräftefrei einen Körper nennen, für den $\mathfrak{F}' = 0$ ist.

Ist der Schwerpunkt unterstützt, so bleibt als einzige Kraft $\mathfrak{F}''$ übrig, die durch (2) gegeben ist. Das Koordinatensystem in (2) ist aber nicht willkürlich relativ zur Erde orientiert, sondern die z'-Achse ist der Erdachse parallel. Deshalb wollen wir ein allgemeines Bezugssystem einführen, in dem $\mathfrak{F}''$ in Vektorschreibweise

$$\mathfrak{F}'' = 2m[\mathfrak{v}, \omega]. \tag{3}$$

lautet. Hier bedeutet $\mathfrak{v}$ die relative Geschwindigkeit des Massenpunktes gegen die Erde, ω die Drehgeschwindigkeit der Erde nach Größe und Richtung.

Da der Kreisel nur eine Drehgeschwindigkeit Ω um seinen Schwerpunkt hat, so ist

$$\mathfrak{v} = [\Omega, \mathfrak{r}], \tag{4}$$

wenn $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor vom Schwerpunkt nach einem beliebigen Kreiselpunkt bedeutet.

Zunächst ergibt sich aus (3) mit Benutzung von (4), daß keine Einzelkraft auf den Kreisel wirkt, denn es ist

$$\sum \mathfrak{F}'' = 2\sum m[\mathfrak{v}, \omega] = 2[[\Omega, \sum m\mathfrak{r}], \omega] = 0,$$

da

$$\sum m\mathfrak{r} = 0$$

ist.

Das Drehmoment um den Schwerpunkt ist

$$\mathfrak{N} = \sum [\mathfrak{r}, \mathfrak{F}''] = 2 \sum m[\mathfrak{r}, [\mathfrak{v}, \omega]],$$

oder nach einer bekannten Regel der Vektoranalysis, nach der

$$[\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

ist,

$$\mathfrak{N} = 2 \sum m \{\mathfrak{v}(\mathfrak{r}, \omega) - \omega(\mathfrak{r}, \mathfrak{v})\}. \qquad (5)$$

Wegen (4) fällt das zweite Glied in (5) fort, und es bleibt

$$\mathfrak{N} = 2 \sum m \mathfrak{v}(\mathfrak{r}, \omega). \qquad (6)$$

Ist die Rotationsgeschwindigkeit um die Figurenachse sehr groß gegen die Rotationen um die anderen Achsen, die im Laufe der Bewegung auftreten können, so können wir diese gegen jene vernachlässigen und unter Ω die konstante Rotationsgeschwindigkeit um die Figurenachse verstehen. Dann ist, wenn x, y, z ein im Kreisel festes System bedeutet,

$$\mathfrak{v}_x = -\Omega \cdot y; \quad \mathfrak{v}_y = +\Omega \cdot x; \quad \mathfrak{v}_z = 0 \qquad (7)$$

und somit unter Berücksichtigung, daß die x, y, z Achsen Hauptträgheitsachsen sind, und unter Einführung der Bezeichnung $C = 2\sum mx^2 = 2\sum my^2 = \sum m(x^2 + y^2)$

$$\mathfrak{N}_x = -C\Omega\omega_y; \quad \mathfrak{N}_y = +C\Omega\omega_x; \quad \mathfrak{N}_z = 0. \qquad (8)$$

Führen wir ein auf der Erde festes Koordinatensystem ξ, η, ζ ein, so daß ζ vertikal nach oben, ξ horizontal nach Osten, η horizontal nach Norden weist[1]), so ist

$$\omega_\xi = 0; \quad \omega_\eta = \omega \cos\beta; \quad \omega_\zeta = \omega \sin\beta, \qquad (9)$$

wenn β die geographische Breite des Beobachtungsorts bedeutet.

Wir betrachten jetzt zwei Versuchsanordnungen.

I. Die Figurenachse kann sich nur in der Horizontalen bewegen. Das erreicht man dadurch, daß man den inneren Ring der Cardanischen Aufhängung festklemmt, so daß seine Ebene horizontal liegt.

1) Dieses Koordinatensystem ist nicht in Übereinstimmung mit dem in den vorigen Nummern gebrauchten, aber mit dem der Nr. **24 ff.**

Dann ist dauernd der **Eulersche** Winkel $\vartheta = \pi/2$, und aus der ersten Gleichung (2) in Nr. **35** wird

$$A\ddot{\psi} = \mathfrak{N}_{\psi}. \tag{10}$$

Nun ist $\mathfrak{N}_{\psi}$ das Drehmoment um die Vertikale d. h. $\mathfrak{N}_{\psi} = \mathfrak{N}_{\zeta}$, und nach Nr. **35** (1') wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_{\psi} &= \mathfrak{N}_x\gamma_1 + \mathfrak{N}_y\gamma_2 + \mathfrak{N}_z\gamma_3 = \mathfrak{N}_x \sin\varphi + \mathfrak{N}_y \cos\varphi \\ &= -C\Omega(\omega_y \sin\varphi - \omega_x \cos\varphi).\end{aligned} \tag{11}$$

ω_x und ω_y berechnen sich aber aus den Formeln (1) und (7) in Nr. **24** zu

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_\eta\beta_1 + \omega_\zeta\gamma_1 = \omega_\eta \cos\varphi \sin\psi + \omega_\zeta \sin\varphi \\ \omega_y &= \omega_\eta\beta_2 + \omega_\zeta\gamma_2 = -\omega_\eta \sin\varphi \sin\psi + \omega_\zeta \cos\varphi,\end{aligned} \tag{12}$$

so daß

$$\mathfrak{N}_{\psi} = C\Omega\,\omega_\eta \sin\psi$$

oder nach (9)

$$\mathfrak{N}_{\psi} = C\Omega\omega \cos\beta \sin\psi \tag{13}$$

wird.

Ist $\psi = 0$, so weist die Kreiselspitze nach Süden, wie die Gleichungen (1) und (7) in Nr. **24** ergeben. Führen wir also einen Winkel Ψ durch die Substitution

$$\Psi = \pi - \psi \tag{14}$$

ein, so ist Ψ die östliche Abweichung der Kreiselspitze aus der Nordrichtung des Meridians, und aus (10) und (13) ergibt sich die Bewegungsgleichung des Kreisels

$$\ddot{\Psi} = -\frac{C\Omega\omega}{A}\cos\beta \sin\Psi. \tag{15}$$

Das ist aber eine Gleichung genau derselben Form wie die Pendelgleichung. Bei kleinen Ablenkungen aus dem Meridian wird der Kreisel um denselben schwingen mit einer Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{C\Omega\omega\cos\beta}}. \tag{16}$$

Sind die Schwingungen durch Reibung gedämpft, so stellt sich also der Kreisel in den Meridian ein.

II. Die Figurenachse kann nur im Meridian hin- und herschwingen. Das erreicht man dadurch, daß man die äußere ver-

tikale Ringebene der Cardanischen Aufhängung senkrecht zur Meridianebene festklemmt.

Dann ist dauernd $\psi = \pi$, und aus der dritten Gleichung (2) in Nr. 35 wird

$$A\ddot{\vartheta} = \mathfrak{N}_\vartheta. \tag{17}$$

Es ist aber nach Nr. 35 (1')

$$\mathfrak{N}_\vartheta = \mathfrak{N}_x \cos\varphi - \mathfrak{N}_y \sin\varphi = -\Omega C(\omega_y \cos\varphi + \omega_x \sin\varphi),$$

und da

$$\omega_x = \omega_\eta \beta_1 + \omega_\zeta \gamma_1 = -\omega_\eta \sin\varphi \cos\vartheta + \omega_\zeta \sin\varphi \sin\vartheta$$

$$\omega_y = \omega_\eta \beta_2 + \omega_\zeta \gamma_2 = -\omega_\eta \cos\varphi \cos\vartheta + \omega_\zeta \cos\varphi \sin\vartheta$$

ist, so folgt mit Benutzung von (9)

$$\mathfrak{N}_\vartheta = \Omega C\omega \cos(\beta + \vartheta). \tag{18}$$

Substituieren wir

$$\frac{\pi}{2} - \beta - \vartheta = \Theta, \tag{19}$$

so bedeutet Θ die Abweichung der Kreiselachsenrichtung von der Richtung der nördlichen Hälfte der Erdachse, und aus (17) und (18) wird

$$A\ddot{\Theta} = -\Omega C\omega \sin\Theta, \tag{20}$$

d. h. der Kreisel hat die Tendenz, sich mit seiner Achse in die Richtung der Erdachse einzustellen.

Bemerkung: Ersetzen wir, um die Beziehung eines Gyroskops zu einem Magneten resp. einem rotierenden elektrisch geladenen Körper im Erdfelde zu erkennen, die Masse m eines Massenpunktes durch die Elektrizitätsmenge $e/2 = m$ und die Winkelgeschwindigkeit der Erde nach Größe und Richtung durch ein Magnetfeld $\mathfrak{H} = \omega$, so wird die wirkende Kraft nach (3)

$$\mathfrak{F}'' = [e\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]. \tag{21}$$

Das ist aber genau das Biot-Savartsche Gesetz. Der Drehimpuls des materiellen Systems um die Figurenachse

$$C\Omega = \sum m(x^2 + y^2)\Omega$$

wird in dem elektrischen Analogon gleich dem magnetischen Moment

$$M = \sum \frac{e}{2}(x^2 + y^2)\Omega$$

des rotierenden, elektrisch geladenen Körpers, und aus den Formeln (15) und (20) ergibt sich auch die bekannte Formel für die Direktionskraft eines Deklinatoriums $M \cdot H$ und eines Inklinatoriums $M \cdot R$, wenn $H = \omega \cos \beta$ die Horizontalintensität, $R = \omega$ die Gesamtfeldstärke bedeutet.

Während aber das magnetische Moment eines permanenten Magneten in Strenge konstant ist, gilt dies von dem magnetischen Moment des rotierenden elektrischen Systems wie von dem Drehimpuls des Kreisels nur genähert, nämlich nur insofern der Eigenimpuls groß ist gegen die im Laufe der Bewegung hinzukommenden Impulskomponenten bezüglich der Hauptträgheitsachsen.

Die richtende Kraft, die die rotierende Erde auf einen Kreisel ausübt, ist im *Kreiselkompaß* dazu benutzt worden, als Ersatz für den magnetischen Kompaß auf Schiffen zu dienen.

Im Gegensatz zum Foucaultschen Gyroskop ist der Kreiselkompaß ein Kreisel von 3 Freiheitsgraden, bei dem aber die Schwere so wirkt, daß die Figurenachse immer annähernd horizontal liegt.[1])

Das Instrument hat vor dem magnetischen Kompaß den Vorteil, genau nach Norden zu weisen und weder durch Eisenmassen noch durch elektrische Ströme abgelenkt zu werden, aber die Nachteile eines recht hohen Preises und einer ziemlich großen Schwingungsdauer, die notwendig ist, um dem System die erforderliche Stabilität zu sichern.

Kapitel VI.

Reibung.

74. Historisches. In den vorstehenden Ausführungen ist fast durchweg von der Wirkung der Reibung abgesehen. Durch diese Vernachlässigung sind manche Erscheinungen mehr oder weniger falsch dargestellt worden. Absolut berechtigt ist das Nichtberücksichtigen der Reibungskräfte wohl nur bei den Bewegungen der Himmelskörper, während in der irdischen Mechanik der Idealfall der reibungslosen Bewegung häufig eine sehr gute Annäherung an die Wahrheit, manchmal aber nur das Typische der Erscheinungen gibt. Daß sich die theoretische Mechanik sehr weit ent-

1) F. Klein u. A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels* **4**, Leipzig 1910, S. 845. Weitere Literatur: Anschütz-Kämpfe, *Jahrbuch d. Schiffsbautechn. Ges.* **10**, 1909, S. 352. O. Martienssen, *Phys. Zs.* **7**, 1906, S. 535; *Zs. f. Instrumentenkunde* **32**, 1912, S. 309.

wickelt hat, ohne daß man es für nötig hielt, der Reibung einen wichtigeren Platz anzuweisen, liegt an dem vorwiegend astronomischen Interesse der klassischen rationellen Mechanik.

Tatsächlich ist das Phänomen der Reibung so kompliziert, daß man nur für die Technik brauchbare Näherungsgesetze angeben kann, die in Wirklichkeit die Folgen einer ganzen Reihe von Erscheinungen darstellen, wie z. B. die dauernden Deformationen fester Körper, Druckkräfte der bewegten Luft, innere Reibung derselben usw.

Quantitative Gesetze über die Reibung fester Körper sind zuerst von Coulomb aufgestellt worden.

75. Gleitende Reibung. Liegt ein Körper vom Gewicht P mit ebener Grundfläche auf einer horizontalen Unterlage (Fig. 49), so ist eine Minimalkraft W_0 nötig, um den Körper in Bewegung zu setzen, und zwar ist

$$W_0 = \mu_0 P. \tag{1}$$

Fig. 49.

μ_0 heißt der *Reibungskoeffizient der Ruhe.* Er ist vom Material und von der Oberflächenbeschaffenheit, sowie von dem der Unterlage abhängig, aber unabhängig vom Gewicht.

Insbesondere sagt Gleichung (1) aus, daß es nicht auf die Größe der Berührungsfläche und also auch nicht auf den Druck (d. i. das auf der Flächeneinheit lastende Gewicht) ankommt.

Man kann den Reibungskoeffizienten μ_0 dadurch bestimmen, daß man die in Fig. 49 gezeichnete Wagschale solange mit Gewichten belastet, bis die Bewegung des Körpers gerade eintritt.

Einfacher legt man den Körper auf eine schiefe Ebene mit veränderlichem Neigungswinkel α, und läßt diesen so lange wachsen bis der Körper beginnt auf seiner Unterlage herabzugleiten (Fig. 50).

Fig. 50.

Da nach den für die schiefe Ebene (Nr. 43) geltenden Formeln die Tangentialkraft $P \sin\alpha$, die Normalkraft $P\cos\alpha$ ist, so muß beim Beginn des Gleitens nach (1)

$$P\sin\alpha = \mu_0 P\cos\alpha, \tag{2}$$

d. h.

$$\operatorname{tg}\alpha = \mu_0 \tag{3}$$

sein. Man nennt α den Reibungswinkel.

Ist die Tangentialkraft, welche von außen am Körper angreift, kleiner als $\mu_0 P$, so wird der Körper in Ruhe bleiben; dann wird

die Reibungskraft dieser äußeren Kraft gerade das Gleichgewicht halten, also auch sie wird kleiner als $\mu_0 P$ sein.

Solange der Körper ruht, werden wir also besser die Reibungskraft durch die Beziehung

$$W \leqq \mu_0 P \tag{4}$$

darstellen.

Um den Körper auf seiner Unterlage mit konstanter Geschwindigkeit fortzubewegen, braucht man eine Kraft

$$W = \mu P. \tag{5}$$

μ heißt der *Reibungskoeffizient der Bewegung*, und zwar ist immer

$$\mu < \mu_0 .$$

μ ist nach den Versuchen von Coulomb und vom General Morin von der Geschwindigkeit und ebenso wie μ_0 auch vom Druck und der Größe der Berührungsfläche unabhängig, doch variierten bei diesen älteren Versuchen die Geschwindigkeiten nicht sehr.

Neuere Untersuchungen über die Wirkung des Bremsklotzes an Eisenbahnschienen[1]) ergaben, daß der Reibungskoeffizient mit wachsender Geschwindigkeit beständig abnimmt.

In Wahrheit findet auch kein plötzlicher Sprung zwischen dem Reibungskoeffizienten der Ruhe und dem der Bewegung statt. Das geht z. B. aus den Versuchen von Frl. Ch. Jakob[2]) hervor.

Die folgende Tabelle enthält einige Zahlenangaben über Reibungskoeffizienten[3]):

Eiche auf Eiche, die Fasern parallel zur Bewegungsrichtung μ =	0,48
„ „ „ „ „ senkrecht „ „	0,34
Metall „ „ „ „ parallel „ „	0,5—0,6
Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen	0,18
„ „ Gußeisen	0,18
Gußeisen auf Gußeisen	0,15

76. Rollende Reibung. Befindet sich eine Rolle vom Gewicht P (Fig. 51) auf horizontaler Unterlage, so ist ein Drehmoment N bezüglich der Berührungslinie nötig, um die Rolle mit

1) D. Galton, *Institution of Mechanical Engineers Proceedings* 1878 u. 1879, *Engineering* 1879, S. 371; *Reports of the British Association*, Dublin 1878. Man beachte den Bericht über die Reibungsgesetze bei F. Klein u. A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels* 3, Leipzig 1903, S. 532.

2) W. Kaufmann, *Phys. Zs.* 11, 1910, S. 985.

3) J. Perry, *Angewandte Mechanik,* Leipzig und Berlin 1908, S. 67.

konstanter Geschwindigkeit zu bewegen, und zwar ist nach Coulomb

$$N = \nu \cdot P, \tag{1}$$

wo ν der *Koeffizient der rollenden Reibung* genannt wird. Wird dieses Drehmoment durch eine an der Rollenachse C angreifende horizontale Kraft F ausgeübt, so ist

$$N = Fa, \tag{2}$$

unter a den Rollenradius verstanden, also ist nach (1) und (2) die Kraft

$$F = \frac{\nu P}{a} \tag{3}$$

Fig. 51.

dem Gewicht der Rolle direkt und ihrem Krümmungsradius umgekehrt proportional.

Daß beim Rollen stets auch Gleiten stattfindet, und zwar infolge der elastischen Deformationen des rollenden Körpers und der Unterlage, hat Reynolds[1]) nachgewiesen.

77. Schmiermittel. Durch Verwendung von Schmiermitteln wird die Reibung wesentlich verringert, jedoch handelt es sich hier um die innere Reibung des Schmiermittels[2]); diese Probleme gehören also in das Gebiet der Hydrodynamik.

Die Grundlagen der Theorie der Reibung fester Körper und der hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung sind gänzlich verschieden.[3]) Während nämlich nach ersterer die Reibung von der Geschwindigkeit unabhängig, aber der Normalkraft P proportional ist, ist sie nach letzterer vom Flüssigkeitsdruck p unabhängig und dem Geschwindigkeitsgefälle in der Flüssigkeit proportional.

Kapitel VII.

Theorie der Schwingungen.

I. Kinematik der Schwingungen.

78. Definitionen: Amplitude, Schwingungsdauer, Phase, Phasenkonstante, gedämpfte Schwingung, logarithmisches Dekrement. Jede zeitlich periodische Bewegung möge eine

1) O. Reynolds, *London. Phil. Transactions* **166** I, 1876; *Ges. Werke* **1**, 110.

2) N. Petroff, *Neue Theorie der Reibung*, deutsch von Wurzel, Hamburg 1887; O. Reynolds, *Phil. Trans. R. Soc. of London 1886*, Part 1; *Scientific Papers* **2**, 228.

3) Siehe A. Sommerfeld *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* **50**, 1904, S. 97.

Schwingung genannt werden. Wird die Bewegung durch eine solche Funktion der Zeit $\varphi(t)$ beschrieben, die die Eigenschaft hat, daß sich der Funktionswert für keinen Wert von t ändert, wenn die Konstante T zum Argument addiert wird, daß also

$$\varphi(t+T)=\varphi(t) \tag{1}$$

ist, so ist φ eine periodische Funktion. Selbstverständlich gilt dann auch bei wiederholter Anwendung

$$\varphi(t)=\varphi(t+T)=\varphi(t+2T)=\cdots=\varphi(t+pT).$$

Hat T die eben erwähnte Eigenschaft, aber nicht $\frac{T}{m}$, wo m eine beliebige ganze Zahl sein kann, so heißt T die *Periode* oder *Schwingungsdauer* der Schwingung.

Wird *eine* Schwingung in T Sekunden ausgeführt, so wird $\frac{1}{T}$ Schwingung in *einer* Sekunde vollführt.

$$n=\frac{1}{T} \tag{2}$$

heißt die *Schwingungszahl* der Schwingung.

Die einfachsten periodischen Funktionen sind der Sinus und Kosinus; mit ihnen werden wir uns deshalb zunächst am eingehendsten zu beschäftigen haben, zumal sich jede periodische Funktion, wie wir später sehen werden, in eine Sinus- und Kosinusreihe zerlegen läßt.

Läßt sich die Bewegung, z. B. die x-Koordinate eines Massenpunktes, durch die Gleichung

$$x=A\sin(at+\alpha) \tag{3}$$

darstellen, so sagen wir, die Projektion der Bewegung auf die x-Achse sei eine einfach harmonische Bewegung resp. eine einfache Sinusschwingung.

Das Argument $at+\alpha$ in (3) heißt die *Phase* der Schwingung.

Da der Sinus zwischen den Werten ± 1 hin- und herschwankt, so wird x zwischen $\pm A$ schwanken. A heißt die *Amplitude* oder das *Ausmaß* der Schwingung.

Der Sinus verändert seinen Wert nicht, wenn zum Argument die Periode 2π des Sinus addiert wird. Damit das in (3) der Fall ist, muß t um $\frac{2\pi}{a}$ wachsen, es ist also

$$T=\frac{2\pi}{a} \tag{4}$$

die Periode der Schwingung (3).

Führen wir T durch (4) in (3) ein, so wird

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) \tag{5}$$

oder wegen (2)

$$x = A \sin(2\pi n t + \alpha). \tag{6}$$

α heißt die *Phasenkonstante*; sie gibt den Argumentwert zur Zeit $t = 0$, hat also für *eine* Schwingung eine untergeordnete Bedeutung, da man durch geeignete Wahl des Anfangspunktes der Zeit stets α zu Null machen kann; man brauchte nur t in (6) durch $t = t' - \frac{\alpha}{2\pi n}$ zu ersetzen. Die Bedeutung der Phasenkonstante tritt erst zu Tage, wenn man es mit mehreren gleichzeitigen Schwingungen zu tun hat.

Wir werden im Laufe dieses Kapitels sehen, daß nicht nur $\sin 2\pi n t$ eine für die Theorie der Schwingungen wichtige Funktion ist, sondern auch die komplexe Funktion $e^{2\pi i n t}$. Natürlich kann diese Funktion keine physikalische Bedeutung besitzen, sondern nur ihr reeller oder ihr imaginärer Bestandteil $\cos 2\pi n t$ resp. $\sin 2\pi n t$. Dadurch würde aber nichts Neues eingeführt, denn $\cos 2\pi n t = + \sin\left(2\pi n t + \frac{\pi}{2}\right)$ ist auch nur eine Sinusfunktion der Form (6) mit der Phasenkonstante $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Die Funktion $e^{2\pi i n t}$ hat ebenso wie $\sin 2\pi n t$ die Periode $T = \frac{1}{n}$.

Ist dagegen m in $e^{2\pi i m t}$ eine komplexe Zahl $m = n + \frac{i\delta}{2\pi}$, so hat diese Funktion die komplexe Periode $\frac{1}{m}$. Physikalische Bedeutung kann natürlich nur der reelle resp. der imaginäre Teil $e^{-\delta t} \cos 2\pi n t$ resp. $e^{-\delta t} \sin 2\pi n t$ der Funktion haben.

Da auch diese Funktionen eine (allerdings komplexe) Periode haben, pflegt man die Bewegungen, die durch

$$x = A e^{-\delta t} \sin(2\pi n t + \alpha) \tag{7}$$

dargestellt sind, auch als Schwingungen, und zwar als gedämpfte Schwingungen zu bezeichnen, trotzdem die Funktion (7) nach keiner Zeit wieder denselben Wert annimmt (da die Zeit reell ist), und zwar nennt man $\frac{1}{n} = T$ auch hier die Periode, genau so wie in (6), indem man $A e^{-\delta t}$ als zeitlich veränderliche Amplitude ansieht.

Nach einer Periode $T = \frac{1}{n}$ wird der Sinus wieder denselben Wert haben, aber die Amplitude, die zur Zeit t den Wert $A e^{-\delta t}$ hatte, ist zur Zeit $t + T$ auf $A e^{-\delta(t+T)}$ gesunken. Das *Amplitudenverhältnis* zweier aufeinander folgenden Schwingungen ist also

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\delta T}.$$

Zur Zeit $t + 2T$ haben wir

$$x(t + 2T) = x(t + T)e^{-\delta T} = x(t)e^{-2\delta T};$$

allgemein:

$$x(t + pT) = x(t + (p-1)T)e^{-\delta T} = x(t)e^{-p\delta T}.$$

Wenn die Zeiten also in arithmetischer Progression wachsen, nehmen die Amplituden in geometrischer Progression ab.

Der natürliche Logarithmus des Amplitudenverhältnisses zweier aufeinander folgender Schwingungen, d. h. die Größe $\delta \cdot T$, heißt nach Gauß das logarithmische Dekrement der Schwingung.

Eine einfache gedämpfte Schwingung (7) ist also durch die Amplitude zur Zeit $t = 0$, durch die Schwingungszahl n, durch das logarithmische Dekrement $\frac{\delta}{n}$ und die Phasenkonstante α vollständig gegeben.

79. Analyse von Schwingungen. Fouriersche Reihen. Anstatt Nr. 78 (6) kann man auch

$$x = C_1 \sin 2\pi n t + C_2 \cos 2\pi n t \tag{1}$$

schreiben, indem man

$$C_1 = A \cos\alpha, \quad C_2 = A \sin\alpha \tag{2}$$

setzt.

Umgekehrt läßt sich (1) stets auf die Form von Nr. 78 (6) bringen, indem nach (2)

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{C_2}{C_1} \tag{3}$$

ist.

Verlangen wir, daß A immer positiv ist, so ist nach (2) der Wert von α bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt. (3) und Nr. 78 (6) sind also einander vollkommen äquivalent.

Jede periodische Funktion $f(t)$ der Periode T läßt sich nach dem Fourierschen Satze in folgender Form darstellen[1]):

1) Wegen Einzelheiten vgl. man z. B. H. Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik* 1, 2. Aufl., Braunschweig 1910, S. 77. Eine graphische Methode der Zerlegung stammt von C. Runge, *Z. f. Math. u. Phys.* 48, 1903, S. 443.

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + A_2 \cos 2\frac{2\pi t}{T} + \cdots + A_\nu \cos\nu\frac{2\pi t}{T} + \cdots$$
$$+ B_1 \sin\frac{2\pi t}{T} + B_2 \sin 2\frac{2\pi t}{T} + \cdots + B_\nu \sin\nu\frac{2\pi t}{T} + \cdots$$

oder

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(A_\nu \cos\nu\frac{2\pi t}{T} + B_\nu \sin\nu\frac{2\pi t}{T}\right). \tag{4}$$

Die Koeffizienten dieser Entwicklung bestimmen sich folgendermaßen:

Man multipliziere beide Seiten von (4) mit $\cos\mu\frac{2\pi t}{T}\,dt$ und integriere von 0 bis T; dann wird

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\mu\frac{2\pi t}{T}\,dt = A_\mu. \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

Ebenso multipliziere man beide Seiten mit $\sin\mu\frac{2\pi t}{T}$; so erhält man

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\mu\frac{2\pi t}{T}\,dt = B_\mu. \quad (\mu = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

Hierbei sind die leicht zu beweisenden Beziehungen benutzt

$$\int_0^T \cos\nu\frac{2\pi t}{T}\cdot\cos\mu\frac{2\pi t}{T}\,dt = \begin{cases} 0 & \nu \neq \mu \\ \frac{T}{2} & \nu = \mu \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin\nu\frac{2\pi t}{T}\cdot\sin\mu\frac{2\pi t}{T}\,dt = \begin{cases} 0 & \nu \neq \mu \\ \frac{T}{2} & \nu = \mu \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin\nu\frac{2\pi t}{T}\cos\mu\frac{2\pi t}{T}\,dt = 0.$$

Ist speziell $f\left(\frac{T}{2} - t\right) = f\left(\frac{T}{2} + t\right)$, so verschwinden die B_μ, ist $f\left(\frac{T}{2} - t\right) = -f\left(\frac{T}{2} + t\right)$, so sind die $A_\mu = 0$. Im ersten Falle heißt $f\left(\frac{T}{2} + t\right) = \varphi(t)$ eine *gerade*, im zweiten Falle eine *ungerade* Funktion von t.

80. Zusammensetzung von Schwingungen. Für viele Probleme der Physik ist die Frage von Wichtigkeit, wie sich

zwei Schwingungen derselben Richtung und derselben Schwingungszahl n, aber verschiedener Amplitude und Phasenkonstante zusammensetzen oder, wie man auch sagt, sich superponieren.

Es sei

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(2\pi n t + \alpha_1) = A_1 \cos\alpha_1 \sin 2\pi n t + A_1 \sin\alpha_1 \cos 2\pi n t \\ x_2 &= A_2 \sin(2\pi n t + \alpha_2) = A_2 \cos\alpha_2 \sin 2\pi n t + A_2 \sin\alpha_2 \cos 2\pi n t. \end{aligned} \tag{1}$$

Dann ist

$$x_1 + x_2 = (A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2) \sin 2\pi n t \tag{2}$$

$$+ (A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2) \cos 2\pi n t = C_1 \sin 2\pi n t + C_2 \cos 2\pi n t.$$

Setzen wir

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(2\pi n t + \alpha), \tag{3}$$

so wird nach Nr. 79 (3)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} \tag{4}$$

und

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}. \tag{5}$$

Die Amplitude der Resultante ist nach (4) also stets kleiner (höchstens gleich) als die Summe der Amplituden der Komponenten.

Die Resultante hat nach (3) dieselbe Schwingungsdauer wie die Komponenten.

Sind die Amplituden der beiden Komponenten einander gleich, also $A_1 = A_2$, so folgt aus (4)

$$A = 2 A_1 \cos\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \tag{4'}$$

und aus (5)

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}. \tag{5'}$$

Sind die Phasenkonstanten einander gleich, also $\alpha_1 = \alpha_2$, so ergeben (4) und (5):

$$A = A_1 + A_2, \quad \alpha = \alpha_1 = \alpha_2,$$

also ist

$$x = (A_1 + A_2) \sin(2\pi n t + \alpha_1).$$

Die Amplitude der Resultante ist also gleich der Summe der Amplituden der Komponenten.

Unterscheiden sich die Phasenkonstanten um π, ist also

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pi,$$

so ist

$$A = |A_1 - A_2|, \quad \alpha = \alpha_1,$$

also

$$x = |A_1 - A_2| \sin(2\pi n t + \alpha_1).$$

Die Amplitude der Resultante ist also gleich der Differenz der Amplituden der Komponenten. Ist außerdem $A_1 = A_2$, so ist x dauernd Null, man sagt, die beiden Schwingungen interferieren miteinander.

Ebenso setzen sich p Schwingungen zusammen. Es sei

$$x_1 = A_1 \sin(2\pi n t + \alpha_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_p = A_p \sin(2\pi n t + \alpha_p).$$

Dann ist

$$x = \sum_p x_p = \left(\sum A_p \cos\alpha_p\right) \sin 2\pi n t + \left(\sum A_p \sin\alpha_p\right) \cos 2\pi n t, \tag{6}$$

also ist

$$A = \sqrt{\left(\sum A_p \cos\alpha_p\right)^2 + \left(\sum A_p \sin\alpha_p\right)^2}$$

und

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Sigma A_p \sin\alpha_p}{\Sigma A_p \cos\alpha_p}. \tag{7}$$

In folgender Weise läßt sich die Zusammensetzung von Schwingungen graphisch bewerkstelligen. Man trage in einem ebenen Polarkoordinatensystem α_1 als Winkel, A_1 als Radiusvektor ein, und ebenso verfahre man mit α_2 und A_2, dann ergibt die Zusammensetzung nach den Regeln der Vektoranalysis A und α; denn nach dem Kosinussatz ist (vgl. Fig. 52)

$$\overline{OE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DE}^2 - 2\,\overline{OD}\cdot\overline{OE}\cos\sphericalangle ODE.$$

Da aber

$$\overline{OD} = A_1,$$
$$\overline{DE} = A_2,$$
$$\sphericalangle ODE = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1)$$

Fig. 52.

ist, so ergibt sich (4), und ebenso erhält man (5), wenn man ausdrückt, daß die Projektion von A auf die Polarachse OQ resp.

auf die dazu senkrechte Achse OR gleich der Summe der entsprechenden Projektionen von A_1 und A_2 ist, d. h. daß

$$A\cos\alpha = A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2$$
$$A\sin\alpha = A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2$$

ist, woraus durch Division (5) folgt.

In analoger Weise ist bei mehr als zwei Komponenten zu verfahren, wie die Gleichungen (7) lehren.

81. Schwebungen. Es mögen sich zwei Schwingungen von etwas verschiedener Schwingungszahl überlagern, es soll also in

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(2\pi n_1 t + \alpha_1) \\ x_2 &= A_2 \sin(2\pi n_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \tag{1}$$

$n_2 - n_1 = \nu$ klein gegen n_1 resp. n_2 sein.

Wir können schreiben

$$x_2 = A_2 \sin(2\pi n_1 t + (2\pi\nu t + \alpha_2)), \tag{2}$$

d. h. wir können x_2 als Schwingung mit der Schwingungszahl n_1 und der langsam veränderlichen Phasenkonstante $2\pi\nu t + \alpha_2$ auffassen.

Die Zusammensetzung ergibt nach Nr. **80** (4) und (5) die langsam veränderliche Amplitude und Phasenkonstante

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(2\pi\nu t + \alpha_2 - \alpha_1)} \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin(2\pi\nu t + \alpha_2)}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos(2\pi\nu t + \alpha_2)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Amplitude schwankt also zwischen $A_1 + A_2$ und $|A_1 - A_2|$ und wird zeitweise zu Null, wenn $A_1 = A_2$ ist.

Die Maxima resp. Minima finden statt, wenn $\cos(2\pi\nu t + \alpha_2 - \alpha_1) = +1$ resp. -1 ist; die Schwebungszahl, d. h. die Anzahl der Maxima resp. Minima, ist also $\nu = n_2 - n_1$ pro Sekunde.

Durch die Bestimmung der Schwebungszahl läßt sich also die Differenz der Schwingungszahlen der Komponenten ermitteln.

82. Lissajoussche Figuren.[1]) Ein Massenpunkt beschreibe eine Bahn, die durch

$$\begin{aligned} x &= A\sin(2\pi n t + \alpha) \\ y &= B\sin(2\pi n t + \beta) \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben ist. Die Bahnkurve wird ermittelt, indem t aus den beiden

1) J. Lissajous, *Ann. de chim. et de phys.* (3) **51**, 1857, S. 147.

Gleichungen eliminiert wird. Es ist

$$\frac{x}{A} = \cos\alpha \sin 2\pi n t + \sin\alpha \cos 2\pi n t \qquad \left|\ \sin\beta\ \right|\ -\cos\beta \qquad (2)$$

$$\frac{y}{B} = \cos\beta \sin 2\pi n t + \sin\beta \cos 2\pi n t. \qquad \left|\ -\sin\alpha\ \right|\ +\cos\alpha \qquad (3)$$

Multipliziert man die beiden Gleichungen resp. mit den daneben stehenden Faktoren und addiert, so erhält man

$$\frac{x}{A}\sin\beta - \frac{y}{B}\sin\alpha = \sin 2\pi n t \sin(\beta - \alpha) \qquad (4)$$

$$-\frac{x}{A}\cos\beta + \frac{y}{B}\cos\alpha = \cos 2\pi n t \sin(\beta - \alpha). \qquad (5)$$

Quadrieren und Addieren von (4) und (5) ergibt

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos(\beta - \alpha) = \sin^2(\beta - \alpha). \qquad (6)$$

Die Bahnkurve ist also eine Ellipse, deren Achsengrößen und -Richtungen von den Amplituden der Komponenten und ihrer Phasendifferenz abhängt.

Ist z. B. $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$, so ist

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \qquad (7)$$

d. h. die Ellipsenachsen haben die Richtung der Koordinaten x und y.

Ist ferner noch $A = B$, so ist die Schwingungskurve

$$x^2 + y^2 = A^2 \qquad (7')$$

ein Kreis.

Die beiden Fälle $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\beta - \alpha = \frac{3\pi}{2}$ sind aber voneinander verschieden. Wir können das folgendermaßen erkennen: Da es nur auf die Differenz der Phasenkonstanten ankommt, können wir α willkürlich gleich Null setzen; dann ist nach (1) im Falle $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} x &= A \sin 2\pi n t \\ y &= B \cos 2\pi n t, \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

dagegen im Falle $\beta = \frac{3\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} x &= A \sin 2\pi n t \\ y &= -B \cos 2\pi n t. \end{aligned}\right\} \qquad (1'')$$

Zur Zeit $t = 0$ befindet sich in beiden Fällen der Punkt auf der y-Achse, im ersten Falle durchläuft er aber mit wachsender Zeit die Quadraten in der Reihenfolge 1, 4, 3, 2, im zweiten Falle dagegen in der Reihenfolge 4, 1, 2, 3, d. h. der Sinn, in dem die Ellipsen durchlaufen werden, ist verschieden.

Ist weiter $\beta - \alpha = 0$ resp. $\beta - \alpha = \pi$, so ist

$$\frac{x}{A} - \frac{y}{B} = 0 \tag{8}$$

resp.

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 0, \tag{9}$$

d. h. die Ellipse geht in beiden Fällen in die beiden zusammenfallenden Geraden (8) resp. (9) über.

(6) ist eine elliptische, (7') eine zirkulare, (8) resp. (9) eine lineare Schwingung.

Sind die Schwingungszahlen nicht genau gleich, sondern ist

$$x = A \sin(2\pi n t + \alpha) \tag{10}$$

$$y = B \sin(2\pi m t + \beta), \tag{11}$$

so darf man

$$y = B \sin(2\pi n t + (2\pi \nu t + \beta)) \tag{12}$$

schreiben, wo $\nu = m - n$ ist.

Die Phasenkonstante ist also mit der Zeit veränderlich, und es ergibt sich aus (6), daß nacheinander alle Ellipsen resp. entartenden Geraden durchlaufen werden, die den verschiedenen Werten von $\beta - \alpha$ entsprechen, man erhält also nacheinander alle in Fig. 53 gezeichneten Bahnkurven.

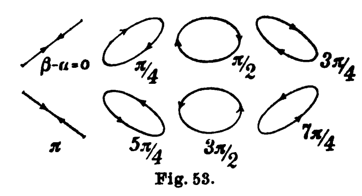


Fig. 53.

Ist die Schwingungszahl der x-Komponente doppelt so groß wie die der y-Komponente, ist also

$$\begin{aligned} x &= A \sin(4\pi n t + \alpha) \\ y &= B \sin 2\pi n t \end{aligned} \tag{13}$$

(daß die Phasenkonstante in y gleich Null gesetzt ist, ist keine Spezialisierung), so ergibt sich durch Elimination von t

$$\frac{x}{A} = 2 \cos\alpha \cdot \frac{y}{B} \sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}} + \sin\alpha \left(1 - 2 \frac{y^2}{B^2}\right). \tag{14}$$

Die aus dieser Gleichung resultierenden Kurven sind in den Figuren 54 dargestellt.[1])

Man erhält auf einem Projektionsschirm P (vgl. Fig. 55) die Figuren 53 resp. 54, wenn man nach Lissajous' Vorgang einen Lichtstrahl von einer Lichtquelle L aus auf den Spiegel S einer vertikal stehenden Stimmgabel I fallen läßt. Der Strahl wird von hier reflektiert, fällt auf den Spiegel S' einer horizontal befestigten Stimmgabel II und wird von hier aus auf den Projektionsschirm geworfen.

Fig. 54.

Die Figuren 53 werden erzeugt, wenn die beiden Stimmgabeln gleiche Tonhöhe haben, die Figuren 54 dagegen, wenn die Stimmgabel II die nächst höhere Oktave der Stimmgabe I gibt.

Fig. 55.

83. Einfach harmonische Wellen in einem kontinuierlichen Medium. Die Verschiebung u der Massenpunkte eines kontinuierlichen Mediums sei Funktion der Zeit und der Koordinaten.

Wir betrachten die einfache und in den Anwendungen besonders häufig vorkommende Funktion

$$u = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right) + \alpha\right], \tag{1}$$

indem wir voraussetzen, daß u außer von der Zeit nur von der einen Koordinate z abhängt.

Für ein gegebenes z ist u eine reine Funktion der Zeit, wie wir sie im Vorhergehenden auch betrachtet haben. A heißt, wie dort, die Amplitude, $T = \frac{1}{n}$ die Schwingungsdauer oder Periode, n die Schwingungszahl. Die Phasenkonstante ist für verschiedene konstante Werte von z verschieden, d. h. an den verschiedenen Orten geht die Schwingung zu verschiedenen Zeiten durch die Nullage.

Lassen wir weiter t konstant, so stellt u als Funktion von z auch einen periodischen Vorgang dar, dessen Periode λ ist; man nennt λ die *Wellenlänge*.

Ersetzen wir in (1) t durch $t + 1$ und z durch $z + \frac{\lambda}{T}$, so bleibt u unverändert, d. h. nach der Zeit 1 ist derselbe Zustand

1) Vgl. Lord Rayleigh, *Theorie des Schalls* 1 § 36.

um die Strecke

$$v = \frac{\lambda}{T} = n\lambda \tag{2}$$

in Richtung der z-Achse vorgerückt. v heißt die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* der Phasen in dem Medium.

Ganz allgemein stellt jede beliebige Funktion $f_1(z - vt)$ einen Zustand dar, der sich mit der Geschwindigkeit v in Richtung der positiven z-Achse fortpflanzt, während $f_2(z + vt)$ einen Zustand darstellt, der in Richtung der negativen z-Achse mit der Geschwindigkeit v sich fortpflanzt, wie man sofort erkennt, wenn man t durch $t + 1$ und z durch $z + v$ resp. $z - v$ ersetzt.

84. Stehende Wellen. Superponieren sich zwei Wellen gleicher Amplitude

$$u_1 = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right) + \alpha\right]$$

und $\hfill (1)$

$$u_2 = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right) + \alpha'\right],$$

von denen die erste sich in der Richtung $-z$, die zweite in der Richtung $+z$ fortpflanzt, so erhält man nach einer einfachen goniometrischen Formel

$$u = u_1 + u_2 = 2A \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \frac{\alpha + \alpha'}{2}\right)\cos\left(2\pi\frac{z}{\lambda} + \frac{\alpha - \alpha'}{2}\right). \tag{2}$$

u stellt eine sogenannte stehende Welle dar, die dadurch charakterisiert ist, daß an bestimmten Stellen, die den Abstand einer halben Wellenlänge voneinander haben, *dauernd* die Erregung $u = 0$ ist, d. h. ein Knoten ist, während mitten dazwischen *dauernd* ein Bauch vorhanden ist. Dagegen führt bei einer fortschreitenden Welle (vgl. Nr. **83** (1)) eine Stelle, die zu einer bestimmten Zeit in Ruhe ist, nach einer viertel Periode eine maximale Bewegung aus.

85. Gruppengeschwindigkeit. Überlagern sich zwei einfach harmonische Schwingungen von gleicher Amplitude aber etwas verschiedenen Wellenlängen λ_1 und λ_2, und ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Funktion der Wellenlänge, d. h. ist das Medium ein dispergierendes, so erhält man

$$\begin{aligned} u &= A\left[\sin 2\pi\frac{V_1 t - z}{\lambda_1} + \sin 2\pi\frac{V_2 t - z}{\lambda_2}\right] \\ &= 2A \sin 2\pi\frac{Vt - z}{\lambda} \cdot \cos\pi\left\{t\left(\frac{V_1}{\lambda_1} - \frac{V_2}{\lambda_2}\right) - z\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{1}$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{V}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{\lambda_1} + \frac{V_2}{\lambda_2}\right), \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \tag{2}$$

gesetzt ist.

Die Erregung u können wir demnach als Welle der Geschwindigkeit V, der Wellenlänge λ und der Amplitude

$$2A \cos\pi \left\{t\left(\frac{V_1}{\lambda_1} - \frac{V_2}{\lambda_2}\right) - z\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right\}$$

auffassen, d. h. die Amplitude ist nicht konstant, sondern verändert sich sowohl mit der Zeit als mit dem Ort, aber die Periode sowie die Wellenlänge dieser Veränderung sind sehr groß gegenüber der Periode $\frac{\lambda}{V}$ und der Wellenlänge λ der eigentlichen Schwingung, wenn λ_1 und λ_2 und somit auch V_1 und V_2 nicht sehr voneinander verschieden sind.

Wir können also von einer ganzen Gruppe hintereinander folgender Wellen sprechen, der wir für eine ziemliche Zeit merklich dieselbe Amplitude geben können.

Diese Gruppe hat eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$U = \frac{\frac{V_1}{\lambda_1} - \frac{V_2}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}} = \frac{d\frac{V}{\lambda}}{d\frac{1}{\lambda}} = V - \lambda\frac{dV}{d\lambda}. \tag{3}$$

In einem bestimmten Moment wird die Erregung durch Fig. 56 dargestellt. Eine Erregung nach Art der Fig. 57 wird aber eine

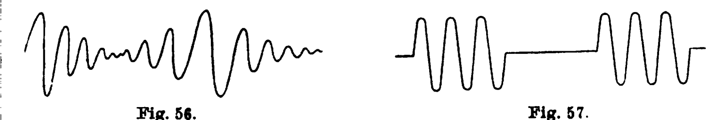


Fig. 56. Fig. 57.

Gruppengeschwindigkeit haben, die auch genähert durch (3) gegeben ist.

Die Gruppengeschwindigkeit U ist kleiner oder größer als die Phasengeschwindigkeit V, jenachdem V mit λ wächst oder abnimmt.

II. Dynamik der Schwingungen.

86. Unendlich kleine ungedämpfte Schwingungen. Auf einen Massenpunkt, der die Möglichkeit hat, sich auf der x-Achse zu bewegen, und dessen Gleichgewichtslage die Stelle $x = 0$ ist,

wirke eine Kraft, die den Massenpunkt in die Gleichgewichtslage zurückzutreiben sucht, und die der Entfernung des Massenpunktes von der Gleichgewichtslage proportional ist.

Dann gilt die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ax. \tag{1}$$

Da diese Differentialgleichung homogen und linear ist, so hat sie die Eigenschaft, daß wenn x_1 und x_2 partikulare Integrale sind, auch $C_1x_1 + C_2x_2$ ein Integral ist, wo C_1 und C_2 ganz willkürliche Konstanten bedeuten.

Wir setzen als Integral von (1) versuchsweise $e^{\gamma t}$ an, dann muß γ der Gleichung

$$m\gamma^2 + a = 0$$

genügen, d. h.

$$\gamma = \pm i\sqrt{\frac{a}{m}}, \tag{2}$$

also sind

$$x_1 = e^{i\sqrt{\frac{a}{m}}t} \quad \text{und} \quad x_2 = e^{-i\sqrt{\frac{a}{m}}t}$$

partikulare Integrale.

Da nur reelle Integrale einen physikalischen Sinn haben können und jede lineare Kombination von x_1 und x_2 wieder ein Integral liefert, so sind auch

$$C_1\frac{x_1+x_2}{2} = C_1\cos\sqrt{\frac{a}{m}}\,t$$

und

$$C_2\frac{x_1-x_2}{2i} = C_2\sin\sqrt{\frac{a}{m}}\,t$$

Integrale, und die Summe derselben

$$x = C_1\cos\sqrt{\frac{a}{m}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{a}{m}}\,t \tag{3}$$

ist das allgemeinste Integral von (1), da es zwei willkürliche, d. h. nicht in der Differentialgleichung vorkommende Konstanten enthält.

Diese Konstanten bestimmen sich, wenn zu einer bestimmten Zeit $t = 0$ die Lage und die Geschwindigkeit des Massenpunktes gegeben sind.

Die „Anfangsbedingungen" lauten also: für $t = 0$ soll $x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = v_0$ sein.

Nun ist nach (3) für $t = 0$ $x_0 = C_1$ und

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = C_2 \sqrt{\frac{a}{m}} = v_0\,,$$

also ist

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{a}{m}}\, t + \sqrt{\frac{m}{a}}\, v_0 \sin \sqrt{\frac{a}{m}}\, t \tag{4}$$

die endgültige Lösung. Wir haben es also mit einer einfachen Sinusschwingung zu tun, die nach Nr. **79** (1) stets in die Form von Nr. **78** (6) gebracht werden kann.

Die Schwingungszahl ist

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{m}}\,, \tag{5}$$

sie ist also um so größer, je stärker die rücktreibende Kraft a bei der Ablenkung 1 aus der Ruhelage ist, und je kleiner die Masse des Massenpunktes ist.

Ist spezieller für $t = 0$ der Massenpunkt an der Stelle $x = x_0$ in Ruhe, so ist $v_0 = 0$, und man hat

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{a}{m}}\, t\,. \tag{6}$$

Befindet sich dagegen der Massenpunkt zur Zeit $t = 0$ in der Gleichgewichtslage, und hat er die Geschwindigkeit v_0, so ist

$$x = \sqrt{\frac{m}{a}}\, v_0 \sin \sqrt{\frac{a}{m}}\, t\,. \tag{7}$$

87. Elliptische Schwingungen. Ein Massenpunkt habe die Möglichkeit, sich in jeder beliebigen Richtung zu bewegen, der Koordinatenursprung sei seine Gleichgewichtslage, und es wirke auf ihn eine Kraft, die proportional der Entfernung von der Gleichgewichtslage ist, und den Punkt in diese zurückzutreiben sucht. Dann hat die Kraft f die Form

$$f = -ar\,, \tag{1}$$

also

$$\begin{aligned} f_x &= f \cos(r, x) = -ax \\ f_y &= f \cos(r, y) = -ay \\ f_z &= f \cos(r, z) = -az\,, \end{aligned} \tag{2}$$

also lauten die Bewegungsgleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ax, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -ay, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -az. \tag{3}$$

Da diese Gleichungen nicht simultan sind, läßt sich jede für sich integrieren und gibt nach Nr. **86** (1) und (3)

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos\sqrt{\frac{a}{m}}\,t + A_2 \sin\sqrt{\frac{a}{m}}\,t \\ y &= B_1 \cos\sqrt{\frac{a}{m}}\,t + B_2 \sin\sqrt{\frac{a}{m}}\,t \\ z &= C_1 \cos\sqrt{\frac{a}{m}}\,t + C_2 \sin\sqrt{\frac{a}{m}}\,t. \end{aligned} \tag{4}$$

Eliminieren wir t, d. h. fassen wir für den Augenblick $\cos\sqrt{\frac{a}{m}}t$ und $\sin\sqrt{\frac{a}{m}}\,t$ als Unbekannte auf, so muß zwischen den bekannten Größen x, y, z, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 eine Beziehung bestehen, da die beiden Unbekannten den drei linearen Gleichungen (4) genügen sollen. Diese Beziehung lautet bekanntlich

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & x \\ B_1 & B_2 & y \\ C_1 & C_2 & z \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

oder ausgeführt,

$$(B_1C_2 - B_2C_1)x + (C_1A_2 - C_2A_1)y + (A_1B_2 - A_2B_1)z = 0, \tag{5'}$$

d. h. der Punkt bewegt sich dauernd in der durch (5′) bestimmten Ebene, in der auch die Gleichgewichtslage $x = y = z = 0$ enthalten ist.

Diese Ebene ist bestimmt durch die Gleichgewichtslage, die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit. Wir spezialisieren nicht, wenn wir diese Ebene zur xy-Ebene wählen und haben

$$\begin{aligned} x &= A \sin\left(\sqrt{\frac{a}{m}}\,t + \alpha\right) \\ y &= B \sin\left(\sqrt{\frac{a}{m}}\,t + \beta\right) \\ z &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

als Lösung der Bewegungsgleichungen.

Die Bahnkurve ist nach Nr. **82** (1) und (6) eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Gleichgewichtslage ist.

Die Umlaufszeit ist

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{a}}. \tag{7}$$

Die in Nr. **86** gefundene Lösung ist ein spezieller Fall der in dieser Nummer aufgestellten, nämlich der, daß die Anfangsgeschwindigkeit in die Richtung der Verbindungslinie der Anfangslage und der Gleichgewichtslage fällt.

88. Schwingungen eines Systems von n Freiheitsgraden. Es möge jetzt untersucht werden, wie ein materielles System beschaffen sein muß, damit Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage eintreten können.

Das materielle System habe n Freiheitsgrade und sei durch die n allgemeinen freien Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ bestimmt, und zwar seien die q so gewählt, daß die Gleichgewichtslage durch $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$ gegeben sei.

Die potentielle Energie ist eine Funktion der q, die in der Nähe der Gleichgewichtslage in eine Potenzreihe nach den q entwickelbar sei.

Da der Wert der potentiellen Energie nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, so geben wir dieser Funktion in der Gleichgewichtslage den Wert Null. Da ferner in der Gleichgewichtslage die potentielle Energie einen Grenzwert besitzen muß, so fallen die ersten Potenzen der Entwicklung fort, und da die potentielle Energie in einer *stabilen* Gleichgewichtslage ein Minimum sein muß (Nr. **12**), so müssen die Glieder zweiter Ordnung der Entwicklung eine positive quadratische Form bilden.

Beschränkt man sich bei sehr kleinen Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage auf die quadratischen Glieder, so lautet also die potentielle Energie

$$2V = a_{11}q_1^2 + a_{22}q_2^2 + \cdots + 2a_{12}q_1q_2 + \cdots$$

oder

$$2V = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ik}\,q_i\,q_k, \tag{1}$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$ gesetzt ist, und zwar darf, da die Form positiv sein soll, keine der Größen

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

negativ sein.[1])

1) Vgl. z. B. H. Weber, *Algebra* 1, § 89, 2. Aufl., Braunschweig 1898.

Die kinetische Energie stellt sich in der Form

$$2T = \sum_{i,k}^{1,n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \tag{2}$$

dar, wo $b_{ik} = b_{ki}$ ist (vgl. Nr. **18** (2)).

Die b werden im allgemeinen Funktionen der q sein; beschränken wir uns aber auf unendlich kleine Elongationen aus der Gleichgewichtslage, so dürfen wir den b diejenigen Werte beilegen, welche sie für die $q = 0$ annehmen. Dann wird T eine positive quadratische Form der $\dot{q}$ mit konstanten Koeffizienten.

Nach den Lagrangeschen Gleichungen (vgl. Nr. **19** (9))

$$\frac{\partial}{\partial q_\nu}(T - V) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} \tag{3}$$

lauten also die Bewegungsgleichungen

$$\sum_k b_{\nu k}\ddot{q}_k + \sum_k a_{\nu k} q_k = 0 \tag{4}$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{array}{l} b_{11}\ddot{q}_1 + b_{12}\ddot{q}_2 + \cdots + b_{1n}\ddot{q}_n = -(a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n) \\ b_{21}\ddot{q}_1 + b_{22}\ddot{q}_2 + \cdots + b_{2n}\ddot{q}_n = -(a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2n}q_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}\ddot{q}_1 + b_{n2}\ddot{q}_2 + \cdots + b_{nn}\ddot{q}_n = -(a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \cdots + a_{nn}q_n). \end{array} \tag{5}$$

Diese Gleichungen können wir uns nach den $\ddot{q}$ aufgelöst denken, da die Determinante der b nicht verschwindet; dann erhalten wir die Gleichungen (5) in der Form

$$\begin{array}{l} \ddot{q}_1 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \cdots + c_{1n}q_n = 0 \\ \ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + \cdots + c_{2n}q_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \ddot{q}_n + c_{n1}q_1 + c_{n2}q_2 + \cdots + c_{nn}q_n = 0. \end{array} \tag{6}$$

(Liegt z. B. nur *ein* Grad von Bewegungsfreiheit vor, und zwar die Drehung um eine Achse, und bezeichnet q den Ablenkungswinkel aus der Gleichgewichtslage, so gilt die Gleichung

$$K\ddot{q} + cq = 0, \tag{7}$$

die wir bereits in Nr. **86** integriert haben. Hier ist k das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse, c die *Direktionskraft* des Systems, d. h. dasjenige Drehmoment, das das System in die Gleichgewichtslage zurückzutreiben sucht, wenn der Ablenkungswinkel $q = 1$ ist [vgl. Nr. **30** (3)].)

Versuchsweise setzen wir als Lösungen von (6) an

$$q_1 = A_1 e^{i\lambda t},\ q_2 = A_2 e^{i\lambda t},\ \ldots,\ q_n = A_n e^{i\lambda t} \tag{8}$$

und erhalten zur Bestimmung von λ und der A die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1(c_{11} - \lambda^2) + A_2 c_{12} + \cdots + A_n c_{1n} &= 0 \\ A_1 c_{21} + A_2(c_{22} - \lambda^2) + \cdots + A_n c_{2n} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1 c_{n1} + A_2 c_{n2} + \cdots + A_n(c_{nn} - \lambda^2) &= 0\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Da die A nicht alle Null sein sollen, muß λ^2 eine Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda^2, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22} - \lambda^2, & \ldots, & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots, & c_{nn} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

sein. Sämtliche Wurzeln dieser Gleichung, die ein Analogon in der für die Hauptachsentransformation von Flächen 2. Grades maßgebenden Gleichung hat, sind reell und positiv.

Setzt man eine Wurzel λ^2 dieser Gleichung in (9) ein, so ergeben sich daraus die Verhältnisse $A_1 : A_2 : \cdots : A_n$, während ein gemeinschaftlicher komplexer Faktor $k e^{i\gamma}$ unbestimmt bleibt. Da nun die Gleichung (10) vom n^{ten} Grade in λ^2 ist, erhält man n Systeme von Lösungen, von denen natürlich nur der reelle oder der imaginäre Teil zu nehmen ist. So ergibt sich als allgemeinste Lösung

$$\begin{aligned} q_1 &= k_1 A_{11} \sin(\lambda_1 t + \gamma_1) + k_2 A_{21} \sin(\lambda_2 t + \gamma_2) + \cdots + k_n A_{n1} \sin(\lambda_n t + \gamma_n) \\ q_2 &= k_1 A_{12} \sin(\lambda_1 t + \gamma_1) + k_2 A_{22} \sin(\lambda_2 t + \gamma_2) + \cdots + k_n A_{n2} \sin(\lambda_n t + \gamma_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n &= k_1 A_{1n} \sin(\lambda_1 t + \gamma_1) + k_2 A_{2n} \sin(\lambda_2 t + \gamma_2) + \cdots + k_n A_{nn} \sin(\lambda_n t + \gamma_n). \end{aligned} \tag{11}$$

Über die Form der Lösung, falls (10) mehrere gleiche Wurzeln hat, vgl. man z. B. H. Weber.[1])

Die Konstanten $k_1, k_2, \ldots, k_n, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sind durch die verallgemeinerten Anfangskoordinaten und -geschwindigkeiten zu bestimmen

Die Bewegung ist also charakterisiert durch die Superposition von n einfachen Sinusschwingungen der Schwingungszahlen $\frac{\lambda_1}{2\pi}$,

---

1) H. Weber, *Partielle Differentialgleichungen der math. Phys.* **1**, S. 147, Braunschweig 1910; *Lehrbuch d. Algebra* **2**, 2. Aufl., §§ 41—42.

$\frac{\lambda_2}{2\pi}, \ldots, \frac{\lambda_n}{2\pi}$, und zwar treten diese Schwingungen auf, gleichgültig ob man die q oder lineare Kombinationen der q zu Koordinaten wählt.

Wählt man die Anfangsbedingungen speziell so, daß alle q bis auf eines verschwinden, also

$$q_1 \text{ gegeben}, \quad q_2 = q_3 = \cdots = q_n = 0$$

und sämtliche $\dot{q}$ verschwinden, also

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \cdots = \dot{q}_n = 0,$$

so ersieht man aus (6), daß trotzdem im allgemeinen sämtliche q sich zeitlich verändern werden, daß also das System nach allen durch die Koordinaten gekennzeichneten Richtungen in Bewegung geraten wird.

Faßt man dagegen die Größen

$$k_1 \sin(\lambda_1 t + \gamma_1), \ldots, k_n \sin(\lambda_n t + \gamma_n)$$

in (11) für den Augenblick als Unbekannte auf und löst die Gleichungen (11) nach diesen Größen auf, so werden dieselben durch lineare Kombinationen der q ausgedrückt.

Führen wir für diese linearen Kombinationen neue Bezeichnungen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} p_1 &= k_1 \sin(\lambda_1 t + \gamma_1) \\ p_2 &= k_2 \sin(\lambda_2 t + \gamma_2) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p_n &= k_n \sin(\lambda_n t + \gamma_n). \end{aligned} \tag{12}$$

Diese neuen Koordinaten p, die sogenannten Normalkoordinaten des Systems, haben die Eigenschaft, daß jede durch eine ganz bestimmte der Sinusschwingungen charakterisiert ist, und wenn jetzt p_1 anfänglich gegeben ist, dagegen $p_2 = p_3 = \cdots = p_n = 0$ und ferner $\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = \cdots = \dot{p}_n = 0$, so wird im Laufe der Zeit nur p_1 von Null verschieden sein, während die übrigen Koordinaten dauernd Null bleiben.

Es läßt sich zeigen[1], daß man durch eine lineare Substitution der Koordinaten zwei quadratische Formen gleichzeitig so transformieren kann, daß nur die Quadrate der Variabeln vorkommen.

---

1) Vgl. z. B. O. Hesse, *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, 2. Aufl., Leipzig 1896, S. 256 ff.

Da wir es mit definiten und positiven Formen zu tun haben, so sind alle Koeffizienten positiv, und zwar kann man dieselben für die eine Form willkürlich gleich Eins annehmen. Man kann also durch geeignete Wahl der Koordinaten die potentielle und die kinetische Energie auf die Form bringen

$$\begin{aligned} 2V &= \sum \lambda_\nu^2 p_\nu^2 = \lambda_1^2 p_1^2 + \lambda_2^2 p_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 p_n^2 \\ 2T &= \sum \dot{p}_\nu^2 = \dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2 + \cdots + \dot{p}_n^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Hieraus leiten sich nach (3) die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{p}_1 &= -\lambda_1^2 p_1 \\ \ddot{p}_2 &= -\lambda_2^2 p_2 \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \ddot{p}_n &= -\lambda_n^2 p_n \end{aligned} \tag{14}$$

ab, aus denen die Integrale (12) folgen.

Eine physikalische Interpretation der Koeffizienten von T und V hat Zenneck[1]) gegeben.

89. Gleichgewicht eines Bewegungszustandes. Die Frage, ob ein als möglich gefundener Bewegungszustand trotz kleiner Störungen des Systems genähert weiter bestehen kann, oder ob die Störungen im Laufe der Zeit merkliche Abweichungen hervorrufen, läßt sich folgendermaßen mit Hilfe der Theorie der Schwingungen entscheiden.[2])

Es seien $q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0}; \dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}, \ldots, \dot{q}_{n0}$ die generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten, welche den Lagrangeschen Gleichungen unter gegebenen Anfangsbedingungen genügen, d. h. die $q_0, \dot{q}_0$ seien gegebene Funktionen der Zeit, welche die ungestörte Bewegung repräsentieren.

Wir nehmen nun an, daß alle Koordinaten und Geschwindigkeiten ein wenig gestört seien, setzen also

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{10} + x_1, \; q_2 = q_{20} + x_2, \ldots, q_n = q_{n0} + x_n \\ \dot{q}_1 &= \dot{q}_{10} + \dot{x}_1, \; \dot{q}_2 = \dot{q}_{20} + \dot{x}_2, \ldots, \dot{q}_n = \dot{q}_{n0} + \dot{x}_n \end{aligned} \tag{1}$$

und fassen die x, $\dot{x}$ als unendlich kleine Größen auf, deren höhere Potenzen und Produkte vernachlässigt werden können.

---

1) J. Zenneck, *Ann. Phys.* (4) **5**, 1901, S. 707.

2) Eine exakte Definition der Stabilität einer Bewegung und eine Kritik früherer Arbeiten über diesen Gegenstand findet sich bei F. Klein und A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels* **2** S. 342, Leipzig 1898.

Setzen wir diese Werte in die Lagrangeschen Gleichungen ein und machen die erlaubten Vernachlässigungen, so erhalten wir ein System linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den x, deren Koeffizienten bekannte Funktionen der Zeit sind. Lassen sich diese Gleichungen integrieren, so erkennt man aus den Lösungen, ob die Störungen mit der Zeit größer und größer werden oder nicht. Im letzteren Falle ist der Zustand stabil, im ersteren Falle ist nichts Genaueres zu sagen, da dann wegen der Annahme, daß die x und $\dot{x}$ unendlich klein sind, die Integrale nur eine beschränkte Zeit Gültigkeit haben.

Die Integration läßt sich immer durchführen, wenn die ungestörte Bewegung stationär ist. Darunter wollen wir verstehen, daß alle in der Lagrangeschen Funktion $T-V$ vorkommenden q_0, $\dot{q}_0$ von der Zeit unabhängig sind, d. h. daß die gewöhnlichen Koordinaten und die Ableitungen der zyklischen Koordinaten (die zyklischen Geschwindigkeiten) konstant sind.

Dann sind nämlich die Koeffizienten in den linearen Differentialgleichungen konstant, und man erhält ein System der Form

$$\ddot{x}_\nu + \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}\dot{x}_\mu + \sum_{\mu=1}^{n} b_{\nu\mu}x_\mu = 0, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

welches durch den Ansatz

$$x_\nu = H_\nu e^{\lambda t} \tag{3}$$

gelöst wird.

Sind alle λ entweder negativ oder komplex mit negativ reellem Bestandteil, so ist der Zustand stabil. Sonst ist die Stabilität unsicher.

1. Beispiel: Die Kreiselbewegung. Wir hatten in Nr. **32** gesehen, daß $p = p_0$, $q = 0$, $r = 0$ eine Lösung der Eulerschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)\,qr \\ B\dot{q} &= (C - A)\,rp \\ C^{\boldsymbol{\cdot}} &= (A - B)\,pq \end{aligned} \tag{4}$$

ist.

Wir wollen jetzt die Stabilität dieser Lösung untersuchen, indem wir

$$p = p_0 + x_1, \quad q = x_2, \quad r = x_3 \tag{5}$$

setzen und somit aus (4) die Gleichungen erhalten

$$\dot{x}_1 = 0, \qquad \begin{aligned} B\dot{x}_2 &= (C - A)\,p_0 x_3 \\ Cx_3 &= (A - B)\,p_0 x_2\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Aus der ersten Gleichung (6) folgt

$$x_1 = H_1, \tag{7}$$

wo H_1 eine Konstante ist.

Setzen wir ferner

$$x_2 = H_2 e^{\lambda t}, \quad x_3 = H_3 e^{\lambda t}, \tag{8}$$

so wird

$$\begin{aligned} H_2 B \lambda &= H_3 (C - A) p_0 \\ H_3 C \lambda &= H_2 (A - B) p_0 . \end{aligned} \tag{9}$$

Durch Multiplikation der linken und rechten Seiten dieser Gleichungen ergibt sich

$$\lambda^2 = -\frac{(C-A)(B-A)p_0^2}{BC}. \tag{10}$$

Die Bewegung ist nun nach (8) sicher stabil, wenn λ^2 negativ ist, und das findet statt, wenn A das größte oder kleinste Hauptträgheitsmoment ist. Ist A das mittlere Hauptträgheitsmoment, so läßt sich durch diese Methode der Annäherung nichts entscheiden. Wir hatten aber durch die Poinsotsche Methode (Nr. **32**) gesehen, daß dann Labilität stattfindet.

Dividiert man die Gleichungen (9) durcheinander, so folgt

$$\left(\frac{H_3}{H_2}\right)^2 = -\frac{B-A}{C-A}\,\frac{B}{C}. \tag{11}$$

Hierdurch ist das Amplitudenverhältnis der störenden Schwingungen, die um die zwei Hauptträgheitsachsen y und z auftreten, bestimmt.

Es wird, indem wir den reellen Teil von (8) nehmen und $H_2 = De^{-i\alpha}$ setzen,

$$\begin{aligned} p &= p_0 + H_1 \\ q &= D \cos\left(p_0 \sqrt{\frac{(C-A)(B-A)}{BC}}\, t - \alpha\right). \end{aligned} \tag{12}$$

$r = x_3$ ergibt sich dann ohne weitere Quadratur aus der zweiten Gleichung (6) zu

$$r = -D \sqrt{\frac{B-A}{C-A} \cdot \frac{B}{C}} \sin\left(p_0 \sqrt{\frac{(C-A)(B-A)}{BC}}\, t - \alpha\right).$$

H_1, D und α bestimmen sich durch die Anfangswerte der Störungen.

2. Beispiel: Der Zentrifugalregulator. Die stationäre Bewegung des Zentrifugalregulators hatten wir in Nr. 71 untersucht. Nun wollen wir mit Routh[1]) die Stabilität dieser Bewegung prüfen.

Zu dem Zwecke denken wir uns (Fig. 58) an OO' als Achse noch ein Schwungrad S vom Trägkeitsmoment J befestigt, das die trägen bewegten Massen der zu regulierenden Maschine ersetzen soll.

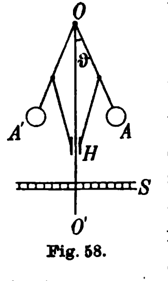


Fig. 58.

Ferner soll die Abweichung des Winkels ϑ vom Winkel α des stationären Zustandes ein Drehmoment um die Achse OO', z. B. durch Betätigung der Drosselklappe am Zylinder der zu regulierenden Maschine hervorrufen, welches bei kleinen Störungen der Abweichung von dem Winkel α proportional ist, also $-\beta(\vartheta-\alpha)$ gesetzt werden kann, wo $\beta > 0$ angenommen werden muß, wenn eine Regulierung überhaupt stattfinden soll.

Nennen wir die Umlaufsgeschwindigkeit um die Achse OO' $\dot{\varphi}$ und führen für das Trägheitsmoment $\sum mr^2$ der einen Stange OA samt der daran befestigten Kugel bez. O die Bezeichnung i ein, so ist die kinetische Energie

$$T = \left(\frac{J}{2} + i \sin^2 \vartheta\right) \dot{\varphi}^2 + i\dot{\vartheta}^2, \tag{13}$$

während die potentielle Energie

$$V = -2Mgs \cos \vartheta \tag{14}$$

ist, unter M die Masse einer Stange OA mit Kugel, unter s den Abstand des Schwerpunktes der Stange und Kugel von O verstanden.

Dann ergeben die Lagrangeschen Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[(J + 2i \sin^2 \vartheta)\dot{\varphi}] = -\beta(\vartheta - \alpha) \\ &2i\ddot{\vartheta} - i \sin 2\vartheta \cdot \dot{\varphi}^2 = -2Mgs \sin \vartheta . \end{aligned} \tag{15}$$

Im stationären Zustand ist

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \vartheta = \alpha, \tag{16}$$

wo nach der zweiten Gleichung (15), wie wir auch früher gefunden

1) E. J. Routh, *Die Dynamik der Systeme starrer Körper,* deutsch von A. Schepp, 2, Leipzig 1898, S. 81.

hatten, die Beziehung

$$\omega^2 \cos\alpha = \frac{Mgs}{i} \tag{17}$$

besteht.

Setzen wir

$$\dot\varphi = \omega + x_1, \quad \vartheta = \alpha + x_2 \tag{18}$$

in die Gleichungen (15) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (J + 2i\sin^2\alpha)\dot x_1 + 2i\omega\sin 2\alpha\cdot\dot x_2 + \beta x_2 &= 0 \\ \ddot x_2 - \omega\sin 2\alpha\cdot x_1 &= \left(\omega^2\cos 2\alpha - \frac{Mgs}{i}\cos\alpha\right)x_2, \end{aligned} \tag{19}$$

und wenn wir

$$x_1 = H_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = H_2 e^{\lambda t}$$

setzen, so folgt durch Elimination des Verhältnisses $\frac{H_1}{H_2}$ aus den beiden Gleichungen (19) die Gleichung dritten Grades für λ

$$\left(\frac{J}{2i} + \sin^2\alpha\right)\lambda^3 + \omega^2\sin^2\alpha\left[\frac{J}{2i} + 1 + 3\cos^2\alpha\right]\lambda + \frac{\beta\omega}{2i}\sin 2\alpha = 0. \tag{20}$$

Diese Gleichung hat, da alle Koeffizienten > 0 und der von λ^2 gleich Null ist, eine reelle negative und zwei komplex konjugierte Wurzeln mit positiv reellem Bestandteil, so daß sich die Wurzeln mit Berücksichtigung des Umstandes, daß ihre Summe Null ist, in der Form

$$\lambda_1 = -2p, \quad \lambda_2 = p + qi, \quad \lambda_3 = p - qi \tag{21}$$

ergeben. x_1 z. B. läßt sich also in der Form

$$x_1 = H_{11}e^{-2pt} + H_{12}e^{pt}\cos(qt - \gamma) \tag{22}$$

schreiben.

Der Mechanismus ist also keineswegs sicher stabil. Sobald man aber Vorrichtungen anbringt, die die auftretenden Schwingungen stark genug dämpfen, so ist die Stabilität dadurch garantiert.[1])

90. Variierte Systeme.[2]) Ein materielles System mit der potentiellen und kinetischen Energie in der Form der Gleichungen (13) Nr. **88**, aus welchen die Gleichungen Nr. **88** (14) folgen, werde ein wenig verändert, so daß $2V$ und $2T$ die allgemeinen Formen Nr. **88** (1) und (2) haben, welche anstatt der Bewegungsgleichungen Nr. **88** (14) solche von der Form Nr. **88** (11) ergeben.

1) E. J. Routh l. c.

2) Während im vorigen Paragraphen Änderungen im *Bewegungszustande* betrachtet wurden, wollen wir uns jetzt mit einer Modifikation des *materiellen Systems* beschäftigen.

Fassen wir die Änderungen als unendlich klein auf, so sind die Größen

$$\begin{array}{llll} c_{11}-\lambda_1^2, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}-\lambda_2^2, & \ldots, & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots, & c_{nn}-\lambda_n^2 \end{array}$$

unendlich kleine Größen, deren höhere Potenzen und Produkte man vernachlässigen kann.

Lösungen der Gleichungen Nr. 88 (6) werden in der Nr. 88 (8) entsprechenden Form

$$q_1 = A_1 e^{i\mu t},\ q_2 = A_2 e^{i\mu t},\ \ldots,\ q_n = A_n e^{i\mu t} \tag{1}$$

angesetzt und liefern die Nr. 88 (9) analogen Gleichungen

$$A_{i1}c_{k1} + A_{i2}c_{k2} + \cdots + A_{ik}(c_{kk}-\mu_i^2) + \cdots + A_{in}c_{kn} = 0. \tag{2}$$
$$(i,\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

Hierbei sind die A_{ik} mit verschiedenen Indizes auch unendlich klein.

Fassen wir zunächst eine Gleichung ins Auge, in der $i = k$ ist, so folgt aus dieser, daß bis auf Größen höherer Ordnung

$$\mu_i^2 = c_{ii} \tag{3}$$

sein muß. Dagegen ergibt sich aus einer Gleichung mit verschiedenen i, k

$$A_{ik}(c_{kk}-\mu_i^2) + A_{ii}c_{ki} = 0, \tag{4}$$

also

$$\frac{A_{ik}}{A_{ii}} = \frac{c_{ki}}{c_{ii}-c_{kk}} = \frac{c_{ki}}{\lambda_i^2-\lambda_k^2}, \tag{5}$$

wenn man auf der rechten Seite c_{ii} durch den Näherungswert λ_i^2 und c_{kk} durch λ_k^2 ersetzt.

(3) und (5) ergeben also die varrierten Schwingungszahlen resp. die Amplitudenverhältnisse, die in Nr. 88 (11) einzusetzen sind.[1]

91. Koppelung. Wir hatten in Nr. 88 gesehen, daß man durch Einführung von Normalkoordinaten p, d. h. von linearen Kombinationen der generalisierten Koordinaten q die Bewegungsgleichungen wesentlich vereinfachen kann, da dieselben dann nicht mehr simultan sind. Das kam aber darauf hinaus, daß durch Ein-

---

1) Vgl. Lord Rayleigh, *Theorie des Schalls* § 90.

führung dieser linearen Kombinationen die kinetische und die potentielle Energie gleichzeitig in zwei Formen verwandelt werden, die nur noch Quadrate, aber keine Produkte der Variablen mehr enthalten.

Durch Integration der Bewegungsgleichungen für die Normalkoordinaten findet man diese als einfache Sinusfunktionen. Nun ist es aber häufig von Interesse, die q zu kennen, da diese eine einfache physikalische Bedeutung haben.

Aus den p lassen sich die q zwar als lineare Kombinationen berechnen, wir wollen aber direkt die für die q gültigen Gleichungen aufstellen und integrieren, weil wir dabei einen tieferen Einblick in den Mechanismus schwingender Systeme bekommen.

Wir betrachten speziell ein System von zwei Freiheitsgraden und nehmen der Einfachheit halber an, daß die kinetische Energie nur Quadrate der Koordinaten enthält, sich also durch

$$2T = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \tag{1}$$

ausdrückt, während die potentielle Energie die allgemeine Form

$$2V = \nu_1^2 q_1^2 + \nu_2^2 q_2^2 + 2\nu_{12} q_1 q_2 \tag{2}$$

hat.

Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \nu_1^2 q_1 + \nu_{12} q_2 &= 0 \\ \ddot{q}_2 + \nu_2^2 q_2 + \nu_{12} q_1 &= 0 . \end{aligned} \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen ersehen wir, daß die zeitliche Änderung von q_1 auch von q_2 abhängt, und umgekehrt; d. h. die beiden durch q_1 und q_2 charakterisierten Freiheitsgrade sind miteinander gekoppelt.

ν_1 ist die zyklische Schwingungszahl $(= 2\pi n_1)$ des ersten Freiheitsgrades, falls keine Koppelung vorhanden ist $(\nu_{12} = 0)$; ν_2 hat dieselbe Bedeutung für den zweiten Freiheitsgrad.

Wir führen noch die Bezeichnungen

$$\nu_{12} = \vartheta_1 \nu_1^2 = \vartheta_2 \nu_2^2 \tag{4}$$

ein und können demgemäß die Gleichungen (3)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \nu_1^2 q_1 + \vartheta_1 \nu_1^2 q_2 &= 0 \\ \ddot{q}_2 + \nu_2^2 q_2 + \vartheta_2 \nu_2^2 q_1 &= 0 \end{aligned} \tag{3'}$$

schreiben.

Wir setzen ein Integral von (3′) in der Form

$$q_1 = C_1 e^{int}, \quad q_2 = C_2 e^{int} \tag{5}$$

an und erhalten aus (3′) die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} C_1 (n^2 - \nu_1^2) &= \vartheta_1 \nu_1^2 C_2 \\ C_2 (n^2 - \nu_2^2) &= \vartheta_2 \nu_2^2 C_1 . \end{aligned} \tag{6}$$

Multiplizieren wir die linken und rechten Seiten von (6) miteinander, so ergibt sich die Gleichung für die zyklische Schwingungszahl n

$$(n^2 - \nu_1^2)(n^2 - \nu_2^2) = \vartheta_1 \vartheta_2 \nu_1^2 \nu_2^2, \tag{7}$$

während wir durch Division für das Amplitudenverhältnis mit Berücksichtigung von (4)

$$\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 = \frac{n^2 - \nu_2^2}{n^2 - \nu_1^2} \tag{8}$$

erhalten.

Gleichung (7) ergibt für n^2 die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\nu_1^2 \nu_2^2 \vartheta_1 \vartheta_2} \\ n'^2 &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\nu_1^2 \nu_2^2 \vartheta_1 \vartheta_2}, \end{aligned} \tag{9}$$

sodaß

$$q_1 = C_1 \cos(nt - \alpha), \quad q_2 = C_2 \cos(nt - \alpha)$$

eine Lösung von (3′) ist. Hier sind C_1 und α ganz willkürlich, während sich C_2 aus (8) bestimmt.[1])

Ebenfalls ist aber auch

$$q_1 = C_1' \cos(n't - \alpha'), \quad q_2' = C_2' \cos(n't - \alpha')$$

eine Lösung, wenn wiederum C_1' und α' willkürlich gewählt werden, und C_2' sich aus (8) berechnet, natürlich, nachdem man dort rechts n' statt n eingeführt hat.

Die allgemeinste Lösung ist dann

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 \cos(nt - \alpha) + C_1' \cos(n't - \alpha') \\ q_2 &= C_2 \cos(nt - \alpha) + C_2' \cos(n't - \alpha'). \end{aligned} \tag{10}$$

Die Schwingung jeden Freiheitsgrades besteht nach (10) also aus der Superposition zweier einfach harmonischer Schwingungen verschiedener Schwingungsdauern.

---

1) Um das Vorzeichen von C_2 richtig zu erhalten, wird man eine der Gleichungen (6) heranziehen.

Sind die Eigenschwingungszahlen ohne Koppelung ν_1 und ν_2 ziemlich verschieden, so daß $\nu_1^2 - \nu_2^2$ groß gegen $\nu_1 \nu_2$ ist, und ist der „Koppelungskoeffizient“

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2} \tag{11}$$

eine kleine Zahl, oder ist, wie man sich ausdrückt, die Koppelung lose, so nimmt (9) den Wert an

$$\begin{aligned} n^2 &= \nu_1^2 + \frac{\nu_1^2 \nu_2^2 \vartheta^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2} \\ n'^2 &= \nu_2^2 - \frac{\nu_1^2 \nu_2^2 \vartheta^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Durch die Koppelung werden also beide Eigenschwingungsdauern verändert, und zwar wird die größere größer, die kleinere kleiner, und wir können (10) so deuten, daß jeder Freiheitsgrad seine (durch die Koppelung modifizierte) Eigenschwingung und eine erzwungene Schwingung mit der Schwingungsdauer des anderen Freiheitsgrades ausführt.

Nach (8) wird für jede Partialschwingung die Amplitude in dem System größer sein, für welches die Schwingungszahl mehr mit der freien Schwingung des ungekoppelten Systems übereinstimmt.

Waren die beiden Freiheitsgrade ohne Koppelung in Resonanz ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$), so wird nach (9)

$$\begin{aligned} n^2 &= \nu^2 (1 + \vartheta) \\ n'^2 &= \nu^2 (1 - \vartheta). \end{aligned} \tag{13}$$

Durch die Koppelung treten also in jedem System zwei Schwingungen auf, deren Frequenzen um so mehr voneinander verschieden sind, je fester die Koppelung ist.

Die Amplituden werden nach (8) einander gleich, aber nach (6) und (13) wird $C_1 = C_2 = C$, jedoch $C_1' = -C_2' = C'$, so daß

$$\begin{aligned} q_1 &= C \cos(\nu \sqrt{1 + \vartheta}\, t - \alpha) + C' \cos(\nu \sqrt{1 - \vartheta}\, t - \alpha') \\ q_2 &= C \cos(\nu \sqrt{1 + \vartheta}\, t - \alpha) - C' \cos(\nu \sqrt{1 - \vartheta}\, t - \alpha') \end{aligned} \tag{14}$$

wird.

Bei extrem loser Koppelung wird

$$n = \nu \left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right), \qquad n' = \nu \left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right); \tag{15}$$

die beiden Schwingungszahlen unterscheiden sich nur wenig von-

einander, und es treten Schwebungen (vgl. Nr. 81) ein, und zwar ist die Anzahl pro Sekunde um so geringer, je loser die Koppelung ist.

Ist ferner der Anfangszustand so gewählt, daß $C = C'$ und $\alpha = \alpha'$ ist, so erhält man

$$\begin{aligned} q_1 &= 2\,C \cos \nu \frac{\vartheta}{2} t \cos(\nu t - \alpha) \\ q_2 &= -\,2\,C \sin \nu \frac{\vartheta}{2} t \sin(\nu t - \alpha), \end{aligned} \tag{16}$$

d. h. die Amplitude ist im einen System ein Maximum, wenn sie im anderen Null ist, es findet also eine dauernde Energieübertragung vom einen aufs andere System statt.

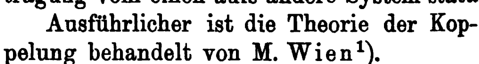


Fig. 59.

Ausführlicher ist die Theorie der Koppelung behandelt von M. Wien[1]).

Demonstrieren lassen sich die Phänomene der Koppelung, wie z. B. die Schwebungen und die Energiependelung mit Hilfe der Oberbeckschen Pendel (Fig. 59). Das sind zwei nebeneinander in derselben Ebene schwingende Pendel, die etwa durch einen Faden, an dem ein kleines Gewicht hängt, miteinander gekoppelt sind.

Aus (14) folgt

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{q_1 + q_2}{2} = C \cos(\nu \sqrt{1 + \vartheta}\, t - \alpha) \\ p_2 &= \frac{q_1 - q_2}{2} = C' \cos(\nu \sqrt{1 - \vartheta}\, t - \alpha'). \end{aligned} \tag{14'}$$

Die halbe Summe und die halbe Differenz der beiden Koordinaten q_1 und q_2 sind hier also als Normalkoordinaten anzusehen. Diese haben, wie wir eingangs dieser Nummer erwähnten, im allgemeinen nicht eine so anschauliche Bedeutung wie die q selbst.

Im Falle der Oberbeckschen Pendel würde p_1 die Bewegung des Schwerpunktes, p_2 die relative Bewegung des einen Pendels gegen das andere beschreiben.

92. Unendlich kleine gedämpfte Schwingungen. Die in Nr. 86 behandelte Theorie der unendlich kleinen Schwingungen leidet an einer Unvollständigkeit: sie gibt nicht Rechenschaft darüber, daß ein in Schwingungen versetztes System schließlich zur Ruhe kommt.

---

1) M. Wien, *Ann. Phys. u. Chem.* **61**, 1897, p. 151.

Der Grund dieser Dämpfung ist die Reibung an den umgebenden Luftteilchen, in Achsenlagern usw.

In vielen Fällen kann man die Erscheinungen beschreiben, wenn man eine Reibungskraft einführt, die der Geschwindigkeit proportional und ihr entgegen gerichtet ist.

Besonders gilt das, wenn die Reibungskräfte und die Amplituden der Schwingungen klein sind, und wenn der schwingende Körper solche Symmetrie besitzt, daß die Luftreibung beim Hin- und Rückweg dieselbe ist.

Demnach können wir ansetzen

$$m\ddot{x} = -ax - p\dot{x} \quad \text{oder} \quad m\ddot{x} + p\dot{x} + ax = 0, \tag{1}$$

p heißt die Dämpfungskonstante.

Wir integrieren diese Gleichung versuchsweise durch

$$x = e^{\lambda t}. \tag{2}$$

Dann muß λ der Gleichung

$$m\lambda^2 + p\lambda + a = 0 \tag{3}$$

genügen, welche die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 hat, nämlich

$$\lambda = -\frac{p}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2m}\right)^2 - \frac{a}{m}}. \tag{4}$$

Die allgemeinste Lösung von (1) ist dann

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{5}$$

Wir unterscheiden jetzt drei Fälle, je nachdem $\frac{a}{m} \gtreqless \left(\frac{p}{2m}\right)^2$ ist.

1. Fall $\frac{a}{m} > \left(\frac{p}{2m}\right)^2$, d. h. der Fall kleiner Reibung.

Dann schreiben wir besser (4) in der komplexen Form

$$\lambda = -\frac{p}{2m} \pm i\sqrt{\frac{a}{m} - \left(\frac{p}{2m}\right)^2}. \tag{6}$$

Natürlich hat nur der reelle oder der imaginäre Teil von (5) für sich physikalische Bedeutung, und wir finden die Lösung

$$x = e^{-\frac{p}{2m}t}\left\{A_1 \sin\sqrt{\frac{a}{m} - \left(\frac{p}{2m}\right)^2}\,t + A_2 \cos\sqrt{\frac{a}{m} - \left(\frac{p}{2m}\right)^2}\,t\right\} \tag{7}$$

oder

$$x = A e^{-\frac{p}{2m}t} \sin\left\{\sqrt{\frac{a}{m} - \left(\frac{p}{2m}\right)^2}\,t + \alpha\right\}. \tag{7'}$$

Wir haben es also mit einer gedämpften Schwingung zu tun (vgl. Nr. 78 (7)). Die Konstanten A und α bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen.

Die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a}{m} - \left(\frac{p}{2m}\right)^2}} \tag{8}$$

ist stets größer als die Schwingungsdauer T_0 desselben ungedämpft gedachten Systems, denn es ist

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{p}{2m}\right)^2, \tag{9}$$

doch kommt, wie wir aus (9) sehen, der Einfluß der Dämpfung, falls diese sehr klein ist, erst in zweiter Ordnung in Betracht.

Das logarithmische Dekrement ist (vgl. Nr. 78)

$$\Delta = \frac{p}{2m} T. \tag{10}$$

Durch Messung der Schwingungsdauer und des logarithmischen Dekrements[1]) kann man also die beiden Konstanten der Differentialgleichung $\frac{a}{m}$ und $\frac{p}{m}$ bestimmen, welche Aufschluß über die potentielle Energie des Systems in bestimmter Lage sowie über die Reibungskräfte geben.

Da wir es hier mit einer (gedämpft) periodischen Bewegung zu tun haben, heißt dieser erste Fall auch der *periodische Zustand*.

2. Fall $\frac{a}{m} < \left(\frac{p}{2m}\right)^2$. Ist $\frac{p}{m}$ groß genug, so werden die beiden Wurzeln λ in (4) reell, und zwar beide negativ. Wir erhalten die Lösung in der Form (5). Dieser Fall heißt der aperiodische Zustand, da die Geschwindigkeit nur einmal — zur Zeit t_1 — ihr Zeichen wechseln kann, nämlich wenn $\frac{dx}{dt} = 0$ ist. Das findet aber statt zur Zeit

$$t_1 = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{p}{2m}\right)^2 - \frac{a}{m}}} \lg \frac{C_2}{C_1} \frac{\frac{p}{2m} + \sqrt{\left(\frac{p}{2m}\right)^2 - \frac{a}{m}}}{-\frac{p}{2m} + \sqrt{\left(\frac{p}{2m}\right)^2 - \frac{a}{m}}}. \tag{11}$$

---

1) Vgl. F. Kohlrausch, *Lehrbuch der prakt. Phys.* 11. Aufl., Leipzig und Berlin 1910, § 26 und 27.

3. Fall: Ist $\left(\frac{p}{2m}\right)^2 = \frac{a}{m}$, so liegt der *aperiodische Grenzzustand* vor. In diesem Falle ergibt (4) nur *einen* Wert für A, also haben wir auch nur ein partikulares Integral. Das vollständige Integral stellt sich dann in der Form

$$x = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{p}{2m}t} \tag{12}$$

dar, welche auch keine periodische Bewegung repräsentiert.

93. Der ballistische Ausschlag. Von Interesse sind die Lösungen, wenn zur Zeit $t = 0$ $x = 0$ ist und $\frac{dx}{dt} = C$ vorgeschrieben ist, d. h. wenn das System einen plötzlichen Impuls bekommt. (Impuls ist mit Bewegungsgröße identisch, die in Nr. 8 definiert ist.)

Setzen wir[1])

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{a}} \\ \varepsilon &= \frac{2\sqrt{am}}{p}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

so entspricht $\varepsilon > 1$ dem periodischen, $\varepsilon < 1$ dem aperiodischen Fall, $\varepsilon = 1$ dem aperiodischen Grenzzustand, und es ist im ersten Falle

$$T = T_0 \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}, \qquad \Lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}. \tag{2}$$

Die Integration der Differentialgleichung zeigt, daß $\frac{dx}{dt} = 0$ wird, d. h. daß die Umkehr zur Zeit

$$t_1 = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \lg \operatorname{nat} F(\varepsilon) \cdot T_0 \tag{3}$$

stattfindet, wo

$$F(\varepsilon) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}} = e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \tag{4}$$

ist. Der erste Ausdruck hat im aperiodischen Falle, der zweite im periodischen Falle reelle Form.[1]) Kurve I in Fig. 60 stellt $\frac{2t_1}{T_0}$ als Funktion von ε dar.

---

1) Vgl. Robertson, *The Electrician* **47**, p. 17, 1901; H. Dießelhorst, *Ann. Phys.* **9**, 1902, p. 458 und die Tabelle 29 in Kohlrausch, *Lehrbuch d. prakt. Physik* 11. Aufl., Leipzig und Berlin 1910.

Definiert man als Rückkehrzeit t_n die Zeit, die erforderlich ist, damit der Erstausschlag x_1 bis auf $\frac{1}{n}$ seines Betrages zurückgeht und dieser Betrag nicht mehr überschritten wird, so findet man, daß t_n als Funktion von ε sich nach Dießelhorst so darstellt, wie Kurve II es verdeutlicht, in der $\frac{t_n}{5\,T_0}$ als Ordinate aufgetragen ist, d. h. die Rückkehrzeit ist wesentlich am kleinsten in der Nähe von $\varepsilon = 1$, also im aperiodischen Grenzfall. Deshalb wird man, wenn möglich, ein ballistisches Instrument, um schnell arbeiten zu können, stets so konstruieren, daß dieser Fall vorliegt.

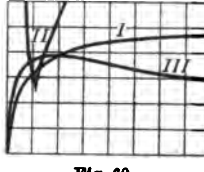


Fig. 60.

Den ersten Ausschlag erhält man, wenn man t_1 aus (3) in das Integral einsetzt. Es ergibt sich

$$x_1 = \frac{T_0 C}{2\pi} F(\varepsilon). \tag{5}$$

$\frac{F(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$, eine Funktion, die für die Theorie ballistischer Galvanometer von Interesse ist, ist in Kurve III gezeichnet.

Man kann also nach (5) durch Beobachtung des ersten Ausschlags den Impuls bestimmen, der auf das System gewirkt hat, falls man die Schwingungsdauer des ungedämpften Systems und das logarithmische Dekrement kennt.

94. Die Multiplikationsmethode und die Zurückwerfungsmethode. Sind die Impulse sehr klein, so ist es vorteilhaft, sie regelmäßig zu wiederholen. Dadurch entsteht eine Bewegung, die schließlich konstant wird. Auch kann man im konstanten Endzustand beliebig häufig ablesen und so die Genauigkeit vermehren.

1. Die Multiplikationsmethode. Man erteile dem schwingenden System einen Impuls J; dadurch verläßt es die Gleichgewichtslage und kehrt zurück. Im Moment des Passierens der Gleichgewichtslage, also nach einer halben Schwingung, erteilt man den zweiten Impuls nach der entgegengesetzten Richtung, der die vorhandene Bewegung vermehrt usf. Die Schwingungen werden schließlich konstante Amplituden bekommen, wenn der Impuls gerade an Bewegungsgröße ersetzt, was durch Reibung auf einer halben Schwingung verloren gegangen ist.

Dieser konstante Grenzwert des Ausschlags soll berechnet werden. Ist im stationären Endzustand die Geschwindigkeit, nach-

dem der Impuls erteilt ist, in der Gleichgewichtslage v_0, so ist sie beim nächsten Passieren der Gleichgewichtslage nach Nr. **92** (7') $v_0 e^{-\frac{p}{4m}T}$. Dazu kommt durch den neuen Impuls der Geschwindigkeitszuwachs $\frac{J}{m}$, also muß

$$v_0 e^{-\frac{p}{4m}T} + \frac{J}{m} = v_0$$

sein, d. h.

$$v_0 = \frac{\frac{J}{m}}{1 - e^{-\frac{p}{4m}T}}. \tag{1}$$

Ein mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 begabtes System erfährt nach Nr. **93** (5) den Ausschlag

$$x_1 = \frac{T_0 v_0}{2\pi} F(\varepsilon) = \frac{T_0 J F(\varepsilon)}{2\pi m\left(1 - e^{-\frac{p}{4m}T}\right)}, \tag{2}$$

wo $F(\varepsilon)$ durch den zweiten Ausdruck Nr. **93** (4) gegeben ist.

Der Ausschlag wird also um so größer, je kleiner die Dämpfung ist, aber dann dauert es auch länger, bis Konstanz der Schwingungen eintritt.

Nach (2) verhalten sich ferner zwei Impulse wie die dazu gehörigen endgültigen Ausschläge.

Wenn man nur Impulse nach *einer* Richtung erteilen kann, wie etwa beim Anstoßen einer Schaukel, so muß man eine ganze Schwingungsdauer abwarten. Dann verändert sich Formel (2) insofern, als $e^{-\frac{p}{2m}T}$ anstatt $e^{-\frac{p}{4m}T}$ im Nenner auftritt.

2. Die Zurückwerfungsmethode. Man erteile dem System einen Impuls. Wenn nach Ablauf einer *ganzen* Periode das System wieder durch die Gleichgewichtslage kommt, erteile man den Impuls nach der entgegengesetzten Richtung. Hierdurch tritt eine plötzliche Umkehr der Schwingung, sogenannte Zurückwerfung ein, und wenn schließlich der Vorgang stationär geworden ist, wird er durch Fig. 61 [1]) dargestellt.

---

1) Vgl. F. Kohlrausch, *Lehrbuch der prakt. Phys.*, 11. Aufl., Leipzig u. Berlin 1910, § 110.

Es treten also abwechselnd große und kleine Ausschläge a und b ein. Offenbar ist

$$b = a e^{-\frac{p}{4m} T}, \tag{3}$$

d. h. es ergibt sich aus der Methode auch das Dämpfungsverhältnis.

Ferner muß

$$\frac{J}{m} - v_0 e^{-\frac{p}{2m} T} = v_0$$

sein, also

$$v_0 = \frac{J}{m\left(1 + e^{-\frac{p}{2m} T}\right)}, \tag{4}$$

woraus nach Nr. 93 (5)

$$a = \frac{T_0 J F(\varepsilon)}{2\pi m \left(1 + e^{-\frac{p}{2m} T}\right)} \tag{5}$$

und nach (3) auch b folgt.

Durch Beobachtung von a oder b läßt sich also der Impuls bestimmen.[1])

Wenn die Zeitdauer τ des Impulses nicht vollständig gegen die Schwingungsdauer T_0 des schwingenden Systems zu vernachlässigen ist, so tritt eine Korrektion am Ausschlag ein, die aber von zweiter Ordnung bezüglich $\frac{\tau}{T_0}$ ist. Ebenso werden bei den beiden zuletzt beschriebenen Beobachtungsmethoden die Ausschläge nur um Größen zweiter Ordnung in $\frac{\vartheta}{T_0}$ gefälscht, falls ϑ die Zeitdifferenz zwischen dem wirklich erteilten und dem rechtzeitig erteilten Impuls angibt. Dies wurde zuerst von Dorn[2]), später unter allgemeineren Voraussetzungen von Dießelhorst[3]) nachgewiesen.

Fig. 61.

1) Wilh. Weber, *Abh. d. sächsischen Ges. d. Wiss.* **1**, 341, 1852; *Werke* **3**, 438 und 441, 1893.
2) P. Dorn, *Wied. Ann.* **17**, 654, 1882.
3) H. Dießelhorst, *Ann. Phys.* **9**, 712, 1902.

Handelt es sich bei den vorigen Betrachtungen um Drehungen um eine Achse (Torsionsschwingungen), so bedeutet x den Winkel, um den das System aus der Gleichgewichtslage tordiert ist, und m ist durch das Trägheitsmoment K zu ersetzen. Unter J ist dann der Drehimpuls, unter v die Winkelgeschwindigkeit zu verstehen.

95. Dämpfung bei mehreren Freiheitsgraden. Wenn die Dämpfungskräfte, die auf ein schwingendes System von mehreren Freiheitsgraden wirken, den Geschwindigkeiten proportional sind, so können sie in der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_{1x} &= -\varkappa_{1x}\dot{x}_1 - \varkappa_{2x}\dot{x}_2 - \cdots - \varkappa_{nx}\dot{x}_n \\ \mathfrak{f}_{1y} &= -\varkappa_{1y}\dot{y}_1 - \varkappa_{2y}\dot{y}_2 - \cdots - \varkappa_{ny}\dot{y}_n \\ \mathfrak{f}_{1z} &= -\varkappa_{1z}\dot{z}_1 - \varkappa_{2z}\dot{z}_2 - \cdots - \varkappa_{nz}\dot{z}_n \\ &\text{usw.} \end{aligned} \tag{1}$$

dargestellt werden oder die Arbeit der Reibungskräfte in der Form

$$\begin{aligned} \delta' A &= \sum(\mathfrak{f}_{ix}\delta x_i + \mathfrak{f}_{iy}\delta y_i + \mathfrak{f}_{iz}\delta z_i) \\ &= -\sum(\varkappa_{ix}\dot{x}_i\delta x_i + \varkappa_{iy}\dot{y}_i\delta y_i + \varkappa_{iz}\dot{z}_i\delta z_i). \end{aligned} \tag{2}$$

Dieser Ausdruck läßt sich aber in allgemeinen Koordinaten schreiben.

Führen wir mit Lord Rayleigh[1]) die Zerstreuungs- oder Dissipationsfunktion, d. h. die in der Zeiteinheit vergeudete Energie, ein, so lautet dieselbe in allgemeinen Koordinaten

$$2F = \sum e_{i\varkappa}\dot{q}_i\dot{q}_\varkappa, \tag{3}$$

wo $e_{ik} = e_{ki}$ ist, und die virtuelle Arbeit der Reibungskräfte

$$\delta' A = -\sum_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i. \tag{4}$$

Die Lagrangeschen Gleichungen in der zweiten Form lauten also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial(T-V)}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}. \tag{5}$$

Für unendlich kleine Schwingungen ist aber

$$\begin{aligned} 2V &= \sum\sum a_{i\varkappa}q_i q_\varkappa && \text{vgl Nr. 88 (1)} \\ 2T &= \sum\sum b_{i\varkappa}\dot{q}_i\dot{q}_\varkappa && \text{vgl. Nr. 88 (2)} \\ 2F &= \sum\sum e_{i\varkappa}\dot{q}_i\dot{q}_\varkappa && \text{vgl. (3).} \end{aligned}$$

1) Lord Rayleigh, *London. Proc. Math. Soc.* 4, June 1873.

Man kann nun durch Einführung von Normalkoordinaten p V und T, aber im allgemeinen nicht gleichzeitig F auf die Summe von Quadraten reduzieren, also setzen

$$\begin{aligned} 2V &= \lambda_1^2 p_1^2 + \lambda_2^2 p_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 p_n^2 \\ 2T &= \dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2 + \cdots + \dot{p}_n^2, \end{aligned} \qquad \text{vgl. Nr. 88 (13)}$$

aber es wird sein

$$2F = \sum_{i\varkappa} c_{i\varkappa} \dot{p}_i \dot{p}_\varkappa, \tag{6}$$

also lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} &\ddot{p}_1 + \lambda_1^2 p_1 + c_{11}\dot{p}_1 + c_{12}\dot{p}_2 + \cdots + c_{1n}\dot{p}_n = 0 \\ &\ddot{p}_2 + \lambda_2^2 p_2 + c_{21}\dot{p}_1 + c_{22}\dot{p}_2 + \cdots + c_{2n}\dot{p}_n = 0 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\ddot{p}_n + \lambda_n^2 p_n + c_{n1}\dot{p}_1 + c_{n2}\dot{p}_2 + \cdots + c_{nn}\dot{p}_n = 0. \quad (c_{i\varkappa} = c_{\varkappa i}) \end{aligned} \tag{7}$$

Wenn anfänglich alle Koordinaten Null sind und nur die Geschwindigkeit in Richtung von einer Koordinate von Null verschieden ist, werden durch die Reibungskräfte doch Bewegungen in Richtung der anderen Koordinaten auftreten, außer wenn infolge gewisser Symmetrien der Form einige $c_{i\varkappa}$ verschwinden. Diese Beeinflussung der Bewegung erfolgt nach einem Ausdrucke von M. Wien[1]) durch „Reibungskoppelung".

Die Integration läßt sich bewerkstelligen, indem man

$$q_1 = A_1 e^{\mu t},\ q_2 = A_2 e^{\mu t},\ \ldots,\ q_n = A_n e^{\mu t} \tag{8}$$

ansetzt und genau wie früher verfährt.

96. Einwirkung äußerer Kräfte; Resonanz. Wirkt außer der rücktreibenden inneren Kraft und der Reibungskraft noch eine äußere Kraft f, die wir als gegebene Zeitfunktion annehmen wollen, so lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + p\dot{x} + ax = f(t). \tag{1}$$

Aus der Form der Gleichung folgt: Hat man ein beliebiges partikulares Integral von (1) gefunden, so kann man hierzu noch das allgemeine Integral der homogen gemachten Gleichung

$$m\ddot{x} + p\dot{x} + ax = 0 \tag{2}$$

addieren. Die Summe wird auch ein Integral der Gleichung (1) sein, und zwar das allgemeinste, da zwei willkürliche Konstanten

1) M. Wien, *Ann. Phys. u. Chem.* **61**, 1897, S. 151.

in ihm enthalten sind; d. h. der durch die äußere Kraft erzwungenen Schwingung überlagert sich im allgemeinen eine freie Schwingung des Systems.

Ist y eine Lösung der Gleichung

$$m\ddot{y} + p\dot{y} + ay = g(t), \tag{3}$$

so ist $x + y$ eine Lösung der Gleichung

$$m(\ddot{x} + \ddot{y}) + p(\dot{x} + \dot{y}) + a(x + y) = f(t) + g(t), \tag{4}$$

d. h. die Bewegungen der Einzelkräfte superponieren sich einfach.

Gleichung (2) habe die partikularen Integrale $\xi_1(t)$ und $\xi_2(t)$, die nach Nr. **92** bekannt sind, dann ist das allgemeinste Integral von (1)

$$x = \int_0^t \frac{f(\tau)}{m}[\xi_1(\tau)\,\xi_2(t) - \xi_2(\tau)\,\xi_1(t)]\frac{d\tau}{\Delta(\tau)} + c_1\xi_1(t) + c_2\xi_2(t), \tag{5}$$

wo

$$\Delta(t) = \xi_1\dot{\xi}_2 - \xi_2\dot{\xi}_1$$

bedeutet.

Anstatt der unteren Grenze Null im Integral kann jede beliebige andere Konstante gewählt werden.[1])

Diese Integrationsmethode könnten wir auch auf periodische Kräfte anwenden, doch werden wir diese besser nach dem Fourierschen Satze in Sinusschwingungen zerlegen, die wir einzeln in die rechte Seite von (1) einsetzen können. Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + p\dot{x} + ax = C\cos(2\pi\nu t + \gamma). \tag{6}$$

x ist also der reelle Teil des Integrals z von

$$m\ddot{z} + p\dot{z} + az = Ce^{2\pi i\nu t + \gamma i}. \tag{7}$$

Wir setzen z in der Form an

$$z = Ae^{2\pi i\nu t}. \tag{8}$$

Dann hat A der Gleichung zu genügen

$$A = \frac{Ce^{i\gamma}}{-m4\pi^2\nu^2 + p2\pi i\nu + a}, \tag{9}$$

1) Vgl. z. B. H. Weber, *Partielle Differentialgleichungen* 1, 5. Aufl., Braunschweig 1910, S. 155.

oder, indem wir die Schwingungszahl der freien (ungedämpft gedachten) Schwingung n_0 einführen, also

$$\frac{a}{m} = 4\pi^2 n_0^2 \tag{10}$$

setzen,

$$A = \frac{\dfrac{Ce^{i\gamma}}{4\pi^2 m}}{n_0^2 - \nu^2 + \dfrac{p\nu i}{2\pi m}}. \tag{11}$$

Für den komplexen Nenner setzen wir

$$n_0^2 - \nu^2 + \frac{p\nu i}{2\pi m} = Ke^{i\varkappa}, \tag{12}$$

d. h.

$$K = \sqrt{(n_0^2 - \nu^2)^2 + \left(\frac{p\nu}{2\pi m}\right)^2}, \quad \operatorname{tg}\varkappa = \frac{p\nu}{2\pi m(n_0^2 - \nu^2)}. \tag{13}$$

So wird

$$z = \frac{C}{4\pi^2 mK} e^{2\pi i\nu t + i(\gamma - \varkappa)}$$

oder

$$x = \frac{C}{4\pi^2 mK}\cos(2\pi\nu t + \gamma - \varkappa). \tag{14}$$

Dies ist die *erzwungene* Schwingung. Dazu kommt das allgemeine Integral von (2), die sogenannte *freie* Schwingung; also ist das allgemeinste Integral

$$x = \frac{C}{4\pi^2 mK}\cos(2\pi\nu t + \gamma - \varkappa) + Be^{-\frac{p}{2m}t}\cos(2\pi nt + \beta), \tag{15}$$

wo

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{m} - \left(\frac{p}{2m}\right)^2}$$

ist (vgl. Nr. **92** (7')).

Der zweite Term in (15) enthält zwei willkürliche Konstanten, ermöglicht es also, x jedem Anfangszustand anzupassen; dieser zweite Term verschwindet aber allmählich infolge der Dämpfung. Sind n und ν annähernd gleich, so werden anfänglich durch das Zusammenwirken der freien und der erzwungenen Schwingung Schwebungen auftreten.

Die erzwungene Schwingung hat dieselbe Schwingungszahl wie die äußere Kraft. Die Amplitude der erregten Schwingung ist der erregenden Kraft direkt und K umgekehrt proportional.

Bei kleiner Dämpfung darf man K durch $n_0^2 - \nu^2$ ersetzen, solange nicht n_0 nahe gleich ν ist. Umgekehrt, ist n_0 nahezu gleich ν, so darf man bei nicht zu kleiner Dämpfung K durch $\frac{p\nu}{2\pi m}$ ersetzen. Ist $n_0 = \nu$, d. h. im Falle der Resonanz, ist $K = \frac{p\nu}{2\pi m}$, also die Amplitude der erregten Schwingung $\frac{C}{2\pi p\nu}$ der Dämpfung umgekehrt proportional und von der Masse ganz unabhängig.

Ist p klein, so kann also infolge von Resonanz die Amplitude sehr groß werden.

Für $p = 0$ und $n_0 = \nu$ wird das Integral sinnlos. Dann ist, wie leicht durch Substitution ersichtlich,

$$x = \frac{C}{4\pi\nu m} t \sin(2\pi\nu t + \gamma). \tag{16}$$

Hierdurch ist eine Schwingung von dauernd größer werdender Amplitude dargestellt, die also nur das Anfangsstadium der Bewegung beschreiben kann; schließlich darf auch die kleinste Dämpfung im Resonanzfalle nicht mehr vernachlässigt werden.

Denken wir uns die elastische Kraft des Systems und damit a und also n_0 variabel, so wird die Amplitude

$$\frac{C}{4\pi^2\nu^2 m \sqrt{\left(\frac{n_0^2}{\nu^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{p}{2\pi m\nu}\right)^2}}$$

Funktion von n_0.

Mit Zenneck[1]) tragen wir $\frac{n_0}{\nu}$ als Abszisse, das Verhältnis der Amplitude x zur Maximalamplitude x_0 (die für $\frac{n_0}{\nu} = 1$ stattfindet) als Ordinate auf, d. h. wenn wir noch $\frac{p}{2\pi m\nu} = \varepsilon$ setzen,

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{n_0^2}{\nu^2} - 1\right)^2 + \varepsilon^2}}$$

als Funktion von $\frac{n_0}{\nu}$. Diese Kurve heißt eine Resonanzkurve, welche die Form einer der Kurven der Fig. 62 hat. Kurve I entspricht kleiner, Kurve II größerer Dämpfung. Definieren wir mit

1) J. Zenneck, *Elektromagn. Schwingungen und drahtlose Telegraphie,* Stuttgart 1905, S. 571.

Zenneck[1]) als *Schärfe der Resonanz* die Krümmung im Gipfel der Kurve, so finden wir für diese

$$\frac{4}{\varepsilon^2} = \frac{16\pi^2 m^2 \nu^2}{p^2}. \tag{17}$$

Tragen wir dagegen die wirklichen Amplituden als Funktion von $\frac{n_0}{\nu}$ auf, so ergibt sich das Bild der Fig. 63.

Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn man sich nicht n_0, sondern ν als variabel vorstellt. Dann wird, wie (13) zeigt, die Maximalamplitude nicht genau für $n_0 = \nu$ eintreten.[2])

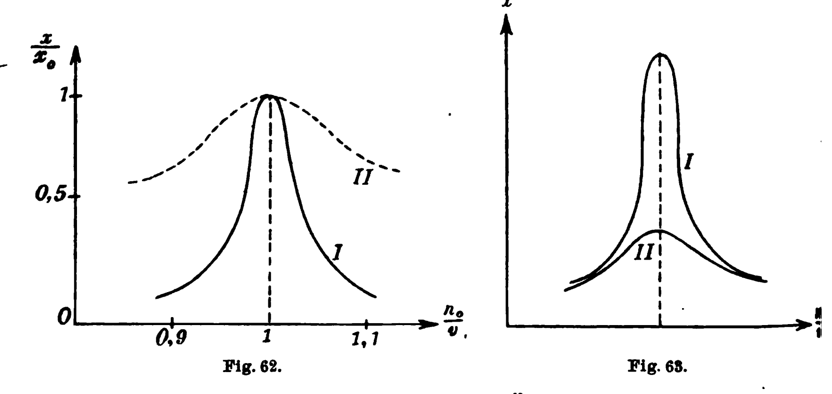


Fig. 62. Fig. 63.

Eine kleine Abweichung der Größe $\frac{n_0}{\nu}$ von 1, d. h. eine kleine *Verstimmung* verkleinert bei kleiner Dämpfung die Amplitude verhältnismäßig schon sehr viel, dagegen ist bei Resonanz die Amplitude des schwach gedämpften Systems die bei weitem größere als bei stark gedämpftem System.

Man kann also ein schwingendes System sehr empfindlich machen für Kräfte einer bestimmten Periode, indem man das System durch Veränderung von a oder m auf diese Periode abstimmt. Andrerseits kann aber eine kräftige Bewegung infolge von ungewollt auftretenden Resonanzerscheinungen auch gefährlich werden. Z. B. dürfen Soldaten nicht im Tritt über eine unsichere Brücke gehen, da das Tempo des Marsches eventuell mit der Eigenschwingung der Brücke zusammenfallen könnte; auch die Wellenbewegung im Wasser kann in Resonanz sein mit der

1) Vgl. Anm. S. 199.
2) Vgl. E. Budde, *Verh. d. deutsch. phys. Ges.*, 1911, S. 121.

Eigenschwingung eines Schiffes um seine Gleichgewichtslage, und so zu heftigem Schwanken Anlaß geben. Ferner ist es passiert, daß die Wellen von Schiffsschrauben, die in Resonanz mit dem Gang der Maschine waren, gebrochen sind.

Wie (14) zeigt, ist die Phase der Bewegung auch gegen die der erregenden Kraft um $\varkappa$ verzögert, und zwar liegt $\varkappa$ nach (12) stets zwischen 0 und π. Für $n_0 > \nu$ liegt $\varkappa$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, für $n_0 < \nu$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π; für $n_0 = \nu$ ist $\varkappa = \frac{\pi}{2}$, d. h. die Erregung ein Maximum, wenn die Bewegung ein Minimum ist, und umgekehrt.

97. Schwingungen endlicher Amplitude. Bezeichnet x eine allgemeine Koordinate eines Systems mit einem Freiheitsgrade und $x = 0$ die stabile Gleichgewichtslage, so drückt sich die kinetische Energie folgendermaßen aus

$$2T = E(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{1}$$

Ferner nehmen wir an, daß die geleistete Arbeit bei der Verrückung dx sich durch die Potenzreihe

$$d'A = (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)\, dx. \quad (a_1 < 0) \tag{2}$$

darstellen lasse.

Durch die Substitution

$$\xi = \int_0^x \sqrt{E(x)}\, dx \tag{3}$$

geht $2T$ in die Form $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$ über. Für Translationen oder Drehungen eines starren Körpers ist E eine Konstante, nämlich die Masse resp. das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse.

Nach dem Energieprinzip können wir also die Bewegungsgleichung in der Form

$$m\ddot{x} = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{4}$$

schreiben, wo die Koeffizienten a eine andere Bedeutung als in (2) haben und wir den Buchstaben x wieder anstatt ξ geschrieben haben. Setzen wir

$$t' = \sqrt{-\frac{a_1}{m}}\, t, \tag{5}$$

so wird

$$\frac{d^2x}{dt'^2} + x = -\frac{a_2}{a_1} x^2 - \frac{a_3}{a_1} x^3 - \cdots. \tag{6}$$

Das Integral der lebendigen Kraft ergibt

$$\left(\frac{dx}{dt'}\right)^2 + x^2 = c'^2 - \frac{2}{3}\frac{a_2}{a_1}x^3 - \frac{2}{4}\frac{a_3}{a_1}x^4 - \cdots. \tag{7}$$

Die Integrationskonstante c' bedeutet den Wert von dx/dt' für $x=0$; d. h. die Geschwindigkeit im Nullpunkte ist $c'\sqrt{-a_1/m}$.

Die Umkehrpunkte $x = c$ $(c > 0)$ und $x = \bar{c}$ $(\bar{c} < 0)$ ergeben sich aus (7) durch Potenzentwicklung, indem man in (7) $dx/dt' = 0$ und $x = c$ resp. $\bar{c}$ setzt, als

$$\begin{aligned} c &= c' - \frac{1}{3}\frac{a_2}{a_1}c'^2 + \left[\frac{5}{18}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{a_3}{a_1}\right]c'^3 + \cdots \\ \bar{c} &= -c' - \frac{1}{3}\frac{a_2}{a_1}c'^2 - \left[\frac{5}{18}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{a_3}{a_1}\right]c'^3 + \cdots. \end{aligned} \tag{8}$$

(8) drückt also die Ausschläge nach beiden Seiten als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit aus.

Ebenso folgt durch Umkehrung der Reihen

$$\begin{aligned} c' &= c + \frac{1}{3}\frac{a_2}{a_1}c^2 - \left(\frac{1}{18}\frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{1}{4}\frac{a_3}{a_1}\right)c^3 + \cdots \\ \bar{c} &= -c - \frac{2}{3}\frac{a_2}{a_1}c^2 - \frac{4}{9}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 c^3 + \cdots. \end{aligned} \tag{9}$$

(9) gibt die Geschwindigkeit im Nullpunkt als Funktion des einen Maximalausschlags, sowie den einen Maximalausschlag als Funktion des anderen.

(8) zeigt, daß die Summe der beiden Ausschläge $c + \bar{c}$ den Unsymmetriefaktor der potentiellen Energie $\frac{a_2}{a_1}$ gibt, während die Differenz

$$\frac{c - \bar{c}}{2} = c' + \left[\frac{5}{18}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{a_3}{a_1}\right]c'^3$$

dann $\frac{a_3}{a_1}$ berechnen läßt.

Sind die Anfangsbedingungen

$$\text{für } t' = 0 \qquad x = c, \quad \frac{dx}{dt'} = 0, \tag{10}$$

so läßt sich x in der Form

$$x = c\varphi_1(t') + c^2\varphi_2(t') + c^3\varphi_3(t') + \cdots \tag{11}$$

darstellen, und wegen (10) ist

$$\begin{aligned}&\varphi_1(0)=1,\ \varphi_2(0)=0,\ \varphi_3(0)=0,\ \ldots\\&\dot\varphi_1(0)=0,\ \dot\varphi_2(0)=0,\ \dot\varphi_3(0)=0,\ \ldots,\end{aligned}\qquad(12)$$

wo $\dot\varphi$ eine Abkürzung für $\frac{d\varphi}{dt'}$ bedeuten soll.

Substituiert man (11) in (6), so erhält man die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}&\ddot\varphi_1+\varphi_1=0\\&\ddot\varphi_2+\varphi_2=-\frac{a_2}{a_1}\varphi_1^2\\&\ddot\varphi_3+\varphi_3=-2\frac{a_2}{a_1}\varphi_1\varphi_2-\frac{a_3}{a_1}\varphi_1^3,\end{aligned}\qquad(13)$$

die unter Berücksichtigung von (12) die Integrale liefern

$$\begin{aligned}\varphi_1&=\cos t'\\\varphi_2&=-\frac{a_2}{6a_1}(3-2\cos t'-\cos 2t')\\\varphi_3&=-\frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2+\left[\frac{29}{144}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2-\frac{1}{32}\frac{a_3}{a_1}\right]\cos t'+\frac{1}{9}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\cos 2t'\\&\quad+\left[\frac{1}{48}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2+\frac{1}{32}\frac{a_3}{a_1}\right]\cos 3t'+\left[\frac{5}{12}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2-\frac{3}{8}\frac{a_3}{a_1}\right]t'\sin t'.\end{aligned}\qquad(14)$$

Zur Zeit $t'=\omega$ sei $\frac{dx}{dt'}$ wieder Null, es sei also

$$\dot\varphi_1(\omega)+c\dot\varphi_2(\omega)+c^2\dot\varphi_3(\omega)+\cdots=0,$$

woraus, wenn man $\omega=\pi+\varepsilon$ setzt und ε nach Potenzen von c entwickelt,

$$\omega=\pi+\pi\left[\frac{5}{12}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2-\frac{3}{8}\frac{a_3}{a_1}\right]c^2\qquad(15)$$

folgt. Die Schwingungsdauer, die von der Amplitude abhängt, ist also

$$T=2\pi\sqrt{-\frac{m}{a_1}}+2\pi\sqrt{-\frac{m}{a_1}}\left[\frac{5}{12}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2-\frac{3}{8}\frac{a_3}{a_1}\right]c^2.\qquad(16)$$

Ebenso folgt die Zeit, die das System braucht, um von der äußersten Elongation c in den Nullpunkt zu kommen,

$$\begin{aligned}\frac{T_1}{2}=\sqrt{-\frac{m}{a_1}}\Bigg\{&\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\frac{a_2}{a_1}c\\&+\left[\pi\left(\frac{5}{24}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2-\frac{3}{16}\frac{a_3}{a_1}\right)-\frac{2}{9}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\right]c^2\Bigg\},\end{aligned}\qquad(17)$$

während die Zeit, die das System braucht, um vom Nullpunkt bis zur anderen äußersten Elongation $\bar{c}$ zu gelangen,

$$\frac{T_2}{2} = \frac{T - T_1}{2} = \sqrt{-\frac{m}{a_1}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \frac{a_2}{a_1} c \right.$$
$$\left. + \left[\pi \left(\frac{5}{24} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 - \frac{3}{16} \frac{a_3}{a_1} \right) + \frac{2}{9} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \right] c^2 \right\} \tag{18}$$

beträgt.

Substituiert man in (6)

$$u = \frac{\pi}{\omega} t', \tag{19}$$

so erhält man die Gleichung

$$\frac{\pi^2}{\omega^2} \frac{d^2 x}{d u^2} + x = - \frac{a_2}{a_1} x^2 - \frac{a_3}{a_1} x^3 \ldots, \tag{20}$$

die die Lösung in der Form

$$x = \psi_1(u) c + \psi_2(u) c^2 + \psi_3(u) c^3 + \cdots \tag{21}$$

gibt.

Die Größen ψ bestimmen sich, wenn die Bedingungen (10) auch jetzt gelten und man (15) berücksichtigt, zu

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \cos u \\ \psi_2 &= -\frac{1}{6} \frac{a_2}{a_1} (3 - 2 \cos u - \cos 2u) \\ \psi_3 &= -\frac{1}{3} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 + \left[\frac{29}{144} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 - \frac{1}{32} \frac{a_3}{a_1} \right] \cos u + \frac{1}{9} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \cos 2u \\ &\quad + \left[\frac{1}{48} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 + \frac{1}{32} \frac{a_3}{a_1} \right] \cos 3u, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

woraus in anderer Anordnung schließlich

$$x = \left(-\frac{1}{2} \frac{a_2}{a_1} c^2 - \frac{1}{3} \frac{a_2^2}{a_1^2} c^3 \right) + \left[c + \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_1} c^2 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{29}{144} \frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{1}{32} \frac{a_3}{a_1} \right) c^3 \right] \cos u + \left(\frac{a_2}{6 a_1} c^2 + \frac{1}{9} \frac{a_2^2}{a_1^2} c^3 \right) \cos 2u$$
$$+ \left(\frac{1}{48} \frac{a_2^2}{a_1^2} + \frac{1}{32} \frac{a_3}{a_1} \right) c^3 \cos 3u \tag{23}$$

wird. Hier ist

$$u = \frac{\pi}{\omega} \sqrt{-\frac{a_1}{m}}\, t, \tag{24}$$

wo ω durch (15) gegeben ist.

Wir dürfen, um anderen Anfangsbedingungen gerecht zu werden, zu u noch eine beliebige Phasenkonstante α addieren und haben dann in c und α die Integrationskonstanten des Problems.

Bei kräftigeren Amplituden wird also die Periode verändert, und harmonische Oberschwingungen werden zwangsweise mit hervorgerufen.

Obige Ausführungen stammen von Horn[1]); es konnten nicht alle Einzelheiten und Feinheiten der Hornschen Arbeit hier reproduziert werden. Die Methode ist von ihm auf Systeme mit mehreren Freiheitsgraden ausgedehnt worden[2]), auch Dämpfung wurde mit berücksichtigt und die Theorie auf konkrete Fälle angewandt.[3]) Korteweg[4]) hat bereits früher, aber ohne Konvergenzbeweis, Gleichung (23) abgeleitet.

Beobachtungen über diese Frage liegen vor von F. Richarz und P. Schulze[5]), P. Schulze[6]), F. A. Schulze[7]); die Formeln von F. A. Schulze[7]) sind aber unvollständig, da durchweg a_3 vernachlässigt ist, was, wie aus (16), (17), (18), (23) erhellt, nicht angängig ist. Allerdings wurde von Eichhorn[8]) gezeigt, daß die von Richarz und Schulze begangenen Vernachlässigungen in manchen Fällen nichts Merkliches ausmachen. Braun[9]) hat nur den häufig vorkommenden Fall symmetrischer Schwingungen theoretisch behandelt, d. h. er hat $a_2 = 0$ gesetzt; auch Schering[10]) beschäftigte sich mit der Frage im Hinblick auf die Theorie des ballistischen Galvanometers; Hartmann-Kempf[11]) behandelt theoretisch und experimentell den Einfluß der Amplitude auf die Tonhöhe und das Dekrement bei akustischen Problemen.

98. Erzwungene Schwingungen endlicher Amplitude. Schließlich mögen noch erzwungene Schwingungen von endlicher Amplitude behandelt werden.

---

1) J. Horn, *Z. f. Math. u. Phys.* 47, 1902, S. 400; **49**, 1903, S. 246.

2) Ebenda **48**, 1903, S. 400. 3) Ebenda **52**, 1905, S. 1.

4) Korteweg, *Arch. néerl.* (2) **1**, 1897, S. 229; E. J. Routh, *Die Dynamik der Systeme starrer Körper*, deutsche Ausgabe **2**, Leipzig 1898, S. 258ff. und Lord Rayleigh, *Die Theorie d. Schalls*, deutsche Ausg. **1**, 1880, § 67 wenden die Methode der sukzessiven Approximation an.

5) F. Richarz und P. Schulze, *Arch. néerl.* (2) **6**, 1901; *Ann. Phys.* (4) **8**, 1902, S. 348.

6) P. Schulze, *Diss. Greifswald*, 1901; *Ann. Phys.* **8**, 1902, S. 714.

7) F. A. Schulze, *Ann. Phys.* **9**, 1902, S. 1111.

8) F. Eichhorn, *Diss. Marburg*, 1909.

9) F. Braun, *Pogg. Ann. Phys. u. Chem.* **151**, S. 51 u. 250, 1874.

10) K. Schering, *Wied. Ann.* **9**, 1880, S. 452.

11) R. Hartmann-Kempf, *Ann. Phys.* (4) **13**, 1904, S. 124; *Diss. Würzburg* 1903.

Die Bewegungsgleichung lautet unter der Annahme einer unsymmetrischen Direktionskraft

$$\frac{d^2 x}{dt'^2} + x = -\frac{a_2}{a_1} x^2 + \sum_{\nu}^{1,\infty} A_\nu \sin\left(2\pi\nu \frac{t'}{\tau'} + \alpha_\nu\right), \quad (1)$$

wo $t' = t\sqrt{-a_1/m}$ und $\tau' = \tau\sqrt{-a_1/m}$ bedeutet, unter τ die Periode der äußeren Kraft verstanden. Die Schwingungszahlen der erregenden Partialschwingungen sind also ν/τ' je nach dem Werte von ν, der gerade auftritt.

Wir setzen an

$$x = \sum_{\nu} A_\nu \varphi_\nu(t) + \sum_{\nu}\sum_{\mu} A_\nu A_\mu \varphi_{\nu\mu}(t). \quad (2)$$

Dann gelten für die φ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_\nu}{dt'^2} + \varphi_\nu &= \sin\left(2\pi\nu\frac{t'}{\tau'} + \alpha_\nu\right) \\ \frac{d^2\varphi_{\nu\mu}}{dt'^2} + \varphi_{\nu\mu} &= -\frac{a_2}{a_1}\varphi_\nu\varphi_\mu. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Lösung der ersten Gleichung (3) ist aber

$$\varphi_\nu = \frac{1}{1 - 4\pi^2\frac{\nu^2}{\tau'^2}} \sin\left(2\pi\nu\frac{t'}{\tau'} + \alpha_\nu\right), \quad (4)$$

so daß $\varphi_{\nu\mu}$ der Gleichung

$$\frac{d^2\varphi_{\nu\mu}}{dt'^2} + \varphi_{\nu\mu} = -\frac{a_2}{2a_1}\frac{1}{\left(1 - 4\pi^2\frac{\nu^2}{\tau'^2}\right)\left(1 - 4\pi^2\frac{\mu^2}{\tau'^2}\right)} \quad (5)$$

$$\left\{\cos\left[2\pi(\nu-\mu)\frac{t'}{\tau'} + \alpha_\nu - \alpha_\mu\right] - \cos\left[2\pi(\nu+\mu)\frac{t'}{\tau'} + \alpha_\nu + \alpha_\mu\right]\right\}$$

zu genügen hat, die

$$\varphi_{\nu\mu} = -\frac{a_2}{2a_1}\frac{1}{\left(1 - 4\pi^2\frac{\nu^2}{\tau'^2}\right)\left(1 - 4\pi^2\frac{\mu^2}{\tau'^2}\right)}$$

$$\left\{\frac{1}{1 - 4\pi^2\left(\frac{\nu-\mu}{\tau'}\right)^2}\cos\left[2\pi(\nu-\mu)\frac{t'}{\tau'} + \alpha_\nu - \alpha_\mu\right]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{1 - 4\pi^2\left(\frac{\nu+\mu}{\tau'}\right)^2}\cos\left[2\pi(\nu+\mu)\frac{t'}{\tau'} + \alpha_\nu + \alpha_\mu\right]\right\} \quad (6)$$

als Integral ergibt.

Es treten also außer den Schwingungen der erregenden Kraft auch noch die (6) entsprechenden *Differenz-* und *Summationsschwingungen* auf.[1])

Zweites Buch.

Mechanik kontinuierlicher Medien.

A. Elastizität.

Kapitel I.

Kinematik und allgemeine Dynamik deformierbarer Medien.

99. Zerlegung eines beliebigen Vektors. Zunächst möge der für die Kinematik kontinuierlicher Medien wichtige Satz der Vektoranalysis bewiesen werden, daß ein Vektor eindeutig gegeben ist, wenn seine Divergenz und seine Rotation gegeben sind und er im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$ verschwindet.

Sei U im Raume S eine stetige Funktion mit endlichen ersten und zweiten Differentialquotienten, so folgt aus Nr. 63 (8′), wenn dort $V = U$ gesetzt wird,

$$\int \text{grad}^2\, U\, dS = \int U \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma - \int U \Delta U\, dS. \tag{1}$$

Der gegebene Vektor heiße $\mathfrak{A}$. Wir nehmen an, es existiere noch ein anderer Vektor $\mathfrak{A}'$, der denselben Bedingungen wie $\mathfrak{A}$ genügt, dann würde

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}' \tag{2}$$

den Bedingungen genügen

$$\text{div}\, \mathfrak{B} = 0 \tag{3}$$

$$\text{rot}\, \mathfrak{B} = 0, \tag{4}$$

und $\mathfrak{B}$ verschwände im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$. (5)

---

1) Lord Rayleigh, *Die Theorie des Schalles,* deutsche Ausgabe, Braunschweig 1880, **1**, § 68; Helmholtz, *Pogg. Ann. Phys. Chem.* **99**, S. 518 f., 1856.

Wegen (4) dürfen wir

$$\mathfrak{B} = \operatorname{grad} U \tag{6}$$

setzen; dann wird aus (3)

$$\Delta U = 0 \tag{7}$$

und wegen (5) ist im Unendlichen $U = 0$ wie $\frac{1}{r}$.

Also folgt aus (1), wenn wir die Gleichung auf den unendlichen Raum anwenden,

$$\int (\operatorname{grad}^2 U)\, dS = 0, \tag{8}$$

und da der Integrand wesentlich positiv ist, nach (6)

$$\mathfrak{B} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'. \tag{9}$$

Nachdem wir den Eindeutigkeitsbeweis geführt haben, wollen wir $\mathfrak{A}$ wirklich darstellen.

Es sei gegeben

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 4\pi\varrho \tag{10}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = 4\pi\mathfrak{J}; \tag{11}$$

dann folgt aus (11), daß $\mathfrak{J}$ nicht willkürlich ist, sondern der Beschränkung

$$\operatorname{div} \mathfrak{J} = 0 \tag{12}$$

unterliegt.

Wir setzen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2, \tag{13}$$

und es möge

$$\operatorname{div} \mathfrak{A}_1 = 4\pi\varrho \tag{14}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A}_1 = 0 \tag{15}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{A}_2 = 0 \tag{16}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A}_2 = 4\pi\mathfrak{J} \tag{17}$$

sein, d. h. wir zerlegen $\mathfrak{A}$ in einen Potentialvektor $\mathfrak{A}_1$ und einen Solenoidalvektor $\mathfrak{A}_2$.

Wegen (15) können wir

$$\mathfrak{A}_1 = -\operatorname{grad} U \tag{18}$$

setzen, und aus (14) folgt dann

$$\Delta U = -4\pi\varrho. \tag{19}$$

Ein Integral dieser Gleichung ist (vgl. Nr. 63 (13))

$$U = \int \frac{\varrho}{r}\, dS \tag{20}$$

d. h.

$$U = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} \mathfrak{A}_1}{r}\, dS \tag{21}$$

und wegen (18)

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}_p \int \frac{\operatorname{div} \mathfrak{A}_1}{r}\, dS. \tag{22}$$

Der Index p am Gradientzeichen bedeutet, daß die Differentiation nach den Koordinaten des Aufpunktes, die in r vorkommen, ausgeführt werden soll, während in div $\mathfrak{A}_1$ die laufenden Koordinaten des Raumes S vorkommen.

Um $\mathfrak{A}_2$ zu bestimmen, setzen wir

$$\mathfrak{A}_2 = \operatorname{rot} \mathfrak{B}, \tag{23}$$

wodurch (16) befriedigt ist. Wegen (17) ist dann

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{B} = 4\pi \mathfrak{J} \tag{24}$$

oder

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{B} - \Delta \mathfrak{B} = 4\pi \mathfrak{J}. \tag{25}$$

Versuchsweise nehmen wir

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \tag{26}$$

an; dann wird aus (25)

$$\Delta \mathfrak{B} = -4\pi \mathfrak{J}, \tag{27}$$

woraus nach Nr. 63 (13)

$$\mathfrak{B} = \int \frac{\mathfrak{J}}{r}\, dS \tag{28}$$

folgt.

(28) ist eine Lösung von (25) oder (24), wenn noch die Gültigkeit von (26) gezeigt werden kann. Das soll jetzt geschehen.

Nach (28) ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = \int \operatorname{div}_p \left(\frac{\mathfrak{J}}{r}\right) dS = \int \left(\mathfrak{J}, \operatorname{grad}_p \frac{1}{r}\right) dS$$

$$= -\int \left(\mathfrak{J}, \operatorname{grad}_q \frac{1}{r}\right) dS, \tag{29}$$

wenn q den Quellpunkt bedeutet. Denn es ist

$$\operatorname{grad}_p \frac{1}{r} = -\operatorname{grad}_q \frac{1}{r}. \tag{30}$$

Durch partielle Integration wird aus (29)

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = -\int \mathrm{div}_q \left(\frac{\mathfrak{J}}{r}\right) dS + \int \frac{\mathrm{div}_q \mathfrak{J}}{r}\, dS, \tag{31}$$

oder, wenn wir den Gaußschen Satz auf den ersten Term rechts anwenden,

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = -\int \frac{\mathfrak{J}_n}{r}\, d\sigma + \int \frac{\mathrm{div}_q \mathfrak{J}}{r}\, dS. \tag{32}$$

Da aber $\mathfrak{A}$ im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$ verschwinden soll, so verschwindet $\mathfrak{J}$ nach (11) wie $\frac{1}{r^3}$. Andrerseits gilt (12), also ist nach (32) tatsächlich

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0. \tag{33}$$

$\mathfrak{B}$ heißt das *Vektorpotential*, und es ist nach (23)

$$\mathfrak{A}_2 = \mathrm{rot}_p \int \frac{\mathfrak{J}}{r}\, dS \tag{34}$$

d. h.

$$\mathfrak{A} = -\,\mathrm{grad}_p \int \frac{\mathrm{div}_q \mathfrak{A}}{4\pi r}\, dS + \mathrm{rot}_p \int \frac{\mathrm{rot}_q \mathfrak{A}}{4\pi r}\, dS. \tag{35}$$

Da infolge des Eindeutigkeitsbeweises nur *eine* Lösung für $\mathfrak{A}$ möglich ist, stellt (35) *die* Lösung dar.

100. Verschiebungen eines starren Körpers. Wir betrachten die Drehung eines starren Körpers um eine Achse mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$.

Vom Anfangspunkte O des Vektors $\mathfrak{w}$ ziehen wir den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ nach einem beliebigen Punkte p des Körpers (vgl. Fig. 64); dann ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ von p

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{r}], \tag{1}$$

denn die Richtung von $\mathfrak{v}$ ist senkrecht zur Ebene, die durch $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{r}$ bestimmt ist, und der absolute Wert von $\mathfrak{v}$ ist

$$|\mathfrak{v}| = |\mathfrak{w}| \cdot |\mathfrak{r}| \sin(\mathfrak{w}, \mathfrak{r}) = |\mathfrak{w}| \cdot \varrho, \tag{2}$$

Fig. 64.

wo ϱ den Abstand des Punktes p von der Drehachse bedeutet.

Hat der starre Körper außerdem noch eine Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$, so ist

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{w}, \mathfrak{r}]. \tag{3}$$

Um die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ durch die Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auszudrücken, bilden wir die rot von (3)

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \operatorname{rot}[\mathfrak{w}, \mathfrak{r}] = \mathfrak{w}\operatorname{div}\mathfrak{r} - (\mathfrak{w}, \operatorname{grad})\mathfrak{r}. \tag{4}$$

Ist O der Koordinatenursprung, so hat $\mathfrak{r}$ die Komponenten x, y, z; also ist $\operatorname{div}\mathfrak{r} = 3$; $(\mathfrak{w}, \operatorname{grad})\mathfrak{r} = \mathfrak{w}$, folglich

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 2\mathfrak{w}. \tag{5}$$

Die Rotation der Translationsgeschwindigkeit ist gleich der doppelten Drehgeschwindigkeit.

Da $\mathfrak{w}$ für den ganzen Körper konstant ist, so folgt aus (1)

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = \operatorname{div}[\mathfrak{w}, \mathfrak{r}] = (\mathfrak{r}, \operatorname{rot}\mathfrak{w}) - (\mathfrak{w}, \operatorname{rot}\mathfrak{r}) = 0. \tag{6}$$

101. Deformationen. Ist ferner in einem Medium ein vom Ort abhängiger Geschwindigkeitsvektor gegeben, dessen Divergenz nicht verschwindet, während seine Rotation Null ist, so wissen wir aus dem Vorigen, daß die Teilchen des Mediums nicht rotieren.

Nun stellt aber $\int \mathfrak{v}_n\, d\sigma$ das Volumen Materie dar, welches mehr aus dem Raume S mit der Oberfläche σ in der Zeiteinheit herauskommt als hineingeht. Es müssen also Dilatationen stattfinden, und da nach dem Gaußschen Satze

$$\int \operatorname{div}\mathfrak{v}\cdot dS = \int \mathfrak{v}_n\, d\sigma \tag{1}$$

ist, so bedeutet $\operatorname{div}\mathfrak{v}$ die in der Zeiteinheit erfolgte Volumdilatation der Volumeinheit.

Die Zusammensetzung der beiden Verschiebungen, der Rotation und der Dehnung, ist also die allgemeinste Verschiebung, die ein Teil eines kontinuierlichen Mediums erleiden kann, wenn wir von einer gemeinsamen Translation absehen.

Bezeichnet $\delta\mathfrak{f}$ einen Verschiebungsvektor, der Funktion des Orts sein kann, so können wir die Verschiebungen in der Nähe des Koordinatenursprungs nach dem Taylorschen Satze folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
\delta x &= \delta x_0 + \frac{\partial \delta x}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \delta x}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \delta x}{\partial z}\, dz \\
\delta y &= \delta y_0 + \frac{\partial \delta y}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \delta y}{\partial z}\, dz \\
\delta z &= \delta z_0 + \frac{\partial \delta z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\, dz.
\end{aligned} \tag{2}$$

Nun stellt

$$\begin{aligned}
\delta x^{(1)} &= \delta x_0 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right) dz - \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right) dy\right] \\
\delta y^{(1)} &= \delta y_0 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right) dx - \left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right) dz\right] \qquad (3) \\
\delta z^{(1)} &= \delta z_0 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right) dy - \left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right) dx\right]
\end{aligned}$$

nach Nr. 100 (3) und (5) die Verschiebung des als starr gedachten Körpers dar, also wird $\delta\mathfrak{s} - \delta\mathfrak{s}^{(1)} = \delta\mathfrak{s}^{(2)}$ die Deformation des Körpers repräsentieren, und $\delta\mathfrak{s}^{(2)}$ hat die Komponenten

$$\begin{aligned}
\delta x^{(2)} &= \frac{\partial \delta x}{\partial x} dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x}\right) dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right) dz \\
\delta y^{(2)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial \delta y}{\partial y} dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\right) dz \qquad (4) \\
\delta z^{(2)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}\right) dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right) dy + \frac{\partial \delta z}{\partial z} dz.
\end{aligned}$$

Die Deformation ist also durch die 6 Größen

$$\begin{gathered}
x_x = \frac{\partial \delta x}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial \delta y}{\partial y}, \quad z_z = \frac{\partial \delta z}{\partial z} \\
y_z = z_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\right), \quad z_x = x_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}\right), \qquad (5) \\
x_y = y_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)
\end{gathered}$$

gegeben. Anstatt δx, δy, δz werden wir auch gelegentlich $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$ schreiben.

Die Länge des Linienelements vor der Verschiebung ist ds, und zwar ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Nach der Verschiebung ist

$$\begin{aligned}
(ds + \delta\, ds)^2 = & \left\{dx\left(1 + \frac{\partial \delta x}{\partial x}\right) + dy \frac{\partial \delta x}{\partial y} + dz \frac{\partial \delta x}{\partial z}\right\}^2 \\
& + \left\{dx \frac{\partial \delta y}{\partial x} + dy\left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right) + dz \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right\}^2 \qquad (6) \\
& + \left\{dx \frac{\partial \delta z}{\partial x} + dy \frac{\partial \delta z}{\partial y} + dz\left(1 + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right)\right\}^2.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{\delta\, ds}{ds} &= x_x \frac{dx^2}{ds^2} + 2\, x_y \frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}\\ &+ y_y \frac{dy^2}{ds^2} + 2\, y_z \frac{dy}{ds}\cdot\frac{dz}{ds}\\ &+ z_z \frac{dz^2}{ds^2} + 2\, z_x \frac{dz}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}.\end{aligned}\tag{7}$$

Dieser Ausdruck ist schon seiner Bedeutung nach bezüglich einer Koordinatentransformation invariant.

Man konstruiere in einem orthogonalen Koordinatensystem die Fläche zweiter Ordnung

$$x_x x^2 + y_y y^2 + z_z z^2 + 2 y_z y z + \cdots = \pm 1. \tag{8}$$

Sie hat ihr Zentrum im Koordinatenursprung. Das obere oder untere Zeichen möge Gültigkeit haben, je nachdem die Fläche mit dem positiven oder negativen Vorzeichen reell wird.

Diese Fläche heißt das *Dilatationsellipsoid.* Es wird auch dann so genannt, wenn es kein Ellipsoid, sondern etwa ein Hyperboloid ist.

Eine Koordinatentransformation, die durch das Schema

	x'	y'	z'
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

gegeben ist, führt die Fläche (8) in

$$x'_{x'} x'^2 + y'_{y'} y'^2 + z'_{z'} z'^2 + 2 y'_{z'} y' z' + \cdots = \pm 1 \tag{9}$$

über, wo

$$\begin{aligned}
x'_{x'} &= \alpha_1^2 x_x + \beta_1^2 y_y + \gamma_1^2 z_z + 2\beta_1\gamma_1 y_z + 2\gamma_1\alpha_1 z_x + 2\alpha_1\beta_1 x_y\\
y'_{y'} &= \alpha_2^2 x_x + \beta_2^2 y_y + \gamma_2^2 z_z + 2\beta_2\gamma_2 y_z + 2\gamma_2\alpha_2 z_x + 2\alpha_2\beta_2 x_y\\
z'_{z'} &= \alpha_3^2 x_x + \beta_3^2 y_y + \gamma_3^2 z_z + 2\beta_3\gamma_3 y_z + 2\gamma_3\alpha_3 z_x + 2\alpha_3\beta_3 x_y\\
y'_{z'} &= \alpha_2\alpha_3 x_x + \beta_2\beta_3 y_y + \gamma_2\gamma_3 z_z + (\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) y_z\\
&\quad + (\gamma_2\alpha_3 + \gamma_3\alpha_2) z_x + (\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) x_y\\
z'_{x'} &= \alpha_3\alpha_1 x_x + \beta_3\beta_1 y_y + \gamma_3\gamma_1 z_z + (\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) y_z\\
&\quad + (\gamma_3\alpha_1 + \gamma_1\alpha_3) z_x + (\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) x_y\\
x'_{y'} &= \alpha_1\alpha_2 x_x + \beta_1\beta_2 y_y + \gamma_1\gamma_2 z_z + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) y_z\\
&\quad + (\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1) z_x + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) x_y
\end{aligned}\tag{10}$$

ist, wenn

$$x'_{x'} = \frac{\partial \delta x'}{\partial x'}, \ldots, y'_{z'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta y'}{\partial z'} + \frac{\partial \delta z'}{\partial y'}\right) \cdots$$

ist, wie man sich leicht durch eine Koordinatentransformation überzeugen kann.

Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned}
x_x &= \alpha_1^2 x'_{x'} + \alpha_2^2 y'_{y'} + \alpha_3^2 z'_{z'} + 2\alpha_2\alpha_3 y'_{z'} + 2\alpha_3\alpha_1 z'_{x'} + 2\alpha_1\alpha_2 x'_{y'} \\
y_y &= \beta_1^2 x'_{x'} + \beta_2^2 y'_{y'} + \beta_3^2 z'_{z'} + 2\beta_2\beta_3 y'_{z'} + 2\beta_3\beta_1 z'_{x'} + 2\beta_1\beta_2 x'_{y'} \\
z_z &= \gamma_1^2 x'_{x'} + \gamma_2^2 y'_{y'} + \gamma_3^2 z'_{z'} + 2\gamma_2\gamma_3 y'_{z'} + 2\gamma_3\gamma_1 z'_{x'} + 2\gamma_1\gamma_2 x'_{y'} \\
y_z &= \beta_1\gamma_1 x'_{x'} + \beta_2\gamma_2 y'_{y'} + \beta_3\gamma_3 z'_{z'} + (\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) y'_{z'} \\
&\qquad + (\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) z'_{x'} + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) x'_{y'} \qquad (11) \\
z_x &= \gamma_1\alpha_1 x'_{x'} + \gamma_2\alpha_2 y'_{y'} + \gamma_3\alpha_3 z'_{z'} + (\gamma_2\alpha_3 + \gamma_3\alpha_2) y'_{z'} \\
&\qquad + (\gamma_3\alpha_1 + \gamma_1\alpha_3) z'_{x'} + (\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1) x'_{y'} \\
x_y &= \alpha_1\beta_1 x'_{x'} + \alpha_2\beta_2 y'_{y'} + \alpha_3\beta_3 z'_{z'} + (\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) y'_{z'} \\
&\qquad + (\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) z'_{x'} + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) x'_{y'}.
\end{aligned}$$

Die Deformationsgrößen transformieren sich also, wie die Quadrate und Produkte der Koordinaten x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy.

Größen mit dieser Eigenschaft heißen nach Voigt[1]) *Tensoren*.

Durch geeignete Wahl der α, β, γ läßt sich die Fläche zweiter Ordnung (8) auf ihre Hauptachsen transformieren; dann wird

$$x'_{x'} x'^2 + y'_{y'} y'^2 + z'_{z'} z'^2 = 1. \qquad (12)$$

Die Größen $y'_{z'}$ usw. sind also in diesem Koordinatensystem Null, somit lautet Gleichung (4) einfach

$$\begin{aligned}
\delta x'^{(2)} &= \frac{\partial \delta x'}{\partial x'} dx' \\
\delta y'^{(2)} &= \frac{\partial \delta y'}{\partial y'} dy' \\
\delta z'^{(2)} &= \frac{\partial \delta z'}{\partial z'} dz',
\end{aligned}$$

und es bedeutet in diesem neuen System $x'_{x'}$ die Dehnung der Längeneinheit, die parallel der x'-Achse liegt; ebenso sind $y'_{y'}$ und $z'_{z'}$ die Dehnungen von Längeneinheiten, die parallel der y'- resp. z'-Achse liegen.

---

1) W. Voigt, *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Kristalle,* Leipzig 1897.

Somit ist

$$\operatorname{div} \delta \mathfrak{s} = \frac{\partial \delta x'}{\partial x'} + \frac{\partial \delta y'}{\partial y'} + \frac{\partial \delta z'}{\partial z'} \tag{13}$$

die vom Koordinatensystem unabhängige Dilatation der Volumeneinheit.

In der folgenden Tabelle findet man die Koordinaten von drei Eckpunkten des Elementarparallelepipeds mit den Kanten dx, dy, dz, dessen eine Ecke der Koordinatenursprung ist, nach der Verschiebung

Punkt	$dx, 0, 0$	$0, dy, 0$	$0, 0, dz$
x-Koordinate	$\left(1 + \frac{\partial \delta x}{\partial x}\right) dx$	$\frac{\partial \delta x}{\partial y} dy$	$\frac{\partial \delta x}{\partial z} dz$
y-Koordinate	$\frac{\partial \delta y}{\partial x} dx$	$\left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right) dy$	$\frac{\partial \delta y}{\partial z} dz$
z-Koordinate	$\frac{\partial \delta z}{\partial x} dx$	$\frac{\partial \delta z}{\partial y} dy$	$\left(1 + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right) dz$

Daraus folgt z. B. für den Richtungskosinus zweier Kanten des Parallelepipeds nach der Verschiebung

$$\cos(ds_y, ds_z) = \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \quad \text{usw.} \tag{14}$$

Damit ist die geometrische Bedeutung der 6 Deformationsgrößen gegeben.

Die $\frac{\partial \delta x}{\partial x}, \frac{\partial \delta y}{\partial y}, \frac{\partial \delta z}{\partial z}$ heißen Dehnungen, die $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\right)$ usw. Gleitungen oder Achsenwinkeländerungen.[1])

102. Spannungen. Das Druckellipsoid. Es kommt häufig der Fall vor, daß die Kräfte sich als Wechselwirkungen zwischen unmittelbar benachbarten Teilchen eines kontinuierlichen Mediums darstellen lassen, d. h. daß die auf das Volumelement dS wirkende Kraft $\mathfrak{f} dS$ ersetzbar ist durch Flächenkräfte oder Spannungen, das sind Kräfte, die auf die Oberfläche $d\sigma$ von dS wirken.

Berühren sich zwei Volumelemente in der Fläche $d\sigma$, so mögen sie Kräfte aufeinander ausüben, die dem Reaktionsprinzip genügen und $d\sigma$ proportional sind.

Nennen wir die eine Normalenrichtung von $d\sigma$ willkürlich $+n$, so möge das auf der Seite der positiven Normalen liegende Volum-

1) Saint-Venant, *Liouvilles Journal*, 1863, S. 260, 262.

element auf das zur Seite der negativen Normalen liegende die Kraft $\Pi_n d\sigma$ ausüben.

Durch diese Spannung Π soll die Volumkraft $\mathfrak{f} dS$ ersetzbar sein, auch wenn das Volumelement als starrer Körper frei beweglich wäre, d. h. es müssen die Translationskräfte und die Drehmomente der Spannungen mit denen der Volumkräfte identisch sein.

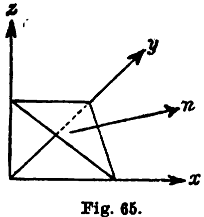


Fig. 65.

Grenzen wir zunächst als Volumelement dS ein unendlich kleines rechtwinkliges Tetraeder (Fig. 65) in dem Medium ab, dessen Kathetenflächen den Koordinatenebenen resp. parallel sind, und dessen Hypotenusenfläche $d\sigma$ die äußere Normale n hat, so muß

$$\mathfrak{f}_x dS = \Pi_{nx} d\sigma - \Pi_{xx} d\sigma_x - \Pi_{yx} d\sigma_y - \Pi_{zx} d\sigma_z \quad (1)$$

sein. Hier bedeutet der erste Index an Π die Richtung der positiven Normalen der Fläche, auf die Π wirkt, der zweite Index die Komponente der Kraft.

Da aber

$$d\sigma_x = d\sigma \cos(n, x) \text{ usw.} \quad (2)$$

ist, so folgt

$$\mathfrak{f}_x dS = [\Pi_{nx} - \Pi_{xx}\cos(n,x) - \Pi_{yx}\cos(n,y) - \Pi_{zx}\cos(n,z)]\, d\sigma. \quad (3)$$

Nennt man die auf der Hypotenusenfläche senkrechte Höhe der Pyramide h, so ist $dS = \frac{h}{3} d\sigma$. Substituiert man diesen Wert in (3), so hebt sich $d\sigma$, und wenn h kleiner und kleiner wird, so nähert sich die linke Seite der Null, also muß

$$\Pi_{nx} = \Pi_{xx}\cos(nx) + \Pi_{yx}\cos(ny) + \Pi_{zx}\cos(nz)$$

und ebenso

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{ny} &= \Pi_{xy}\cos(nx) + \Pi_{yy}\cos(ny) + \Pi_{zy}\cos(nz) \\ \Pi_{nz} &= \Pi_{xz}\cos(nx) + \Pi_{yz}\cos(ny) + \Pi_{zz}\cos(nz) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

sein.

Die Oberflächenkräfte auf eine beliebige Fläche sind also bekannt, wenn man sie für die den Koordinatenebenen parallelen Flächen kennt.

Zweitens wählen wir als Volumelement dS ein unendlich kleines Parallelepiped, dessen Kanten parallel den Koordinatenachsen liegen. Die x-Komponenten sämtlicher Oberflächenspannungen sind

$$\left.\begin{aligned} &-(\Pi_{xx})_x dy\, dz + (\Pi_{xx})_{x+dx} dy\, dz \\ &-(\Pi_{yx})_y dz\, dx + (\Pi_{yx})_{y+dy} dz\, dx \\ &-(\Pi_{zx})_z dx\, dy + (\Pi_{zx})_{z+dz} dx\, dy \end{aligned}\right\} = \left(\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zx}}{\partial z}\right) dS.$$

Da diese Größe gleich $\mathfrak{f}_x dS$ sein muß, so ergibt sich die erste der folgenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{f}_x &= \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zx}}{\partial z} \\
\mathfrak{f}_y &= \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zy}}{\partial z} \\
\mathfrak{f}_z &= \frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zz}}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Daß die 9 Größen Π, die in (5) vorkommen, nicht alle voneinander unabhängig sind, erkennt man, wenn man die Drehmomente bezüglich der Koordinatenachsen bildet.

Es ist

$$\mathfrak{N}_x dS = (y\mathfrak{f}_z - z\mathfrak{f}_y)\, dS = \sum (y\Pi_{nz} - z\Pi_{ny})\, d\sigma. \tag{6}$$

Die Summe der rechten Seite, über die 6 Flächen des soeben betrachteten Parallelepipeds erstreckt, ergibt

$$
\left.\begin{aligned}
&\{-(y\Pi_{xz} - z\Pi_{xy})_x + (y\Pi_{xz} - z\Pi_{xy})_{x+dx}\}\, dy\, dz \\
&\{-(y\Pi_{yz} - z\Pi_{yy})_y + (y\Pi_{yz} - z\Pi_{yy})_{y+dy}\}\, dz\, dx \\
&\{-(y\Pi_{zz} - z\Pi_{zy})_z + (y\Pi_{zz} - z\Pi_{zy})_{z+dz}\}\, dx\, dy
\end{aligned}\right\}
=
\begin{aligned}
&y\left(\frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zz}}{\partial z}\right) dS \\
&-z\left(\frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zy}}{\partial z}\right) dS \\
&+(\Pi_{yz} - \Pi_{zy})\, dS.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Setzen wir andrerseits die Werte für $\mathfrak{f}_y$ und $\mathfrak{f}_z$ aus (5) in (6) ein, so ergibt der Vergleich mit der soeben gewonnenen Gleichung

$$\Pi_{yz} = \Pi_{zy},$$

und ebenso folgt

$$
\begin{aligned}
\Pi_{zx} &= \Pi_{xz} \\
\Pi_{xy} &= \Pi_{yx}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Der Druck auf eine beliebige Fläche ist also durch die drei Normalspannungen Π_{xx}, Π_{yy}, Π_{zz} und die drei Tangentialspannungen Π_{yz}, Π_{zx}, Π_{xy} gegeben. Die Π haben die Eigenschaft eines Tensors, transformieren sich also wie ein solcher (vgl. Nr. 101).

Der Druck auf eine beliebige Fläche ist nach (4) eine lineare Vektorfunktion

$$\Pi_n = (\Pi)\mathfrak{n}_1, \tag{9}$$

wo $\mathfrak{n}_1$ den Einheitsvektor in Richtung von n bedeutet.

Die Oberfläche

$$\Pi_{xx}x^2 + \Pi_{yy}y^2 + \Pi_{zz}z^2 + 2\,\Pi_{yz}yz + 2\,\Pi_{zx}zx + 2\,\Pi_{xy}xy = \pm 1 \quad (10)$$

ist eine Fläche zweiter Ordnung. Wir wählen wieder wie auch beim Dilatationsellipsoid rechts das Vorzeichen so, daß die Fläche reell wird. Sie heißt das *Druckellipsoid*, auch wenn die Fläche kein Ellipsoid ist.

Durch Drehung des Koordinatensystems kann man dasselbe auf die Hauptachsen beziehen

$$\Pi_{x'x'}x'^2 + \Pi_{y'y'}y'^2 + \Pi_{z'z'}z'^2 = \pm 1\,. \quad (11)$$

$\Pi_{x'x'}$, $\Pi_{y'y'}$, $\Pi_{z'z'}$ heißen die Hauptdrucke. Auf Flächen, die senkrecht zu den Hauptachsen des Druckellipsoids stehen, wirken nur normale, keine tangentiale Spannungen.[1])

Legen wir in einem beliebigen Punkte P des Druckellipsoids (10) die Tangentialebene an dasselbe, deren laufende Koordinaten ξ, η, ζ heißen mögen, so lautet ihre Gleichung

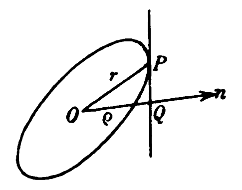


Fig. 66.

$$(\Pi_{xx}x + \Pi_{xy}y + \Pi_{xz}z)\xi + (\Pi_{yx}x + \Pi_{yy}y + \Pi_{yz}z)\eta + (\Pi_{zx}x + \Pi_{zy}y + \Pi_{zz}z)\zeta = 1. \quad (12)$$

Die Normale n vom Koordinatenursprung auf die Tangentialebene hat also Richtungskosinus, die sich wie

$$(\Pi_{xx}x+\Pi_{xy}y+\Pi_{xz}z):(\Pi_{yx}x+\Pi_{yy}y+\Pi_{yz}z):(\Pi_{zx}x+\Pi_{zy}y+\Pi_{zz}z)$$

oder, wenn wir durch $\overline{OP} = r$ (vgl. Fig. 66) dividieren, wie

$$\Pi_{rx} : \Pi_{ry} : \Pi_{rz}$$

verhalten (vgl. (4)). Π_r hat also die durch n gegebene Richtung.

Die Länge $\overline{OQ}$ des Lots ist ϱ, wo

$$\varrho^2 = \frac{1}{(\Pi_{xx}x+\Pi_{xy}y+\Pi_{xz}z)^2+(\Pi_{yx}x+\Pi_{yy}y+\Pi_{yz}z)^2+(\Pi_{zx}x+\Pi_{zy}y+\Pi_{zz}z)^2},$$

1) Als zweites Druckellipsoid wird auch die Fläche

$$\frac{x'^2}{\Pi^2_{x'x'}} + \frac{y'^2}{\Pi^2_{y'y'}} + \frac{z'^2}{\Pi^2_{z'z'}} = 1$$

neben Gleichung (11) eingeführt.

d. h.

$$|\Pi_r| = \frac{1}{\varrho r}, \tag{13}$$

also ist auch die Größe von Π_r bestimmt, und es läßt sich somit mit Hülfe des Druckellipsoids zu jedem Flächenelement der Druck nach Größe und Richtung geometrisch konstruieren.

103. Die Arbeit der Druckkräfte. Das elastische Potential. Wirken die Spannungen Π im Innern eines Körpers, so ist die von denselben bei einer virtuellen Verschiebung geleistete Arbeit (vgl. Nr. **102** (5))

$$\delta' A = \int \left\{ \left(\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zx}}{\partial z} \right) \delta x + \cdots \right\} dS. \tag{1}$$

Durch partielle Integration und Berücksichtigung von Nr. **102** (4) folgt

$$\delta' A = -\int \left\{ \Pi_{xx} \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \Pi_{yy} \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \Pi_{zz} \frac{\partial \delta z}{\partial z} + \Pi_{yz} \left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) + \cdots \right\} dS$$
$$+ \int (\Pi_{nx} \delta x + \Pi_{ny} \delta y + \Pi_{nz} \delta z) \delta \sigma. \tag{2}$$

Betrachten wir den unendlichen Raum, an dessen Grenzen die Spannungen bereits Null geworden sein mögen, so geht (2) in

$$\delta' A = -\int \left\{ \Pi_{xx} \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \Pi_{yy} \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \Pi_{zz} \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right.$$
$$\left. + \Pi_{yz} \left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) + \cdots \right\} dS \tag{2'}$$

über.

Vollkommen elastische Körper heißen solche, bei denen sich die Arbeit als Abnahme seines *elastischen Potentials* Ω berechnet. Bei ihnen geht kein Teil der Energie in andere Energiearten, wie Wärme über, es ist also das elastische Potential eine eindeutige Funktion der Deformationsgrößen.

Setzen wir das Potential im undeformierten Zustande, der ein stabiler Gleichgewichtszustand ist, gleich Null, so muß Ω in erster Annäherung eine wesentlich positive quadratische Form der Deformationsgrößen sein.

Nennen wir das auf die Volumeinheit bezogene Potential ω, so können wir demnach setzen

$$
\begin{aligned}
2\omega = a_{11}x_x^2 + a_{22}y_y^2 + a_{33}z_z^2 + a_{44}y_z^2 + a_{55}z_x^2 + a_{66}x_y^2 \\
+ 2x_x(a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z + a_{15}z_x + a_{16}x_y) \\
+ 2y_y(a_{23}z_z + a_{24}y_z + a_{25}z_x + a_{26}x_y) \\
+ 2z_z(a_{34}y_z + a_{35}z_x + a_{36}x_y) \\
+ 2y_z(a_{45}z_x + a_{46}x_y) \\
+ 2z_x a_{56}x_y,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

d. h. die elastische Energie[1]) hängt im allgemeinsten Falle, im sogenannten triklinen System, von 21 Konstanten a ab, und es ist

$$\delta' A = -\delta\int \omega\, dS = -\delta\Omega. \tag{4}$$

Aus dieser Gleichung, zusammen mit (2′), ergeben sich die Drucke, und zwar als lineare Funktionen der Deformationsgrößen

$$
\begin{aligned}
\Pi_{xx} &= \frac{\partial\omega}{\partial x_x} = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z + a_{15}z_x + a_{16}x_y \\
2\,\Pi_{yz} &= \frac{\partial\omega}{\partial y_z} \quad \text{usw.}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Hat der im allgemeinen krystallinische Körper Symmetrieeigenschaften, so vermindert sich die Zahl der 21 Konstanten a.

1. Ist nur die xy-Ebene Symmetrieebene (monokline Krystalle), so darf sich nichts ändern bei Vertauschung von z mit $-z$, also muß

$$a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{46} = a_{56} = 0 \tag{6}$$

sein; es bleiben also 13 Konstanten übrig, und es wird

$$
\begin{aligned}
2\omega = a_{11}x_x^2 + a_{22}y_y^2 + a_{33}z_z^2 + a_{44}y_z^2 + a_{55}z_x^2 + a_{66}x_y^2 \\
+ 2x_x(a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{16}x_y) + 2y_y(a_{23}z_z + a_{26}x_y) \\
+ 2a_{36}z_z x_y + 2a_{45}y_z z_x.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

2. Ist außerdem noch die yz-Ebene Symmetrieebene (rhombische Krystalle), so darf sich nichts ändern bei Vertauschung von x mit $-x$, also ist

$$a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0, \tag{8}$$

1) Das elastische Potential wurde eingeführt von Green, *Cambr. Phil. Trans.* 7, 1842, S. 121; W. Thomson, *Quart. journ. math.* 1, 1857, p. 57; G. Kirchhoff, *Crelles Journ. f. Math.* 56, 1859, S. 290.

es bleiben also 9 Konstanten übrig, und es wird

$$2\omega = a_{11}x_x^2 + a_{22}y_y^2 + a_{33}z_z^2 + a_{44}y_z^2 + a_{55}z_x^2 + a_{66}x_y^2 \\ + 2x_x(a_{12}y_y + a_{13}z_z) + 2a_{23}y_yz_z. \tag{9}$$

Es ergibt sich aus ω, daß dann auch die zx-Ebene in elastischer Beziehung Symmetrieebene ist.

3. Die beiden Symmetrieebenen yz und zx sollen gleichwertig sein (tetragonale Krystalle), d. h. die Vertauschung von x und y darf nichts ausmachen, also muß

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{44} = a_{55}, \quad a_{13} = a_{23} \tag{10}$$

sein, es bleiben somit 6 Konstanten übrig, und es wird

$$2\omega = a_{11}(x_x^2 + y_y^2) + a_{33}z_z^2 + a_{44}(y_z^2 + z_x^2) + a_{66}x_y^2 \\ + 2x_x(a_{12}y_y + a_{13}z_z) + 2a_{13}y_yz_z. \tag{11}$$

Bei den Krystallen dieser Klasse ist also die z-Achse eine vierzählige Symmetrieachse (eine Drehung um $2\pi/4 = 90^0$ um dieselbe verändert ω nicht) und die x-Achse eine zweizählige Symmetrieachse (eine Drehung um $2\pi/2 = 180^0$ um dieselbe ändert ω nicht).

Es gibt aber auch tetragonale Krystalle, bei denen zwar die z-Achse eine vierzählige, die x-Achse aber keine zweizählige Symmetrieachse ist. Für diese gilt

$$2\omega = a_{11}(x_x^2 + y_y^2) + a_{33}z_z^2 + a_{44}(y_z^2 + z_x^2) + a_{66}x_y^2 \\ + 2x_xa_{12}y_y + 2z_za_{13}(x_x + y_y) + 2x_ya_{16}(x_x - y_y). \tag{11'}$$

Hier sind also noch 7 Konstanten vorhanden.

4. Alle Symmetrieebenen sind vertauschbar (reguläre Krystalle). Die Vertauschung von x mit z in (11) muß also möglich sein; das ergibt

$$a_{11} = a_{33}, \quad a_{44} = a_{66}, \quad a_{12} = a_{13}. \tag{12}$$

Es bleiben also 3 Konstanten übrig, und es wird

$$\begin{aligned} 2\omega &= a_{11}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + a_{44}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2) \\ &\qquad + 2a_{12}(x_xy_y + x_xz_z + y_yz_z) \\ &= a_{11}(x_x + y_y + z_z)^2 + 2(a_{12} - a_{11} + \tfrac{1}{2}a_{44})(x_xy_y + x_xz_z + y_yz_z) \\ &\qquad + a_{44}[y_z^2 + z_x^2 + x_y^2 - (x_xy_y + x_xz_z + y_yz_z)]. \end{aligned} \tag{13}$$

5. Alle Richtungen sind gleichwertig (isotrope Körper). In (13) bleibt bei einer Koordinatentransformation von selbst sowohl

$x_x + y_y + z_z$ als auch $y_z^2 + z_x^2 + x_y^2 - (x_x y_y + x_x z_z + y_y z_z)$ invariant, also muß noch

$$\tfrac{1}{2} a_{44} + a_{12} - a_{11} = 0 \tag{14}$$

sein, so daß wir schließlich zwei voneinander unabhängige Konstanten übrig behalten.

Es wird so

$$2\omega = a_{11}(x_x + y_y + z_z)^2 + 2(a_{11} - a_{12})\left[y_z^2 + z_x^2 + x_y^2 - (x_x y_y + x_x z_z + y_y z_z)\right] \tag{15}$$

und somit

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} &= (a_{11} - a_{12})\, x_x + a_{12}\Theta, & \Pi_{yz} &= (a_{11} - a_{12})\, y_z \\ \Pi_{yy} &= (a_{11} - a_{12})\, y_y + a_{12}\Theta, & \Pi_{zx} &= (a_{11} - a_{12})\, z_x \\ \Pi_{zz} &= (a_{11} - a_{12})\, z_z + a_{12}\Theta, & \Pi_{xy} &= (a_{11} - a_{12})\, x_y, \end{aligned} \tag{16}$$

wo

$$\Theta = x_x + y_y + z_z \tag{17}$$

ist.

Für Flüssigkeiten ist auch noch $a_{11} = a_{12}$, so daß für diese

$$\Pi = a\,\Theta \tag{16'}$$

gilt, wenn wir den allseitig gleichen Druck $\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = \Pi_{zz} = \Pi$ und den *Kompressionsmodul* $a_{12} = a$ setzen. $1/a$ heißt die *Kompressibilität.*

Löst man (16) nach den Deformationsgrößen auf, so erhält man

$$\begin{aligned} x_x &= \frac{1}{E}\{\Pi_{xx} - \mu(\Pi_{yy} + \Pi_{zz})\}, & y_z &= \frac{\mu+1}{E}\Pi_{yz} \\ y &= \frac{1}{E}\{\Pi_{yy} - \mu(\Pi_{zz} + \Pi_{xx})\}, & z_x &= \frac{\mu+1}{E}\Pi_{zx} \\ z_z &= \frac{1}{E}\{\Pi_{zz} - \mu(\Pi_{xx} + \Pi_{yy})\}, & x_y &= \frac{\mu+1}{E}\Pi_{xy}, \end{aligned} \tag{18}$$

wenn

$$E = \frac{(a_{11} - a_{12})(a_{11} + 2a_{12})}{a_{11} + a_{12}}, \quad \mu = \frac{a_{12}}{a_{11} + a_{12}} \tag{19}$$

gesetzt ist.

Daraus ergibt sich umgekehrt

$$a_{11} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad a_{12} = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}. \tag{20}$$

E heißt der Elastizitätsmodul oder Elastizitätskoeffizient, μ das

Verhältnis der Querkontration zur Längendilatation, denn wenn z. B. nur Π_{xx} existiert, ist

$$x_x = \frac{1}{E}\,\Pi_{xx}, \quad y_y = z_z = -\frac{\mu}{E}\,\Pi_{xx} = -\mu x_x. \tag{21}$$

Die elastische Energiedichte eines isotropen Körpers lautet nach (15) und (20) in E und μ

$$2\omega = \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{1-\mu}{1-2\mu}\,\Theta^2 + 2\left[y_z^2 + z_x^2 + x_y^2 - (x_x y_y + x_x z_z + y_y z_z)\right]\right\}. \tag{22}$$

Damit ω eine wesentlich positive Form ist, muß $\mu < \frac{1}{2}$ sein. Die von Poisson gemachten molekulartheoretischen Voraussetzungen, die darauf schließen ließen, daß $\mu = \frac{1}{4}$ ist, haben sich an der Erfahrung nicht bestätigt; man muß E und μ als empirisch gegebene Konstanten auffassen.

6. Das hexagonale System ist dadurch charakterisiert, daß die xy-Ebene Symmetrieebene ist, und daß die z-Achse eine sechszählige Symmetrieachse ist, d. h. eine Drehung des Koordinatensystems um 60^0 um die z-Achse darf die Form von ω nicht verändern.

Führen wir also in dem Ausdruck (7) für ω, in welchem die Symmetrieeigenschaft der xy-Ebene bereits berücksichtigt ist, die Koordinatentransformation aus, die einer Drehung um 60^0 um die z-Achse entspricht, so muß dabei ω invariant bleiben.

Dieser Koordinatentransformation entsprechen aber folgende Werte für die Richtungskosinus der gedrehten Koordinatenachsen gegen das neue System (vgl. das Transformationsschema in Nr. 101)

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = \frac{1}{2}, & \alpha_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, & \alpha_3 = 0 \\ \beta_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, & \beta_2 = \frac{1}{2}, & \beta_3 = 0 \\ \gamma_1 = 0, & \gamma_2 = 0, & \gamma_3 = 1. \end{array}$$

Setzt man diese Werte in Nr. 101 (11), und diese Formeln dann in (7) ein, so sind die Bedingungen der Invarianz von ω

$$\begin{gathered} a_{22} = a_{11}, \quad a_{12} = a_{11} - \frac{a_{66}}{2}, \quad a_{55} = a_{44}, \quad a_{23} = a_{13}, \\ a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0, \end{gathered} \tag{23}$$

so daß in ω noch 5 Konstanten übrig bleiben und wir

$$2\omega = a_{11}(x_x^2 + y_y^2) + a_{33}z_z^2 + a_{44}(y_z^2 + z_x^2) + a_{66}x_y^2 + (2a_{11} - a_{66})x_x y_y + 2a_{13}(x_x + y_y)z_z \tag{24}$$

erhalten.

7. Das rhomboedrische System schließlich ist dadurch gekennzeichnet, daß die xz-Ebene Symmetrieebene ist, und daß die z-Achse eine dreizählige Symmetrieachse ist, d. h. weder eine Vertauschung von y mit $-y$, noch eine Drehung des Koordinatensystems um 120^0 um die z-Achse darf die Form von ω verändern.

Daraus ergibt sich in analoger Weise wie bisher folgende Form für ω

$$\begin{aligned} 2\omega = a_{11}(x_x^2 + y_y^2) + a_{33}z_z^2 + a_{44}(y_z^2 + z_x^2) + a_{66}x_y^2 \\ + (2a_{11} - a_{66})x_y y_y + 2a_{13}z_z(x_x + y_y) \\ + 2a_{15}z_x(x_x - y_y) - 4a_{15}y_z x_y. \end{aligned} \tag{25}$$

104. Die Differentialgleichungen der Bewegung. Die Bewegungsgleichungen erhält man aus dem d'Alembertschen Prinzip

$$\int\{(\mathfrak{F}_x - \varrho\ddot{x})\delta x + \cdots\}\,dS - \int\delta\omega\,dS + \int(\overline{\Pi}_x\overline{\delta x} + \cdots)d\sigma = 0. \tag{1}$$

Hier bedeutet ϱ die Dichte, $\mathfrak{F}$ die äußere Volumkraft, $\overline{\Pi}$ den äußeren, auf die Oberfläche σ wirkenden Zug, ω die elastische Energie der Volumeinheit, δx die x-Komponente der virtuellen Verschiebung eines beliebigen Körperelements, $\overline{\delta x}$ die eines Oberflächenelements.

Benutzt man die in Nr. 103 (5) gegebenen Beziehungen zwischen ω und den Spannungen und integriert partiell, so folgt für jedes Volumelement

$$\begin{aligned} \varrho\ddot{x} = \mathfrak{F}_x + \frac{\partial\Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\Pi_{zx}}{\partial z} \\ \varrho\ddot{y} = \mathfrak{F}_y + \frac{\partial\Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\Pi_{zy}}{\partial z} \\ \varrho\ddot{z} = \mathfrak{F}_z + \frac{\partial\Pi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\Pi_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \tag{2}$$

und für die Oberfläche

$$\Pi_{nx} = \overline{\Pi}_x,\quad \Pi_{ny} = \overline{\Pi}_y,\quad \Pi_{nz} = \overline{\Pi}_z. \tag{3}$$

Daß es nur *ein* Lösungssystem bei gegebenen äußeren Kräften und Oberflächendrucken gibt, folgt, wenn wir anstatt der virtuellen Verschiebungen in (1) die wirklichen in der Zeit dt stattfindenden $\frac{dx}{dt}\,dt, \ldots$ setzen. (Dies ist erlaubt, wenn die Bedingungsgleichungen die Zeit nicht enthalten; vgl. Nr. 15.) Dann wird nämlich

$$\frac{d'A}{dt} = \frac{d}{dt}(T + \Omega), \tag{4}$$

wenn A die Arbeit der äußeren Kräfte, Ω die potentielle (elastische) Energie, T die kinetische Energie bedeutet. Hier ist $T + \Omega$ eine wesentlich positive Größe.

Angenommen, es gäbe zwei Systeme von Deformationsgrößen, die denselben Anfangsbedingungen und äußeren Kräften genügen, so müßte die Differenz dieser beiden Systeme von Deformationen der Gleichung (1) genügen, wenn in ihnen die äußeren Kräfte Null gesetzt würden, d. h. nach (4) müßte die Funktion $T + \Omega$ von der Zeit unabhängig sein, wenn in ihr die Differenzen der einzelnen Deformationen eingesetzt würden, und da $T + \Omega$ anfänglich Null wäre, müßte es dauernd Null bleiben. Das ist aber nur möglich, wenn die Differenzen der entsprechenden Deformationsgrößen Null sind, d. h. es gibt nicht zwei voneinander verschiedene Systeme von Deformationen.[1])

Der Eindeutigkeitsbeweis setzt uns in den Stand, eine Lösung als einzig existierende zu erkennen, wenn sie den Gleichungen (2) und (3) und gewissen Anfangsbedingungen genügt.

Da im besonderen die Gleichungen Nr. **103** (5) und somit die Gleichungen Nr. **104** (2) und (3) linear sind, so gibt die Superposition zweier Lösungssysteme mit verschiedenen äußeren Kräften und Oberflächendrucken eine Lösung für den Fall, daß die Summe der in den beiden Einzelfällen vorhandenen äußeren Kräfte und Drucke wirkt.

Nennt man die Komponenten der Verschiebung eines Teilchens aus der Gleichgewichtslage $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$, so wird mit Benutzung von (2) und Nr. **103** (16)

$$\varrho \ddot{\mathfrak{u}}_x = \mathfrak{F}_x + \frac{a_{11} - a_{12}}{2} \Delta \mathfrak{u}_x + \frac{a_{11} + a_{12}}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \quad \text{usw.} \tag{5}$$

oder mit Einführung von E und μ (Nr. **103** (20))

$$\varrho \ddot{\mathfrak{u}}_x = \mathfrak{F}_x + \frac{E}{2(1+\mu)} \Delta \mathfrak{u}_x + \frac{E}{(1+\mu)\, 2(1-2\mu)} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \quad \text{usw.} \tag{6}$$

In Vektorschreibweise lauten diese Gleichungen

$$\varrho \ddot{\mathfrak{u}} = \mathfrak{F} + \frac{a_{11} - a_{12}}{2} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u}) + \frac{a_{11} + a_{12}}{2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} \tag{7}$$

oder

$$\varrho \ddot{\mathfrak{u}} = \mathfrak{F} + a_{11} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} - \frac{a_{11} - a_{12}}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u}\,. \tag{8}$$

---

1) G. Kirchhoff, *Crelles Journ. f. Math.* **56**, 1859, S. 291

Bilden wir von dieser Gleichung die Divergenz, so bekommen wir

$$\varrho \ddot{\Theta} = \operatorname{div} \mathfrak{F} + a_{11} \Delta \Theta; \tag{9}$$

bilden wir ferner von (8) die Rotation und setzen (vgl. Nr. 100 (5))

$$\operatorname{rot} \mathfrak{u} = 2 \mathfrak{w}, \tag{10}$$

so wird

$$2 \varrho \ddot{\mathfrak{w}} = \operatorname{rot} \mathfrak{F} + (a_{11} - a_{12}) \Delta \mathfrak{w}. \tag{11}$$

Leitet sich $\mathfrak{F}$ aus einem Potential ab, so ist

$$\operatorname{rot} \mathfrak{F} = 0,$$

also

$$\ddot{\mathfrak{w}} = \frac{a_{11} - a_{12}}{2 \varrho} \Delta \mathfrak{w}. \tag{12}$$

105. Die Gleichungen der Elastizitätstheorie in krummlinigen Koordinaten. Bei vielen Formen der betrachteten Körper vereinfachen sich die Bedingungen an den Oberflächen wesentlich durch Einführung krummliniger Koordinaten.

Am einfachsten gestaltet sich diese[1]), wenn wir den invarianten Ausdruck Nr. 101 (7) für die Dehnung des Linienelements benutzen

$$\begin{aligned} \frac{\delta ds}{ds} = & u_u \cos^2(ds, u) + v_v \cos^2(ds, v) + w_w \cos^2(ds, w) \\ & + 2 v_w \cos(ds, v) \cos(ds, w) + 2 w_u \cos(ds, w) \cos(ds, u) \\ & + 2 u_v \cos(ds, u) \cos(ds, v), \end{aligned} \tag{1}$$

wenn u_u, v_v, w_w die Dehnungen, v_w, w_u, u_v die Gleitungen in Richtung der allgemeinen Koordinaten u, v, w bedeuten.

Setzt man den Verschiebungsvektor

$$\delta \mathfrak{s}_u = e_1 \delta u, \quad \delta \mathfrak{s}_v = e_2 \delta v, \quad \delta \mathfrak{s}_w = e_3 \delta w, \tag{2}$$

wo die e sich aus

$$ds^2 = e_1^2 du^2 + e_2^2 dv^2 + e_3^2 dw^2 \tag{3}$$

ergeben, so folgt für die Längenänderung von ds

$$\begin{aligned} 2 \delta ds \cdot ds &= \delta(e_1^2 du^2 + e_2^2 dv^2 + e_3^2 dw^2) \qquad (4) \\ &= 2(e_1 du^2 \delta e_1 + e_2 dv^2 \delta e_2 + e_3 dw^2 \delta e_3) + 2(e_1^2 du\, d\delta u + \cdots). \end{aligned}$$

1) C. W. Borchardt, *Journ. f. Math.* **76**, 1873, S. 45; E. Beltrami, *Ann. di mat.* (2) **10**, 1881, p. 188.

Hier ist

$$\delta e_1 = \frac{\partial e_1}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial e_1}{\partial v}\,\delta v + \frac{\partial e_1}{\partial w}\,\delta w \quad \text{usw.} \tag{5}$$

und

$$d\delta u = \frac{\partial \delta u}{\partial u}\,du + \frac{\partial \delta u}{\partial v}\,dv + \frac{\partial \delta u}{\partial w}\,dw. \tag{6}$$

Somit ergibt sich durch Vergleich von (4) mit (1)

$$\begin{aligned}
u_u &= \frac{1}{e_1}\left(\frac{\partial e_1}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial e_1}{\partial v}\,\delta v + \frac{\partial e_1}{\partial w}\,\delta w\right) + \frac{\partial \delta u}{\partial u}\\
v_v &= \frac{1}{e_2}\left(\frac{\partial e_2}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial e_2}{\partial v}\,\delta v + \frac{\partial e_2}{\partial w}\,\delta w\right) + \frac{\partial \delta v}{\partial v}\\
w_w &= \frac{1}{e_3}\left(\frac{\partial e_3}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial e_3}{\partial v}\,\delta v + \frac{\partial e_3}{\partial w}\,\delta w\right) + \frac{\partial \delta w}{\partial w}\\
2v_w &= \frac{e_2}{e_3}\,\frac{\partial \delta v}{\partial w} + \frac{e_3}{e_2}\,\frac{\partial \delta w}{\partial v}\\
2w_u &= \frac{e_3}{e_1}\,\frac{\partial \delta w}{\partial u} + \frac{e_1}{e_3}\,\frac{\partial \delta u}{\partial w}\\
2u_v &= \frac{e_1}{e_2}\,\frac{\partial \delta u}{\partial v} + \frac{e_2}{e_1}\,\frac{\partial \delta v}{\partial u}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Aus der elastischen Energiedichte für isotrope Medien (Nr. 103 (22))

$$\begin{aligned}
2\mathfrak{w} = \frac{E}{1+\mu}\Big\{\frac{1-\mu}{1-2\mu}\,\Theta^2 + 2\big[v_w^2 + w_u^{\,2} + u_v^{\,2}\\
- (u_u v_v + u_u w_w + v_v w_w)\big]\Big\},
\end{aligned} \tag{8}$$

wo

$$\Theta = u_u + v_v + w_w \tag{9}$$

ist, folgt

$$\Pi_{uu} = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial u_u}, \ldots, \Pi_{vw} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial v_w}. \tag{10}$$

Als Bewegungsgleichung ist Nr. 104 (8) zu verwenden, indem für $\mathfrak{u}$ die Komponenten $e_1\delta u$, $e_2\delta v$, $e_3\delta w$ zu setzen sind.

Hierbei lautet die *verallgemeinerte* innere Kraft der Spannungen auf die Volumeinheit, die durch die Gleichung der virtuellen Arbeit $\delta' A = \mathfrak{f}_u\delta u + \mathfrak{f}_v\delta v + \mathfrak{f}_w\delta w$ definiert ist,[1])

1) Vgl. z. B. R. Gans, *Einführung in die Vektoranalysis*, 3. Aufl., Leipzig und Berlin 1913, S. 92. Es ist jedoch zu beachten, daß dort unter $\mathfrak{f}_u$ die Kraft im gewöhnlichen Sinne und nicht die verallgemeinerte Kraft verstanden ist, so daß der dortige Ausdruck durch Multiplikation mit e_1 in den obigen übergeht.

$$\mathfrak{f}_u = -\left(\Pi_{uu}\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial u} + \Pi_{vv}\frac{1}{e_2}\frac{\partial e_2}{\partial u} + \Pi_{ww}\frac{1}{e_3}\frac{\partial e_3}{\partial u}\right) \qquad (11)$$
$$+\frac{1}{e_1 e_2 e_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(e_1 e_2 e_3 \Pi_{uu}) + \frac{\partial}{\partial v}(e_1^2 e_3 \Pi_{uv}) + \frac{\partial}{\partial w}(e_1^2 e_2 \Pi_{uw})\right\} \quad \text{usw.}$$

Maurer[1]) hat mit ausgiebiger Benutzung der Invariantentheorie quadratischer Formen die Bewegungsgleichungen der Elastizitätstheorie in allgemeinen Koordinaten abgeleitet, ohne die Beschränkung, daß die Koordinaten orthogonal sind.

Kapitel II.

Statische Probleme der Elastizitätstheorie.

Sehen wir von äußeren Volumkräften ab, so wird im Falle des Gleichgewichts Nr. 104 (6) resp. (2) befriedigt, wenn $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$ lineare Funktionen der Koordinaten, d. h. die Spannungen Konstanten sind, und es handelt sich dann nur noch darum, zu sehen, ob man mit diesem Ansatz auch 104 (3) erfüllen kann.

106. Allseitig wirkende Zugkraft. Auf die Flächeneinheit der Oberfläche wirke normal nach außen der konstante Zug P. Dann genügen wir den Gleichungen Nr. 104 (3), wenn wir als Druckellipsoid eine Kugel annehmen, also

$$\Pi_{yz} = \Pi_{zx} = \Pi_{xy} = 0$$

und $$\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = \Pi_{zz} = P \qquad (1)$$

setzen.

Aus Nr. 103 (18) folgt eine in allen Richtungen gleichmäßige Dehnung der Längeneinheit

$$x_x = y_y = z_z = \frac{1-2\mu}{E}P, \quad y_z = z_x = x_y = 0 \qquad (2)$$

und die Dehnung der Volumeinheit (vgl. Nr. 103 (17))

$$\Theta = 3\,\frac{1-2\mu}{E}P. \qquad (3)$$

$3\,\frac{1-2\mu}{E}$ heißt die *Kompressibilität.*

107. Konstanter Zug gegen die Endflächen eines Zylinders. An den Endflächen eines geraden Zylinders oder Prismas,

1) L. Maurer, *Archiv d. Math. u. Phys.* (3) 6, 1903, S. 1.

dessen Achse die z-Richtung haben möge, greifen entgegengesetzt gleiche äußere Zugkräfte $\pm P$ an. Dann befriedigen wir die Gleichungen durch die Annahme, daß das Druckellipsoid ein Umdrehungsellipsoid ist, dessen Umdrehungsachse parallel der Zugrichtung verläuft und das in eine doppelt zu zählende Ebene ausartet, indem wir nämlich

$$\Pi_{yz} = \Pi_{zx} = \Pi_{xy} = 0 \tag{1}$$

$$\Pi_{zz} = P \tag{2}$$

$$\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = 0 \tag{3}$$

setzen.

Aus Nr. **103** (18) folgt dann

$$z_z = \frac{P}{E} \tag{4}$$

$$x_x = y_y = -\frac{\mu}{E} P \tag{5}$$

Also ist das Verhältnis der Querkontraktion zur Längendilatation

$$-\frac{x_x}{z_z} = \mu, \tag{6}$$

woher sich der Name dieser Konstanten erklärt.

Durch Beobachtung der Dehnung bei gegebenem Zug bestimmt man nach (4) Elastizitätskoeffizienten, indem man die Längenänderung Δl eines Drahtes zwischen zwei Marken A und B, deren Abstand bei unbelastetem Drahte l ist, infolge einer Belastung G mißt (Fig. 67).

Heißt der Drahtquerschnitt σ, so ist

$$z_z = \frac{\Delta l}{l}, \quad P = \frac{G}{\sigma},$$

also nach (4)

$$E = \frac{l}{\Delta l} \frac{G}{\sigma}. \tag{7}$$

Der Techniker mißt Elastizitätskoeffizienten nach $\left[\frac{\text{kg-Gew}}{\text{mm}^2}\right]$.



Fig. 67.

In umstehender Tabelle ist der Elastizitätskoeffizient für einige praktisch wichtige Materialien in dieser Einheit angegeben. Die Zahlen sind in einem Spezialfall nur als rohe Näherungen zu betrachten, da der Elastizitätskoeffizient sehr von der Beschaffenheit des Materials abhängt.

	E in $\frac{\text{kg-Gew}}{\text{mm}^2}$
Eisen	19 000
Stahl	21 000
Glas	6500
Messing . . .	9000

Die Tatsache, daß unterhalb einer gewissen Größe der Spannungen die Dehnung dem Zug proportional ist, ist als Hookesches Gesetz bekannt.

108. Konstanter Zug auf die Mantelfläche eines Zylinders. Wirkt auf die Enden des Zylinders kein Zug, dagegen der konstante Zug P auf die Mantelfläche, so ist den Gleichungen genügt durch den Ansatz

$$\Pi_{yz} = \Pi_{zx} = \Pi_{xy} = \Pi_{zz} = 0 \tag{1}$$

$$\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = P, \tag{2}$$

woraus nach Nr. 103 (18) folgt

$$x_x = y_y = \frac{1-\mu}{E} P, \quad z_z = -\frac{2\mu}{E} P. \tag{3}$$

109. Drucke auf die Oberflächen einer Hohlkugel. In die Gleichung Nr. 104 (8), in der $\mathfrak{F} = 0$ ist, wenn keine äußeren Kräfte wirken, und auch die linke Seite im Falle des Gleichgewichts verschwindet, führen wir räumliche Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein, so daß

$$e_1 = 1, \quad e_2 = r, \quad e_3 = r \sin\vartheta$$

wird und berücksichtigen, daß sowohl $\mathfrak{u}_\vartheta$ und $\mathfrak{u}_\varphi$ als auch die Differentialquotienten nach ϑ und φ aus Symmetriegründen verschwinden müssen, wenn die Drucke auf die Oberflächen der Hohlkugel nicht vom Orte abhängen.

Dann geht Nr. 104 (8) über in

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \mathfrak{u}_r)\right) = 0, \tag{1}$$

woraus

$$\delta r = \mathfrak{u}_r = A r + \frac{B}{r^2} \tag{2}$$

und

$$\Theta = \operatorname{div} \mathfrak{u} = 3A \tag{3}$$

folgt.

Ferner ist nach Nr. **105** (7), (8), (9) und (10)

$$
\begin{aligned}
\Pi_{rr} &= \frac{\partial \omega}{\partial r_r} = \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\mu}{1-2\mu}\,\Theta + \frac{d\delta r}{dr}\right\} \\
\Pi_{\vartheta\vartheta} &= \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta_\vartheta} = \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\mu}{1-2\mu}\,\Theta + \frac{1}{r}\,\delta r\right\} \qquad (4) \\
\Pi_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial \omega}{\partial \varphi_\varphi} = \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\mu}{1-2\mu}\,\Theta + \frac{1}{r}\,\delta r\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\Pi_{r\vartheta} = \Pi_{r\varphi} = \Pi_{\vartheta\varphi} = 0. \qquad (5)
$$

Sind die auf die äußere ($r = r_2$) resp. innere ($r = r_1$) Oberfläche wirkenden Spannungen P_2 resp. P_1, so folgt aus (2)

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{E}{(1+\mu)}\left\{\frac{(1+\mu)}{(1-2\mu)}\,A - \frac{2B}{r_1^3}\right\} \\
P_2 &= \frac{E}{(1+\mu)}\left\{\frac{(1+\mu)}{(1-2\mu)}\,A - \frac{2B}{r_2^3}\right\},
\end{aligned} \qquad (6)
$$

aus denen sich A und B bestimmen zu

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{P_2 r_2^3 - P_1 r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\,\frac{1-2\mu}{E} \\
B &= \frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}\,\frac{(1+\mu)}{2E}.
\end{aligned} \qquad (7)
$$

Spezialisieren wir, indem wir innen und außen gleichen Druck $P_1 = P_2 = P$ annehmen, so wird

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta r}{r} &= A = P\,\frac{1-2\mu}{E}, \\
B &= 0, \qquad (8) \\
\Theta &= 3A = 3P\,\frac{1-2\mu}{E},
\end{aligned}
$$

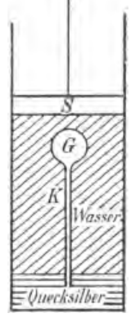


Fig. 68.

wie auch aus Nr. **106** (3) für einen beliebig gestalteten Körper folgt.

Die Kompression des Hohlvolumens innerhalb der Hohlkugel sowie des Volumens der Hohlkugel ist also genau so groß, als wenn die Kugel voll wäre und nur von außen gedrückt würde.

Dieses Resultat ist von Wichtigkeit für die Theorie des Piezometers (Fig. 68), das von Oerstedt[1]) zur Messung der Kompressibilität von Flüssigkeiten verwendet worden

1) Oerstedt, *Pogg. Ann.* **9**, 1827, S. 603; **12**, 1828, S. 158. 513; **31**, 1834, S. 361.

ist. Dasselbe besteht aus einer hohlen Glaskugel G, an die ein Kapillarrohr K angeblasen ist. Es befindet sich, mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, in einem mit Wasser gefüllten Gefäße, in welchem mittels eines Stempels S der Druck gesteigert werden kann. Durch Quecksilber ist die zu untersuchende Flüssigkeit von dem Wasser getrennt. Entgegen Oersteds Behauptung, daß ein dünnwandiges Piezometer nicht merklich sein Hohlvolumen ändere, und daß somit die wahre Kompressibilität der im Piezometer befindlichen Flüssigkeit gemessen werde, fanden Colladon und Sturm[1]) das soeben abgeleitete Resultat, daß im Piezometer nur die Differenz der Kompressibilität der Flüssigkeit und des Glases (aus dem das Piezometer besteht) bestimmt wird.

Régnault[2]) und später Grassi[3]) haben die Fehlerquelle dadurch eliminiert, daß sie erstens nur den Innenraum des Piezometers unter Druck gesetzt haben ($P_1 = P$, $P_2 = 0$), zweitens nur den Außenraum ($P_2 = P$, $P_1 = 0$), drittens das ganze Piezometer, und die hierbei beobachteten scheinbaren Flüssigkeitskompressionen kombiniert haben.[4])

Es ergibt sich für den *Kompressionsmodul* oder *Volumelastizitätsmodul* a einiger Flüssigkeiten (vgl. Nr. **103** (16′))

	a in $\frac{\text{kg-Gew}}{\text{mm}^2}$
Quecksilber bei 0° . .	3503
Wasser bei 0°	205
Äther bei 0°	70

Es ist aber zu beachten, daß diese Werte sehr stark von der Temperatur abhängen, und daß in Wahrheit a keine Konstante, sondern eine Funktion des Drucks ist.[5]) $1/a$ heißt die *Kompressibilität.*

Für feste Körper (vgl. Nr. **106** (3)) berechnet sich der Volumelastizitätsmodul a aus dem Elastizitätskoeffizienten E und dem

1) Colladon u. Sturm, *Pogg. Ann.* **12**, 1828, S. 39. 161.

2) V. Régnault, *Mém. de l'Just. Paris* **21**, S. 329, 1847; *Mém. de l'Ac. Paris* **26**, S. 221, 1847.

3) Grassi, *Ann. de chim. et de phys.* (3) **31**.

4) Man studiere die sorgfältigen Messungen von W. C. Röntgen und J. Schneider, *Wied Ann.* **29**, 1886, S. 165; **31**, 1887, S. 1000; **33**, 1888, S. 644; **34**, 1888, S. 531.

5) Siehe z. B. F. Kohlrausch, *Lehrbuch d. prakt. Physik*, 11. Aufl., Leipzig und Berlin 1910, Tabelle 19b.

Verhältnis μ der Querkontraktion zur Längendilatation nach der Formel

$$a = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

(vgl. die Zahlenangaben in der Tabelle der Nr. 111).

110. Drucke auf die Oberfläche eines Hohlzylinders. Die innere resp. äußere Mantelfläche eines Hohlzylinders erleide die Zugspannungen P_1 resp. P_2, während die Endflächen den Zug P_z erfahren (Fig. 69).

Führen wir in Nr. 104 (8) Zylinderkoordinaten ein und berücksichtigen, daß aus Symmetriegründen $\mathfrak{u}_\varphi = 0$ und $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ sein muß, so erhalten wir, da

$$e_1 = 1,$$
$$e_2 = r,$$
$$e_3 = 1$$

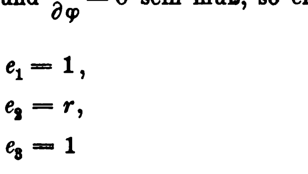


Fig. 69.

ist, unter der Annahme, daß $\mathfrak{u}_r$ nur von r, $\mathfrak{u}_z$ nur von z abhängig ist,

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_z}{\partial z^2} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathfrak{u}_r}{\partial r} = 0. \tag{1}$$

Es ist also

$$\mathfrak{u}_r = Ar + \frac{B}{r}$$
$$\mathfrak{u}_z = Cz + D, \tag{2}$$

woraus

$$\Theta = \operatorname{div} \mathfrak{u} = 2A + C \tag{3}$$

folgt.

Ferner ist nach Nr. 105

$$\Pi_{rr} = \frac{E}{1+\mu} \left\{ \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta + r_r \right\}$$
$$\Pi_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1+\mu} \left\{ \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta + \varphi_\varphi \right\} \tag{4}$$
$$\Pi_{zz} = \frac{E}{1+\mu} \left\{ \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta + z_z \right\}$$

und

$$r_r = \frac{d\mathfrak{u}_r}{dr}, \quad \varphi_\varphi = \frac{\mathfrak{u}_r}{r}, \quad z_z = \frac{d\mathfrak{u}_z}{dz}, \tag{5}$$

so daß die Konstanten A, B, C sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\mu}{1-2\mu}(2A+C)+C\right\} &= P_z \\ \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\mu}{1-2\mu}(2A+C)+A-\frac{B}{r_2^2}\right\} &= P_2 \\ \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\mu}{1-2\mu}(2A+C)+A-\frac{B}{r_1^2}\right\} &= P_1 \end{aligned} \tag{6}$$

zu

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-\mu}{E}\,\frac{P_2 r_2^2 - P_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{\mu P_z}{E} \\ B &= \frac{1+\mu}{E}\,\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}(P_2 - P_1) \\ C &= \frac{1}{E}P_z - \frac{2\mu}{E}\,\frac{P_2 r_2^2 - P_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \end{aligned} \tag{7}$$

berechnen, während D nur eine konstante Verschiebung des ganzen Hohlzylinders bedeutet und somit für das elastische Problem ohne Interesse bleibt.

Wertheim[1]) hat E und μ gemessen, indem er das untere Ende eines Hohlzylinders mit Gewichten belastete und das Innere desselben mit Flüssigkeit füllte. Es war also $P_1 = P_2 = 0$, so daß $B = 0$ wurde.

Er maß die Dehnung $\frac{\Delta l}{l} = C = \frac{P_z}{E}$ und mit Hilfe des Flüssigkeitsstandes $\Theta = \frac{1-2\mu}{E} P_z$, wodurch er E und μ für dieselben Materialien bestimmte.

111. Torsion. Das obere Ende ($z = 0$) eines Kreiszylinders sei fest eingespannt, das untere Ende ($z = l$) werde durch ein Drehmoment $\mathfrak{N}$ tordiert. Auf die Mantelfläche wirken also keine Drucke, auf die untere Endfläche nur der Druck $\Pi_{\varphi z}$.

Dann liegt es nahe, den Versuch zu machen, den Gleichungen zu genügen, indem man im ganzen Zylinder alle Π außer $\Pi_{\varphi z}$ gleich Null setzt und somit alle Deformationsgrößen gleich Null annimmt außer φ_z. Außerdem ist aus Symmetriegründen $\partial/\partial\varphi = 0$.

Nach Nr. 105 (7) ist

$$2\varphi_z = r\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial z} \tag{1}$$

und nach Nr. 105 (8) und (10)

$$\Pi_{\varphi z} = \frac{E}{1+\mu}\varphi_z. \tag{2}$$

1) Wertheim, *Ann. chim. phys.* (3) **23**, 52; *Pogg. Ann.* **78**, 381, 1849.

Es existiert also nur die Komponente der Verschiebung $u_\varphi = r\,\delta\varphi$, und nach Nr. 105 (11) ist, da keine äußeren Volumkräfte wirken,

$$\frac{d}{dz}\,\Pi_{\varphi z} = 0. \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt, daß $\delta\varphi$ eine lineare Funktion von z sein muß, d. h.

$$\delta\varphi = Cz. \tag{4}$$

Es finden also Drehungen der Kreisquerschnitte in sich statt, die proportional dem Abstande vom festen Ende ($z = 0$) sind.

Um C zu bestimmen, berücksichtigen wir, daß für $z = l$

$$\int_0^R \Pi_{\varphi z} \cdot r\,\delta\varphi\, 2r\pi\, dr = \mathfrak{N} \cdot \delta\varphi \tag{5}$$

sein muß, also nach (1), (2) und (4)

$$\mathfrak{N} = \int_0^R \frac{E}{1+\mu}\, r^3 C\pi\, dr = \frac{E}{1+\mu}\,\frac{R^4\pi}{4}\, C,$$

so daß

$$(\delta\varphi)_{z=l} = \frac{\mathfrak{N}(1+\mu)}{E}\,\frac{4l}{R^4\pi} \tag{6}$$

wird.

Die Größe

$$\tau = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{7}$$

wird *Torsionsmodul* genannt. Dann ist

$$(\delta\varphi)_{z=l} = \frac{2\mathfrak{N}l}{\tau R^4 \pi}. \tag{8}$$

Man bestimmt den Torsionsmodul entweder statisch, indem man die Drehung eines Drahtquerschnitts in bestimmtem Abstande vom festen Ende unter der Einwirkung eines gemessenen Drehmoments mißt, oder nach der Coulombschen[1] Methode durch Schwingungen.

Befestigt man am unteren Ende des Drahtes ein Gewicht, dessen Trägheitsmoment J bezüglich der Drahtachse groß gegen das des Drahtes selbst ist und tordiert den Draht ein wenig, so

1) Coulomb hat Formel (8) empirisch gefunden; *Hist. et Mém. de l'Ac. royale des sc.* 1784, p. 229.

wird er Schwingungen ausführen, deren Schwingungsdauer T durch die Formel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \tag{9}$$

gegeben ist.

Hier bedeutet

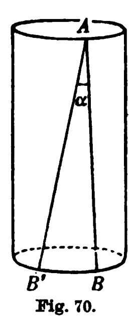


Fig. 70.

$$D = \frac{\mathfrak{N}}{(\delta\varphi)_{z=l}} = \frac{E}{(1+\mu)}\frac{R^4\pi}{4l} = \frac{\tau R^4\pi}{2l} \tag{10}$$

die Direktionskraft, welche der Draht auf das Gewicht ausübt.

Nach Formel (7) und (2) ist $\Pi_{\varphi z} = \tau r \frac{\partial \delta\varphi}{\partial z}$. Da aber $r \frac{\partial \delta\varphi}{\partial z}$ nach Fig. 70 den Winkel α bedeutet, um den eine Erzeugende des Zylinders gedreht ist, so bedeutet der Torsionsmodul τ die scherende Spannung, die auftritt, wenn eine der Drehachse parallele Linie um den Winkel 1 gedreht ist.

Die folgende Tabelle enthält für einige Metalle die Werte von E, τ und μ nach Voigt[1]):

	E in $\frac{\text{kg-gew}}{\text{mm}^2}$	τ in $\frac{\text{kg-gew}}{\text{mm}^2}$	μ
Mg	4260	1710	0,24
Al	6570	2580	0,26
Fe	12800	5210	0,28
Ni	20300	7820	0,28
Cu	10800	4780	0,13
Zn	10300	3880	0,33
Ag	7790	2960	0,31
Cd	7070	2450	0,44
Sn	5410	1730	0,50
Au	7580	2850	0,33
Bi	3190	1240	0,34

112. Die Saint Venantsche Methode. Eine von Saint Venant[2]) angegebene Integrationsmethode hat den Vorteil, auf Zylinder beliebiger Querschnitte anwendbar zu sein.

Nach dieser wird die Torsion dadurch gekennzeichnet, daß jeder ursprünglich ebene Querschnitt eine Drehung um eine und

1) W. Voigt, *Wied. Ann.* 48, 1893, S. 674.

2) Saint Venant, *Mém. des savants étrangers* 14, 1855, S. 232; *Liouvilles Journ.* (2) 1, 1855—56; *C. R.* 87, 823, 849, 893; 88, 142, 1879.

dieselbe, den Zylindererzeugenden parallele Achse erleidet. Diese Drehung ist proportional dem Abstand von der einen (z. B. der oberen) Endfläche des Zylinders. Es ist also

$$\delta x = -\omega y z, \quad \delta y = +\omega x z. \tag{1}$$

Die dritte Komponente, die von z unabhängig sei, werde in der Form

$$\delta z = \omega \psi(x, y) \tag{2}$$

angesetzt.

Dann ergibt sich aus (1) und (2)

$$\Theta = 0 \tag{3}$$

und nach Nr. 103 (16)

$$\begin{gathered} \Pi_{xx} = \Pi_{yy} = \Pi_{zz} = \Pi_{xy} = 0 \\ \Pi_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\,\omega\left(x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \\ \Pi_{zx} = \frac{E}{2(1+\mu)}\,\omega\left(-y + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right). \end{gathered} \tag{4}$$

Die Gleichgewichtsbedingung Nr. 102 (5) wird

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Auf die Mantelfläche, an der überdies $\cos(n, z) = 0$ ist, mögen keine Drucke wirken, d. h. die Grenzbedingungen Nr. 104 (3) gehen über (vgl. Nr. 102 (4)) in

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cos(n, y) - y\cos(n, x) + x\cos(n, y) = 0. \tag{6}$$

Fig. 71.

Setzen wir

$$\chi(x + yi) = \varphi + i\psi, \tag{7}$$

so genügt φ nach den Prinzipien der Funktionentheorie, nach denen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8}$$

ist, mit Berücksichtigung der Beziehungen (vgl. Fig. 71)

$$\cos(n, x) = \frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \cos(n, y) = \frac{\partial y}{\partial n} = +\frac{\partial x}{\partial s}$$

(ds Element der Randkurve) der Gleichung

$$\Delta \varphi = 0 \tag{9}$$

und an der Randkurve s der Gleichung

$$\varphi = \text{Konst.} - \frac{r^2}{2}, \tag{10}$$

wodurch φ bis auf eine Konstante bestimmt ist.

Die Idee Saint Venants besteht nun darin, χ anzunehmen und zu sehen, für welche Begrenzungskurven das so gefundene φ eine Lösung darstellt. Dadurch umgeht man die Schwierigkeit, die Gleichungen (9) und (10) zu integrieren.

Nach (2) stellt $\psi =$ Konst. die Schar der Höhenlinien eines ursprünglich ebenen Querschnitts dar, aus ψ ergibt sich also die Verwölbung des Querschnitts.

Setzen wir $\Phi = \varphi + \frac{x^2 + y^2}{2}$, so ist mit Hilfe von (8) die Richtung einer Kurve $\Phi =$ Konst. gegeben durch

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y} + x}{\frac{\partial \psi}{\partial x} - y} = \frac{\Pi_{zy}}{\Pi_{zx}}, \tag{11}$$

d. h. die Tangentialspannung in einem Querschnitt hat die Richtung der durch den fraglichen Punkt gehenden Kurve $\Phi =$ Konst.

Ferner ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right)^2},$$

d. h. nach (4) ist $\frac{E\omega}{2(1+\mu)} \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ die Resultante der Spannung. Zeichnet man die Schar $\Phi =$ Konst. für äquidistante Werte der Konstanten, so ist also die Dichte der Φ-Linien ein Maß für die Größe der Spannung.

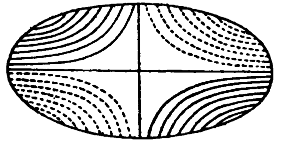


Fig. 72.

Setzt man z. B. $\chi = a(x + yi)^2$, so erhält man die Torsion eines elliptischen Zylinders.[1])

Da dann $\varphi = a(x^2 - y^2)$, $\psi = 2axy$ ist, so sind die Höhenlinien des ursprünglich ebenen Querschnitts die Linien $\psi =$ Konst., d. h. gleichseitige Hyperbeln (vgl. Fig. 72), während die Linien $\Phi =$ Konst. ähnlich und ähnlich gelegene Ellipsen sind.

1) Vgl. z. B. H. Weber-Riemann, *Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik,* 5. Aufl., 2, S. 179 oder A. E. H. Love, *Lehrbuch der Elastizität,* deutsch von A. Timpe, Leipzig u. Berlin 1907, S. 368.

Das Drehmoment um die z-Achse ergibt sich aus (4) zu

$$\mathfrak{N}_z = \int\int (\Pi_{yz} x - \Pi_{xz} y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{E\omega}{2(1+\mu)} \left\{ \int (x^2 + y^2)\, d\sigma + \int \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\sigma \right\}, \quad (12)$$

oder es folgt umgekehrt ω aus $\mathfrak{N}_z$, wenn ψ gefunden ist.

Folgendermaßen ergibt sich[1]), daß die Resultante der Tangentialkräfte bei der Torsion in einem beliebigen Querschnitt verschwindet.

Nach (4) ist mit Beachtung von (8)

$$\int \Pi_{yz}\, d\sigma = \frac{E\omega}{2(1+\mu)} \int\int \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi + \frac{r^2}{2} \right) dx\, dy$$

und

$$\int \Pi_{xz}\, d\sigma = -\frac{E\omega}{2(1+\mu)} \int\int \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi + \frac{r^2}{2} \right) dx\, dy. \quad (13)$$

Wendet man rechts partielle Integration an und berücksichtigt (10), so folgt die Behauptung.

113. Torsion eines Bandes von rechteckigem Querschnitt. Gleichung (9) Nr. **112** mit der Nebenbedingung (10) sei zu integrieren, für den Fall, daß die Begrenzung ein Rechteck ist, dessen Mitte wir zum Koordinatenursprung wählen, und dessen Kanten die Längen $2a$ und $2b$ haben.

Nach der Methode der Partikularlösungen ergibt sich[2])

$$\varphi = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4b^2 \frac{2^3}{(2n+1)^3 \pi^3} \frac{\cosh \frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{b}}{\cosh \frac{2n+1}{2} \frac{\pi a}{b}} \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi y}{b} \quad (1)$$

und nach Nr. **112** (8)

$$\psi = -xy + 4b^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\sinh \frac{2n+1}{2} \frac{\pi x}{b}}{\cosh \frac{2n+1}{2} \frac{\pi a}{b}} \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi y}{b}. \quad (2)$$

$\omega\psi$ stellt nach Nr. **112** (2) die Verwölbung des Querschnitts dar (vgl. die graphische Darstellung bei Saint Venant).

---

1) J. A. Vollgraff, *Ann. Phys.* (4) **14**, 1904, S. 620.
2) A. E. H. Love a. a. O. S. 369 (vgl. Fußnote auf voriger Seite).

Nach Nr. 112 (12) ergibt sich nun aus ψ

$$\mathfrak{N}_z = \frac{E\omega}{2(1+\mu)}\left\{\frac{16ab^3}{3} - \frac{2^{10}\cdot b^4}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{tgh}\frac{2n+1}{2}\frac{\pi a}{b}}{(2n+1)^5}\right\}. \qquad (3)$$

Der Wert der in dieser Formel auftretenden Reihe ist von Saint Venant für verschiedene Werte des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ berechnet worden.

Ist $\frac{a}{b}$ so groß, daß $e^{-2\pi\frac{a}{b}}$ gegen 1 vernachlässigt werden darf, so erhält man

$$\mathfrak{N}_z = \frac{E\omega}{2(1+\mu)}\left\{\frac{16}{3}ab^3 - \frac{2^{10}\cdot b^4}{\pi^5}\left(\frac{31}{32}\frac{\pi^5}{295{,}1} - 2e^{-\pi\frac{a}{b}}\right)\right\}. \qquad (3')$$

Für ein sehr schmales Band der Länge l berechnet sich nach Nr. 112 (1)

$$(\delta\varphi)_{z=l} = \omega l$$

und mit Benutzung von (3′) die Direktionskraft

$$D = \frac{\mathfrak{N}}{\delta\varphi} = \frac{\tau}{3l}q^2\frac{b}{a}, \qquad (4)$$

wo q den Querschnitt des Bandes bedeutet.

Der Vergleich mit Nr. 111 (10) zeigt, daß bei gleichem Querschnitt, d. h. gleicher Tragfähigkeit, ein Band wesentlich kleinere Direktionskraft aufweist, als ein kreisförmiger Draht. Deshalb werden als Aufhängungen bei Dynamometern und Drehspulengalvanometern auch im allgemeinen Metallbänder benutzt.

114. Torsion von Wellen. Technisches Interesse verdienen die Untersuchungen über die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser, die von Föppl[1]) zuerst angestellt sind. Sie beschäftigen sich mit dem Spannungszustande in der Übergangsstelle bei einer auf Verdrehen beanspruchten Welle aus zwei koaxialen zylindrischen Teilen, die — etwa durch einen Viertelkreis — ineinander übergehen, oder bei Wellen mit Einschnitten oder aufgelagerten Bunden (z. B. Kammlagern).

Besonders eingehend wurde dies Problem auf Runges Anregung von Willers[2]) nach einer eleganten graphischen Methode behandelt.

---

1) A. Föppl, *Münch. Akad. Ber.* **35**, 1905, S. 249. 504; *Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure* **50**, 1906, S. 1032.

2) F. A. Willers, *Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse*, Diss. Göttingen 1907.

115. Biegung eines Balkens durch ein Drehmoment.[1]) Ein zylindrischer oder prismatischer Balken sei in der Ebene $z = 0$ so befestigt (Fig. 73), daß die Punkte dieser Ebene sich nur in dieser selbst verschieben können, während die Teilchen in unmittelbarer Nähe des Querschnittsschwerpunktes in der Ebene $z = 0$ weder eine Parallelverschiebung noch eine Drehung erfahren (Annahme 1). Die z-Achse sei die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Querschnitte im spannungslosen Zustande (Annahme 2). Die x- und y-Achse seien den Hauptträgheitsachsen der Querschnitte parallel (Annahme 3).

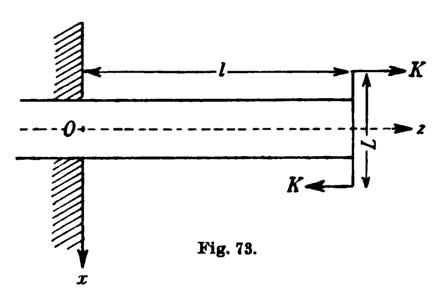


Fig. 73.

Wir setzen an

$$\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = \Pi_{zy} = \Pi_{xz} = \Pi_{yx} = 0 \qquad (1)$$

$$\Pi_{zz} = -\alpha x. \qquad (2)$$

Dann wirken keine Spannungen auf den Zylindermantel. Die resultierende Kraft auf einen Querschnitt $\iint \Pi_{zz}\, dx\, dy$ ist nach (2) und Annahme 2 Null. Es wirken also nur Kräfte auf die Grundflächen des Balkens, und zwar sind diese statisch einem Kräftepaar äquivalent.

Die Komponente des Kräftepaares um die z-Achse ist

$$\mathfrak{N}_z = \iint (\Pi_{zy} x - \Pi_{zx} y)\, dx\, dy = 0$$

wegen (1); die Komponente um die y-Achse ist

$$\mathfrak{N}_y = \iint (\Pi_{zx} z - \Pi_{zz} x)\, dx\, dy = \alpha \iint x^2\, dx\, dy = J \cdot \alpha, \qquad (3)$$

wenn J das Trägheitsmoment des Querschnitts, bezogen auf die yz-Ebene bedeutet, unter der Annahme, daß die Massendichte gleich Eins ist.

Schließlich ist

$$\mathfrak{N}_x = \iint (\Pi_{zz} y - \Pi_{zy} z)\, dx\, dy = -\alpha \iint xy\, dx\, dy = 0$$

nach Annahme 3.

Aus den Gleichungen Nr. 103 (18) ergibt sich auf Grund von (1) und (2)

1) Saint Venant, *Journ. d. Math.* (Liouville) (2) 1, 1856, S. 89.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta x}{\partial x} &= \frac{\mu \alpha}{E} x & \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial \delta y}{\partial y} &= \frac{\mu \alpha}{E} x & \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \delta z}{\partial z} &= -\frac{\alpha x}{E} & \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Setzen wir δx, δy, δz als Funktionen zweiten Grades der Koordinaten an, also

$$\begin{aligned}
\delta x = a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + d_1 yz + e_1 zx + f_1 xy \\
+ g_1 x + h_1 y + i_1 z + k_1 \text{ usw.}
\end{aligned} \tag{5}$$

und berücksichtigen wir Annahme 1 sowie die Gleichungen (4), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\delta x &= \frac{\alpha}{2E}(z^2 + \mu x^2 - \mu y^2) \\
\delta y &= \frac{\mu \alpha}{E} xy \\
\delta z &= -\frac{\alpha}{E} xz.
\end{aligned} \tag{6}$$

Die Verbindungslinie der Querschnittsschwerpunkte erhält die Gleichung

$$\delta x = \frac{\alpha}{2E} z^2, \tag{7}$$

ist also eine Parabel oder genähert ein Kreis vom Radius $R = \frac{E}{\alpha}$. Ersetzen wir α nach (3) durch $\frac{\mathfrak{R}}{J}$, so wird

$$R = \frac{EJ}{\mathfrak{R}}. \tag{8}$$

$\mathfrak{R}$ heißt das *Biegungsmoment.* Nach Fig. 73 ist $\mathfrak{R} = K \cdot L$.

Die Ebene $x = 0$ erleidet nach (2) keine Spannungen und somit nach (4) keine Verzerrungen; sie heißt die *neutrale Ebene.*

Für Balken von rechteckigem Querschnitt der Breite b und der Höhe h ist

$$J = \frac{bh^3}{12},$$

also die Durchbiegung der Balkenachse am Ende (für $z = l$)

$$\delta x = \frac{\mathfrak{R}}{2JE} l^2 = \frac{6\mathfrak{R} l^2}{E b h^3}. \tag{9}$$

Aus (6) folgt: Die Querschnitte bleiben eben und gehen nach der Biegung alle durch den Krümmungsmittelpunkt der Schwerpunktslinie.

Der $z = c$ entsprechende Querschnitt deformiert sich folgendermaßen: Aus den Geraden $y = \pm \frac{b}{2}$ wird nach (6)

$$y' = y + \delta y = \pm \frac{b}{2}\left(1 + \frac{\mu}{R} x\right).$$

Die Linien bleiben also gerade, werden aber etwas geneigt.

Aus den Linien $x = \pm \frac{h}{2}$ wird

$$x' = x + \delta x = \pm \frac{h}{2} + \frac{1}{2R}\left(c^2 + \mu \frac{h^2}{4} - \mu y^2\right),$$

d. h. genähert Kreise vom Radius $\frac{R}{\mu}$ (vgl Fig. 74).

Die Verwölbung der unteren Grenzfläche $x = +\frac{h}{2}$ ergibt sich aus

$$\delta x = \frac{1}{2R}\left(z^2 + \frac{\mu h^2}{4} - \mu y^2\right).$$

Die Höhenlinien dieser ursprünglich ebenen Fläche sind also die Hyperbelschar $\delta x =$ Konst., d. h.

$$z^2 - \mu y^2 = \text{Konst.} \tag{10}$$

Diese haben gemeinsame Asymptoten, die mit der Längsrichtung des Stabes einen Winkel φ bilden, der durch

$$\operatorname{ctg} \varphi = \sqrt{\mu} \tag{11}$$

gegeben ist.

Fig. 74.

Durch Messung dieses Winkels hat Cornu[1]) das Verhältnis der Längsdilatation zur Querkontraktion bestimmt. Die Methode war eine optische: Auf den durchgebogenen Stab wurde eine ebene Glasplatte gelegt und die Interferenzkurven beobachtet, die senkrecht auf die dazwischen liegende Luftschicht auffallendes monochromatisches Licht erzeugte. Diese Streifen sind direkt die fraglichen Höhenlinien. Fig. 75 stellt das Interferenzphänomen nach Straubel dar.

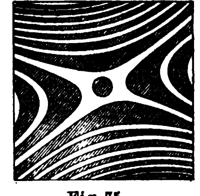


Fig. 75.

1) M. A. Cornu, *C. R.* **69**, 333, 1869. Die Methode wurde von R. Straubel, *Wied. Ann.* **68**, 369, 1899 (auch **64**, 794, 1898) verbessert.

116. Einzelkraft am Ende des Balkens. Der in Nr. 115 behandelte Fall der Biegung eines Balkens setzte eigentlich voraus, daß an dem Ende ein Drehmoment, wie es in Fig. 73 angedeutet ist, wirkt. Ist dagegen die Anordnung die, daß eine Kraft K parallel der x-Achse am Ende angreift, so wird an einer beliebigen Stelle z das Gleichgewicht hergestellt durch das Auftreten einer Einzelkraft K und eines Drehmoments $K(l-z)$, wie man erkennt, wenn man den Balken an der Stelle z zerschneidet und die Schnittstellen durch zwei horizontale Gelenkstangen wieder verbindet. Die obere Gelenkstange wird gezogen, die untere gedrückt; diese Spannungen werden durch das Kräftepaar kompensiert, während die Einzelkraft K eine Senkung des rechtsseitigen Teiles des Balkens verhindert. (Vgl. Fig. 76.)

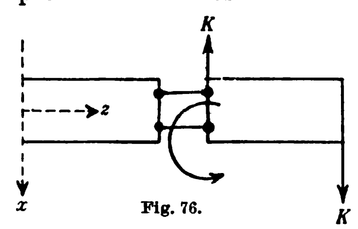


Fig. 76.

Man genügt allen zu stellenden Bedingungen durch den Ansatz

$$\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = \Pi_{xy} = 0, \qquad \Pi_{zz} = -K(l-z)\frac{x}{J}. \tag{1}$$

Dann gehen die Gleichgewichtsbedingungen Nr. 104 (2) über in

$$\frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi_{yz}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yz}}{\partial y} + \frac{Kx}{J} = 0.$$

Hieraus folgt nach Nr. 103 (18)

$$\begin{gathered}\frac{\partial \delta z}{\partial z} = -\frac{K(l-z)x}{EJ}, \quad \frac{\partial \delta x}{\partial x} = \frac{\partial \delta y}{\partial y} = -\mu\frac{\partial \delta z}{\partial z}\\ \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\right) = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Will man sämtliche Verzerrungen und Spannungen kennen, so muß man — ähnlich wie bei Torsionsproblemen — mit Saint Venant[1]) eine funktionentheoretische Integrationsmethode heranziehen.

Aber auch ohne das zu tun, können wir einige physikalisch wichtige Resultate herleiten.

---

1) Saint Venant, *Journ. d. Math. (Liouville)* (2) 1, 1856, S. 157; A. E. H. Love, *Lehrbuch d. Elastizität,* deutsch von A. Timpe, Leipzig und Berlin 1907, S. 379.

Aus der ersten Gleichung (2) folgt

$$\delta z = -\frac{Klxz}{EJ} + \frac{Kxz^2}{2EJ} + \Phi(x, y), \tag{3}$$

wo Φ irgend eine Funktion von x und y ist.

δx und δy setzen wir als allgemeine Funktionen 3. Grades von x, y, z an; dann ergeben die Gleichungen (2), wenn man berücksichtigt, daß der Ursprung fest ist und ein durch den Ursprung gehendes Linienelement bei geeigneter Einspannung seine Richtung nicht verändert,

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{K}{EJ}\left[\frac{1}{2}(l-z)\mu(x^2-y^2) + \frac{1}{2}lz^2 - \frac{1}{6}z^3\right] + \alpha yz \\ \delta y &= \frac{K\mu}{EJ}(l-z)xy - \alpha zx. \end{aligned} \tag{4}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 \delta x}{\partial z^2} = \frac{K}{EJ}(l-z), \qquad \frac{\partial^2 \delta y}{\partial z^2} = 0. \tag{5}$$

Die Zentrallinie wird also zu einer ebenen Kurve in der xz-Ebene, deren Krümmung an jeder Stelle $\frac{K(l-z)}{EJ}$ ist.

Die Durchbiegung, d. h. die Senkung eines Punktes der Zentrallinie ergibt sich aus (4) für $x = y = 0$

$$(\delta x)_{x=y=0} = \frac{Kz^2}{2EJ}\left(l - \frac{z}{3}\right), \tag{6}$$

also ist die Senkung des Endes

$$(\delta x)_{z=l} = \frac{Kl^3}{3EJ} = \frac{4Kl^3}{Ebh^3}. \tag{7}$$

117. Bestimmung des Elastizitätskoeffizienten durch Biegung. Die Durchbiegung eines an einem Ende eingespannten Stabes ließe sich nach Nr. **116** (6) zur Bestimmung des Elastizitätskoeffizienten benutzen. Im allgemeinen verwendet man aber hierzu einen in der Mitte belasteten Stab auf zwei Stützen (Fig. 77).

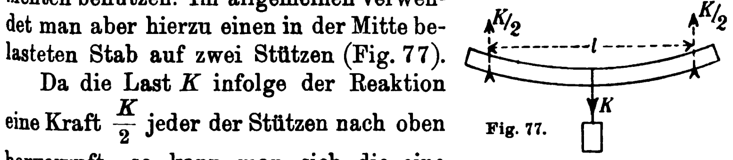


Fig. 77.

Da die Last K infolge der Reaktion eine Kraft $\frac{K}{2}$ jeder der Stützen nach oben hervorruft, so kann man sich die eine Hälfte des Stabes starr gemacht denken, und erhält die Durchbiegung der Mitte, wenn man in Gleichung (7) der vorigen Nummer K durch $\frac{K}{2}$, l durch $\frac{l}{2}$ ersetzt. Diese wird also $\frac{1}{4}\frac{Kl^3}{Ebh^3}$.

Besser als die Durchbiegung in der Mitte mißt man die Neigung φ, die der Stab an der Stelle der Stützen erleidet. Diese ergibt sich, indem man aus Nr. 116 (6)

$$\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z}\right)_{z=l} = \frac{Kl^2}{2EJ} = \frac{6Kl^2}{Ebh^3}$$

bildet und wieder K durch $\frac{K}{2}$, l durch $\frac{l}{2}$ ersetzt.

Auf diese Weise erhält man

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}\frac{Kl^2}{Ebh^3}. \tag{1}$$

Nach dieser Methode hat Kirchhoff[1]) E bestimmt. Die Messung des Winkels φ geschieht nach A. König[2]) am besten so, daß die Skala Sk (vgl. Fig. 78) in einem Spiegel S_1 gespiegelt wird; dieses Spiegelbild wird in S_2 gespiegelt und dann in einem Fernrohr F beobachtet. Durch eine einfache geometrisch-optische Betrachtung ergibt sich, daß die im Fernrohr beobachtete Verschiebung um n Skalenteile mit der Neigung φ durch die Formel

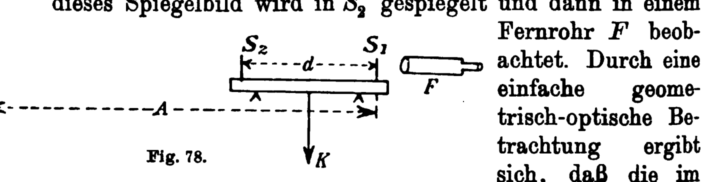


Fig. 78.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{n}{2(2A+d)} \tag{2}$$

verbunden ist.

Die Bestimmung des Torsionsmoduls und des Elastizitätskoeffizienten am selben Material ergibt die beiden elastischen Konstanten E und μ bei isotropen Körpern (vgl. die Tabelle in Nr. 111).

118. Naviersche[3]) Theorie der Balkenbiegung. Die punktiert gezeichnete Linie des gebogenen Balkens in Fig. 79 sei die neutrale Faser, die keine Längenänderung erlitten hat. Dann sind die Fasern oberhalb der neutralen verlängert, unterhalb derselben verkürzt worden, und zwar ist die Verlängerung einer Schicht im Abstande u von der neutralen Ebene, wie sich aus der Figur sofort ergibt,

$$\frac{l+\Delta l}{l} = \frac{R+u}{R}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{u}{R} = \frac{\Delta l}{l}. \tag{1}$$

---

1) G. Kirchhoff, *Pogg. Ann.* **108**, 1859, S. 369.

2) A. König, *Wied. Ann.* **28**, 1886, S. 108; ferner W. Pscheidl, *Rep. d. Phys.* **19**, 1883, S. 178.

3) Navier, *Résumé des leçons sur l'application de la mécanique*, 2. Aufl., 1833.

Der Druck, der dadurch auftritt, ist also nach der Definition des Elastizitätskoeffizienten

$$E\frac{\Delta l}{l} = E\frac{u}{R} \tag{2}$$

in der Richtung der Pfeile, somit das Drehmoment bezüglich einer in der neutralen Ebene liegenden, senkrecht zur Balkenachse verlaufenden Geraden, das ein Querschnittselement von der Breite b und der Höhe du erleidet, $E\frac{u^2}{R}b\,du$, und das Drehmoment des gesamten Querschnitts

$$\mathfrak{N} = 2E\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{u^2}{R}\,b\,du,$$

oder, wenn wir

$$2\int_0^{\frac{h}{2}} b u^2\,du = J$$

setzen,

$$\mathfrak{N} = \frac{EJ}{R}. \tag{3}$$

Fig. 79.

Wählen wir die x-Achse parallel der Längsrichtung des Balkens im ungebogenen Zustande, die y-Achse senkrecht zur x-Achse, so können wir mit hinreichender Genauigkeit

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

setzen, also haben wir

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{N}. \tag{4}$$

$\mathfrak{N}$ heißt das Biegungsmoment, EJ die Biegungssteifigkeit.

Da hier überhaupt keine Grenzbedingungen vorkommen (außer für $x = 0$), so ist diese in der Technik übliche Theorie nur anwendbar auf Balken von Querschnittsdimensionen, die klein gegen die Längenerstreckung sind.

119. Balken auf zwei Stützen an den Enden mit angreifender Einzellast. Die Drucke auf die Stützen sind $\frac{P\xi'}{l}$ resp. $\frac{P\xi}{l}$, wie aus den Prinzipien der Statik folgt (vgl. Fig. 80).

Denken wir uns an irgend einer Stelle $x < \xi$ einen Schnitt durch den Balken angebracht, so ist das Biegungsmoment sämtlicher rechts angreifender Kräfte

$$P(\xi - x) - \frac{P\xi}{l}(l - x) = -\frac{P\xi'}{l}x,$$

dagegen für einen Punkt $x > \xi$

$$-\frac{P\xi}{l}(l - x),$$

wo $\xi + \xi' = l$ ist.

Also lauten die Gleichgewichtsbedingungen

für $x < \xi$

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P\xi'}{l}x$$

für $x > \xi$ (1)

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P\xi}{l}(l - x).$$

Fig. 80.

Die Integration ergibt

$$\text{für } x < \xi \qquad EJ(y - x \operatorname{tg}\alpha) = -\frac{P\xi' x^3}{6l}$$

$$\text{für } x > \xi \qquad EJ(y - (l - x)\operatorname{tg}\beta) = -\frac{P\xi(l - x)^3}{6l}, \tag{2}$$

wenn α und β die Neigungen der Zentrallinie gegen die Horizontale in den Stützpunkten bedeuten, und zwar sind die spitzen Winkel gemeint.

Da für $x = \xi$ y und $\frac{dy}{dx}$ stetig ineinander übergehen müssen, so ergeben sich die Bedingungen

$$EJ\operatorname{tg}\alpha = \frac{P\xi\xi'(\xi + 2\xi')}{6l}, \qquad EJ\operatorname{tg}\beta = \frac{P\xi\xi'(2\xi + \xi')}{6l}, \tag{3}$$

so daß

$$\text{für } x < \xi \qquad y = \frac{P\xi'\{\xi(\xi + 2\xi')x - x^3\}}{6lEJ}$$

$$\text{für } x > \xi \qquad y = \frac{P\xi\{\xi'(\xi' + 2\xi)(l - x) - (l - x)^3\}}{6lEJ} \tag{4}$$

wird.

Greift die Last in der Mitte an, so ist $\xi = \xi' = \frac{l}{2}$, also wird nach (3)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Pl^2}{16EJ}, \tag{5}$$

d. h. für einen Balken von rechteckigem Querschnitt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3 P l^2}{4 E b h^3}, \tag{6}$$

während die Durchbiegung in der Mitte $\left(\xi = \frac{l}{2},\ x = \frac{l}{2}\right)$

$$\frac{P l^3}{48 E J} = \frac{P l^3}{4 E b h^3}$$

beträgt (vgl. Nr. 117).

120. Gleichförmig belasteter Balken auf zwei Stützen. Sei die Last pro Längeneinheit p, z. B. durch das eigene Gewicht, so sind die Stützdrucke $\frac{p l}{2}$ (vgl. Fig. 81).

An einer Stelle x wirkt infolge des Gewichts $p(l-x)$ des rechten Balkenteils, das wir uns in seinem Schwerpunkt angebracht denken dürfen, das Drehmoment $\frac{p(l-x)^2}{2}$ und infolge des Stützdrucks $-\frac{p l}{2}(l-x)$. Also lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$E J \frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{p}{2}(l-x) x. \tag{1}$$

Für $x = 0$ und $x = l$ muß $y = 0$ sein.

Dann ergibt die Integration

$$y = \frac{p x}{24 E J}(l-x)\left\{l^2 + x(l-x)\right\}. \tag{2}$$

Fig. 81.

Liegen die Stützen nicht an den Endpunkten, so lassen sich für die einzelnen Teile des Balkens in ganz analoger Weise die Differentialgleichungen aufstellen und integrieren.

Das Problem des durchlaufenden Trägers, d. h. eines Balkens auf mehr als zwei Stützen, findet sich — analytisch und graphisch — behandelt bei Love[1]).

Die Verlängerung eines auf zwei Stützen liegenden, durch sein Eigengewicht gebogenen Balkens ergibt sich als

$$\int (ds - dx) = \int \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1 \right\} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \tag{3}$$

genähert.

Durch Einsetzen der für $\frac{dy}{dx}$ gefundenen Werte folgt, daß diese Verlängerung ein Minimum ist, wenn die gleich weit von der

1) A. E. H. Love, *Lehrbuch d. Elastizität*, deutsch von A. Timpe, Leipzig und Berlin 1907, S. 426 ff.

Mitte entfernten Stützen einen Abstand voneinander haben, der 0,55938 der Länge des Stabes ist.[1]) Diese Ableitung hat Interesse für die Invarianz des Normalmeters. Außer der Lage der Stützpunkte ist es wesentlich, daß $\frac{p}{EJ}$ einen möglichst kleinen Wert hat, d. h. das Material muß cet. par. einen möglichst kleinen Quotienten des spezifischen Gewichts zum Elastizitätskoeffizienten haben, und die Form des Stabes muß so gewählt sein, daß der Querschnitt möglichst klein ist bei möglichst großem Trägheitsmoment desselben bezüglich der durch den Schwerpunkt gehenden Horizontalen (vgl. Nr. 1).

121. Theorie der Elastika[2]). Die Frage, welche Form ein dünner, im ungespannten Zustande gerader prismatischer Stab annimmt, der nur an den Enden von Kräften und Drehmomenten angegriffen wird, ist deshalb von Interesse, weil es sich zeigt, daß eine kritische Länge existiert. Ist der Stab kürzer, so wird er einfach durch die Last am Ende zusammengedrückt, ist er länger, so biegt er sich. Hier kommen Fragen der Stabilität beim Gleichgewicht elastischer Körper zur Anwendung.

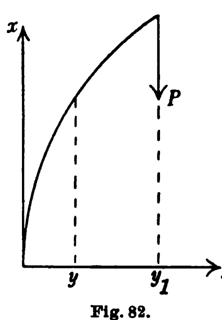


Fig. 82.

Bezeichnet φ den Winkel, den die Kurve mit der x-Achse bildet (vgl. Fig. 82), so lautet die Gleichgewichtsbedingung nach Nr. 118 (4)

$$E \cdot J \frac{d\varphi}{ds} = P(y_1 - y). \tag{1}$$

Durch Differentiation nach s erhalten wir

$$EJ \frac{d^2\varphi}{ds^2} = - P \sin\varphi. \tag{2}$$

Gleichung (2) ist genau analog der Pendelgleichung, sie läßt sich also wie diese durch elliptische Funktionen integrieren (vgl.

1) Vgl. F. W. Bessel, *Abhandlungen*, 3, Leipzig 1876, S. 275; *Darstellung der Untersuchungen und Maßregeln, welche in den Jahren 1835—1838 durch die Einheit des preußischen Längenmaßes veranlaßt worden sind,* Berlin 1839, Beilage 1. Bessel leitete die Formeln ab, indem er die aus zwei Summanden bestehende potentielle Energie, nämlich die der Schwere und die der elastischen Deformation nach den Prinzipien der Variationsrechnung zu einem Minimum machte.

2) L. Euler, Additamentum *„De curvis elasticis"* im Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Lausanne 1744.

Nr. 50). Ein Integral von (2) ist

$$\frac{EJ}{2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - P\cos\varphi = \text{Konst.} \tag{3}$$

Es sind, wie bei der Theorie des Pendels, zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich ob $\frac{d\varphi}{ds}$ Null werden kann oder nicht. Wir nehmen an, $\frac{d\varphi}{ds}$ kann Null werden, d. h. die Kurve hat Wendepunkte. In diesen hat φ den größten Wert α; dann lautet (3)

$$\frac{EJ}{2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + P(\cos\alpha - \cos\varphi) = 0. \tag{4}$$

Setzen wir

$$u = s\sqrt{\frac{P}{EJ}}, \qquad k = \sin\frac{\alpha}{2}, \tag{5}$$

so wird

$$\frac{d\varphi}{du} = 2k\,\mathrm{cn}(u+K), \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = k\,\mathrm{sn}(u+K). \tag{6}$$

Hier ist s von einem Wendepunkt an gerechnet. K bedeutet das vollständige elliptische Integral erster Gattung mod k.

Aus $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$, $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$ folgt

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{EJ}{P}}\left[-u + 2\left\{T\,\mathrm{am}(u+K) - T\,\mathrm{am}\,K\right\}\right] \\ y &= -2k\sqrt{\frac{EJ}{P}}\,\mathrm{cn}(u+K), \end{aligned} \tag{7}$$

wo $T\cdot \mathrm{am}\,u = \int\limits_0^u dn^2 u\cdot du$ das elliptische Integral zweiter Gattung bedeutet. (Gewöhnlich bezeichnet man das Integral zweiter Gattung mit E. Wir haben den Buchstaben T gewählt, um Verwechslungen mit dem Elastizitätskoeffizienten zu vermeiden.)

Ist α nicht zu groß, so hat die Kurve die Form einer Sinuslinie, in die sie für sehr kleine α übergeht.[1]) Denn da φ immer kleiner als α ist, darf man in diesem Grenzfall in (2) $\sin\varphi$ durch

---

1) A. E. H. Love, *Lehrbuch d. Elastizität*, deutsch von A. Timpe, Leipzig u. Berlin 1907, S. 465 gibt eine Reihe von Abbildungen für die Elastika bei verschiedenen Werten von α. Er behandelt auch den Fall, daß keine Wendepunkte auftreten, und das Knicken eines langen dünnen Stabes unter einer vertikalen Last.

φ ersetzen und erhält

$$y = \alpha \sqrt{\frac{EJ}{P}} \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right). \tag{8}$$

Zwei aufeinanderfolgende Wendepunkte haben den Abstand $\pi\sqrt{\frac{EJ}{P}}$ voneinander; der Stab nimmt also die Form von Fig. 83 an, falls die Länge $l > \pi\sqrt{\frac{EJ}{P}}$ ist.

Fig. 83.

Fig. 84.

Ein unten parallel der Angriffskraft festgehaltener Stab der Länge l nimmt die Form an (vgl. Fig. 84)

$$y = y_1\left[1 - \frac{\sin\sqrt{\frac{P}{EJ}}(l-x)}{\sin l\sqrt{\frac{P}{EJ}}}\right]. \tag{9}$$

Hier ist $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = 0$, wenn

$$l = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{EJ}{P}} \text{ ist.}$$

Ist der Stab etwas kürzer als diese kritische Länge, so wird er einfach zusammengedrückt, ist er etwas länger, so wird er gebogen, denn die potentielle Energie des gebogenen Stabes ist kleiner [1]) als die des zusammengedrückten und daher instabilen, falls $l > \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{EJ}{P}}$ ist.

122. Elastizität von Kristallen. Die elastischen Eigenschaften von Kristallen sollen nur ganz kurz berührt werden. Zur näheren Orientierung verweisen wir besonders auf das Voigtsche Lehrbuch. [2])

Wir hatten bereits in Nr. **103** gesehen, wie man bei Kristallen die Symmetrieverhältnisse heranziehen kann, um über die Koeffizienten in dem Ausdrucke für die elastische Energie etwas auszusagen. Dadurch verminderte sich die Anzahl der elastischen Konstanten, die im allgemeinen 21 beträgt, mehr oder weniger.

123. Allseitig wirkende Druckkraft. Auf die Flächeneinheit wirke normal nach außen der konstante Zug P. Dann genügen wir den Gleichgewichtsbedingungen genau wie bei isotropen Körpern (vgl. Nr. **106**), indem wir das Druckellipsoid als

1) A. E. H. Love l. c. S. 467.

2) W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik),* Leipzig u. Berlin 1910.

Kugel annehmen, also

$$\Pi_{yz} = \Pi_{zx} = \Pi_{xy} = 0$$

und

$$\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = \Pi_{zz} = P \tag{1}$$

setzen.

Durch Auflösung der Gleichungen Nr. **103** (5) nach den x_x, y_y usw. folgt dann, daß die Deformationen der verschiedenen Richtungen im allgemeinen keineswegs gleich sind. Ein rhombischer Kristall z. B., der Kugelform besitzt, wird im Piezometer zu einem dreiaxigen Ellipsoid.

Für reguläre Kristalle, für die der Energieausdruck Nr. **103** (13) gilt, lauten die Beziehungen zwischen den Spannungen und Deformationen z. B.

$$\begin{aligned} P &= a_{11} x_x + a_{12}(y_y + z_z) = (a_{11} - a_{12}) x_x + a_{12} \Theta \\ P &= a_{11} y_y + a_{12}(x_x + z_z) = (a_{11} - a_{12}) y_y + a_{12} \Theta \\ P &= a_{11} z_z + a_{12}(x_x + y_y) = (a_{11} - a_{12}) z_z + a_{12} \Theta, \\ 0 &= y_z = z_x = x_y, \end{aligned} \tag{2}$$

wenn

$$\Theta = x_x + y_y + z_z \tag{3}$$

wie früher die Dilatation der Volumeinheit bedeutet.

Durch Addition der Gleichungen (2) ergibt sich die Kompressibilität

$$\frac{\Theta}{P} = \frac{3}{a_{11} + 2a_{12}}. \tag{4}$$

Durch Subtraktion je zweier Gleichungen (2) voneinander folgt

$$x_x = y_y = z_z = \frac{\Theta}{3} = \frac{P}{a_{11} + 2a_{12}}. \tag{5}$$

Durch diese Gleichung, zusammen mit der vierten Gleichung (2), sind die Deformationen bestimmt. Diese sind nach den Gleichungen Nr. **101** (10) in allen Richtungen identisch.

124. Zug an den Endflächen eines Prismas. Aus einem regulären Kristall, auf den wir unsere Betrachtungen beschränken wollen, sei ein rechtwinkliges Prisma in beliebiger Richtung ausgeschnitten, und es wirke ein Zug P auf die Stirnflächen des Prismas, deren Normale wir zur z'-Richtung machen, während die kristallographischen Hauptachsen nach wie vor x, y, z heißen mögen. Dann setzen wir, wie bei isotropen Medien (vgl. Nr. **107**), alle Π außer $\Pi_{z'z'}$ gleich Null und

$$\Pi_{z'z'} = P. \tag{1}$$

Da sich die Spannungen als Tensoren gerade so wie die Deformationsgrößen transformieren, so folgt aus Nr. 101 (11)

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} &= \alpha_3^2 P & \Pi_{yz} &= \beta_3 \gamma_3 P \\ \Pi_{yy} &= \beta_3^2 P & \Pi_{zx} &= \gamma_3 \alpha_3 P \\ \Pi_{zz} &= \gamma_3^2 P & \Pi_{xy} &= \alpha_3 \beta_3 P. \end{aligned} \tag{2}$$

Aus den Gleichungen Nr. 103 (5) zusammen mit dem Ausdruck für ω (Nr. 103 (13)) ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} &= \alpha_3^2 P = a_{11} x_x + a_{12}(y_y + z_z) = (a_{11} - a_{12}) x_x + a_{12}\Theta \\ \Pi_{yy} &= \beta_3^2 P = a_{11} y_y + a_{12}(z_z + x_x) = (a_{11} - a_{12}) y_y + a_{12}\Theta \\ \Pi_{zz} &= \gamma_3^2 P = a_{11} z_z + a_{12}(x_x + y_y) = (a_{11} - a_{12}) z_z + a_{12}\Theta \\ 2\Pi_{yz} &= 2\beta_3\gamma_3 P = a_{44} y_z \\ 2\Pi_{zx} &= 2\gamma_3\alpha_3 P = a_{44} z_x \\ 2\Pi_{xy} &= 2\alpha_3\beta_3 P = a_{44} x_y . \end{aligned} \tag{3}$$

Durch Addition der ersten drei Gleichungen (3) erhält man für Θ den Wert

$$(a_{11} + 2a_{12})\Theta = P. \tag{4}$$

Substituiert man diesen Wert in die ersten drei Gleichungen (3), so erhält man

$$\begin{aligned} x_x &= \frac{P}{a_{11} - a_{12}}\left(\alpha_3^2 - \frac{a_{12}}{a_{11} + 2a_{12}}\right) \\ y_y &= \frac{P}{a_{11} - a_{12}}\left(\beta_3^2 - \frac{a_{12}}{a_{11} + 2a_{12}}\right) \\ z_z &= \frac{P}{a_{11} - a_{12}}\left(\gamma_3^2 - \frac{a_{12}}{a_{11} + 2a_{12}}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

während die drei letzten Gleichungen (3)

$$\begin{aligned} y_z &= \frac{2\beta_3\gamma_3 P}{a_{44}} \\ z_x &= \frac{2\gamma_3\alpha_3 P}{a_{44}} \\ x_y &= \frac{2\alpha_3\beta_3 P}{a_{44}} \end{aligned} \tag{6}$$

liefern.

Aus diesen Dehnungen und Gleitungen in Richtung der kristallographischen Hauptachsen erhält man die Dehnung $z'_{z'}$ in der Zugrichtung nach Nr. 101 (10).

Es wird

$$
\begin{aligned}
z_{z'}' = & \frac{P}{a_{11}-a_{12}}\left(\alpha_3^4+\beta_3^4+\gamma_3^4-\frac{a_{12}}{a_{11}+2a_{12}}\right) \\
& + \frac{4P}{a_{44}}(\beta_3^2\gamma_3^2+\gamma_3^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\beta_3^2).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Da man aber aus der Beziehung $\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1$ durch Quadrieren die Gleichung

$$
2(\beta_3^2\gamma_3^2+\gamma_3^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\beta_3^2) = 1-(\alpha_3^4+\beta_3^4+\gamma_3^4)
$$

erhält, so geht (7) über in

$$
\begin{aligned}
z_{z'}' = & P(\alpha_3^4+\beta_3^4+\gamma_3^4)\left(\frac{1}{a_{11}-a_{12}}-\frac{2}{a_{44}}\right) \\
& + P\left(\frac{2}{a_{44}}-\frac{a_{12}}{(a_{11}-a_{12})(a_{11}+2a_{12})}\right).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Nennt man das Verhältnis des Zuges zur Dehnung in Richtung des Zuges den Elastizitätskoeffizienten E der betreffenden Richtung, so ist

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{E} = & (\alpha_3^4+\beta_3^4+\gamma_3^4)\left(\frac{1}{a_{11}-a_{12}}-\frac{2}{a_{44}}\right) \\
& + \left(\frac{2}{a_{44}}-\frac{a_{12}}{(a_{11}-a_{12})(a_{11}+2a_{12})}\right).
\end{aligned} \tag{9}
$$

Die Richtung der z'-Achse läßt sich nun relativ zu den kristallographischen Achsen durch die Kugelkoordinaten ϑ, φ festlegen, indem wir

$$
\alpha_3 = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \beta_3 = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\vartheta
$$

setzen.

Führen wir diese Werte in (9) ein, so können wir durch Differentiation nach φ entscheiden, in welchen Azimuten E einen Grenzwert besitzt. Wir erhalten als Resultat:

$$
\text{I: } \sin\varphi = 0, \quad \text{II: } \cos\varphi = 0, \quad \text{III: } \operatorname{tg}^2\varphi = 1.
$$

In den Fällen I und II hat E als Funktion von ϑ einen Grenzwert für

$$
\text{a) } \sin\vartheta = 0, \quad \text{b) } \cos\vartheta = 0, \quad \text{c) } \operatorname{tg}^2\vartheta = 1,
$$

während im Falle III die Grenzwerte für

$$
\text{a) } \sin\vartheta = 0, \quad \text{b) } \cos\vartheta = 0, \quad \text{c) } \operatorname{tg}^2\vartheta = 2
$$

stattfinden.

Die Richtungen $\sin\vartheta = 0$; $\cos\vartheta = 0$, $\sin\varphi = 0$ und $\cos\vartheta = 0$, $\cos\varphi = 0$ stellen aber die Normalen eines Würfels dar, dessen Flächen senkrecht auf den kristallographischen Hauptachsen stehen;

$\cos\varphi = 0$, $\operatorname{tg}^2\vartheta = 1$; $\sin\varphi = 0$, $\operatorname{tg}^2\vartheta = 1$ und $\operatorname{tg}^2\varphi = 1$, $\cos\vartheta = 0$ sind die Normalen einer sogenannten Granatoederfläche; $\operatorname{tg}^2\varphi = 1$, $\operatorname{tg}^2\vartheta = 2$ die Normalen einer Oktaederfläche.

In diesen ausgezeichneten Richtungen mögen die Elastizitätskoeffizienten E_w, E_g, E_o heißen. Dann ist nach (9)

$$\begin{aligned}\frac{1}{E_w} &= \frac{a_{11}+a_{12}}{(a_{11}-a_{12})(a_{11}+2a_{12})}\\ \frac{1}{E_g} &= \frac{a_{11}}{2(a_{11}-a_{12})(a_{11}+2a_{12})}+\frac{1}{a_{44}}\\ \frac{1}{E_o} &= \frac{a_{11}-a_{12}}{3(a_{11}-a_{12})(a_{11}+2a_{12})}+\frac{4}{3\cdot a_{44}}.\end{aligned} \tag{10}$$

Diese Größen sind jedoch nicht voneinander unabhängig, sondern es existiert zwischen ihnen die Relation

$$\frac{1}{E_w}+\frac{3}{E_o}=\frac{4}{E_g}, \tag{11}$$

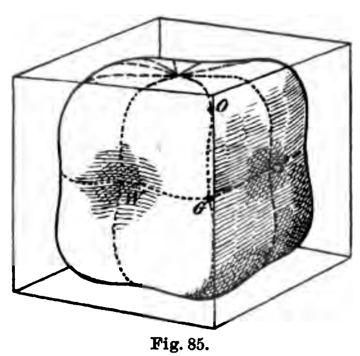


Fig. 85.

so daß man nicht in der Lage ist, aus E_w, E_g und E_o die Konstanten a_{11}, a_{12} und a_{44} zu bestimmen, sondern noch etwa Piezometerbeobachtungen hinzunehmen muß.

Trägt man von einem festen Punkt aus nach allen Richtungen Vektoren ab, deren Größe gleich dem reziproken Elastizitätsmodul $\frac{1}{E}$ ist, so liegen die Endpunkte der Vektoren auf einer Fläche, die in Fig. 85 dargestellt ist, d. i. ein Würfel mit abgerundeten Ecken und Kanten und eingedrückten Flächen.[1])

Kapitel III.

Dynamische Probleme der Elastizitätstheorie.

125. Schwingungen in einem homogenen Medium. Nach Nr. **104** (5) resp. (8) genügen die Verschiebungskomponenten kleiner Schwingungen, wenn keine äußeren Kräfte wirken, den Gleichungen

$$\varrho\ddot{\mathfrak{u}} = \frac{a_{11}-a_{12}}{2}\Delta\mathfrak{u} + \frac{a_{11}+a_{12}}{2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{u} \tag{1}$$

1) Diese Figur ist F. Auerbach, *Physik in graphischen Darstellungen*, Leipzig und Berlin 1912, S. 30 entnommen.

oder

$$\varrho \ddot{\mathfrak{u}} = a_{11} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} - \frac{a_{11} - a_{12}}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u}. \tag{2}$$

$\mathfrak{u}$ läßt sich in zwei Summanden zerlegen,

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2, \tag{3}$$

von denen $\mathfrak{u}_1$ den Gleichungen

$$\varrho \ddot{\mathfrak{u}}_1 = \frac{a_{11} - a_{12}}{2} \Delta \mathfrak{u}_1 \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{u}_1 = 0 \tag{5}$$

und $\mathfrak{u}_2$ den Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{u}_2 = 0, \tag{6}$$

also

$$\mathfrak{u}_2 = - \operatorname{grad} \varphi \tag{6'}$$

und

$$\varrho \ddot{\varphi} = a_{11} \Delta \varphi \tag{7}$$

zu genügen haben.

Es bestehen also zwei voneinander unabhängige Wellen, von denen die erste $\mathfrak{u}_1$ als Scherungswelle, die andere $\mathfrak{u}_2$ als Verdichtungswelle bezeichnet werden kann, da nur bei dieser Volumänderungen auftreten. In inkompressiblen Medien existiert nur $\mathfrak{u}_1$.

Setzen wir

$$\operatorname{rot} \mathfrak{u}_1 = 2\mathfrak{w},$$

so ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = 0, \tag{8}$$

also nach Nr. **100** (5) $\mathfrak{w}$ der Vektor, der die Rotation des Volumelements darstellt, und zwar genügt auch $\mathfrak{w}$ der Gleichung

$$\varrho \ddot{\mathfrak{w}} = \frac{a_{11} - a_{12}}{2} \Delta \mathfrak{w}. \tag{9}$$

Die Zerlegung von $\mathfrak{u}$ in die Summanden $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ ist nach Nr. **99** eindeutig.

126. Ebene Wellen. Um die Form der Ausbreitung kennen zu lernen, betrachten wir zunächst ein isotropes homogenes Medium, in welchem der Erregungszustand außer von der Zeit nur von der Koordinate z abhängt. Jede zur xy-Ebene parallele Ebene heißt dann eine Wellenebene.

Aus Nr. **125** (5) folgt in diesem Falle, daß $\mathfrak{u}_{1z}$ konstant sein muß, d. h. daß die durch $\mathfrak{u}_1$ dargestellte Bewegung eine *transversale* ist. In inkompressiblen Medien sind also nur Transversalwellen möglich.

Nach Nr. **125** (4) wird, wenn wir

$$\sqrt{\frac{a_{11} - a_{12}}{2\varrho}} = v \tag{1}$$

oder nach Nr. **103** (20)

$$v = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\varrho}} \tag{2}$$

setzen,

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_{1x}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_{1x}}{\partial z^2}. \tag{3}$$

Dieselbe Gleichung erhalten wir für $\mathfrak{u}_{1y}$.

Das allgemeinste Integral von (3) ist nach d'Alembert, wie man durch Differentiation sofort verifizieren kann,

$$\mathfrak{u}_{1x} = f_1(z - vt) + f_2(z + vt), \tag{4}$$

wo f_1 und f_2 ganz willkürliche Funktionen sind. (4) sagt aus, daß $\mathfrak{u}_{1x}$ aus der Summe zweier Bewegungen besteht, von denen die eine sich mit der Geschwindigkeit v in Richtung der positiven z-Achse fortpflanzt, die andere mit derselben Geschwindigkeit in der entgegengesetzten Richtung (vgl. Nr. **83**).

Den einfachsten Fall haben wir vor uns, wenn $f_2 = 0$, f_1 eine einfach harmonische Funktion der Zeit ist. Dann ist nämlich

$$\mathfrak{u}_{1x} = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \alpha\right)\cdot \tag{5}$$

wo $\lambda/T = v$ ist.

Da der Zustand nur von z abhängen soll, so existiert nach Nr. **125** (6') nur die z-Komponente von $\mathfrak{u}_2$. $\mathfrak{u}_2$ stellt also eine *Longitudinalschwingung* dar. Die Bewegung $\mathfrak{u}_2$ ist ein Vektor, dessen Komponenten sich als partielle Differentialquotienten einer Funktion φ nach den entsprechenden Koordinaten darstellen. Man nennt φ das Potential der Bewegung.

Da φ nach Nr. **125** (7) einer ganz analogen Gleichung wie $\mathfrak{u}_1$ genügen muß, und somit auch ein der Gleichung (4) entsprechendes Integral hat, so folgt, daß φ und damit auch $\mathfrak{u}_2$ sich in ebenen Wellen ausbreiten, deren Geschwindigkeit (vgl. Nr. **103** (20))

$$v' = \sqrt{\frac{a_{11}}{\varrho}} = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)\varrho}} \tag{6}$$

beträgt.

127. Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Da $\mathfrak{u}_1$ und φ beide einer Gleichung der Form

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \Delta U \tag{1}$$

genügen, so wollen wir mit Poisson[1]) das Integral dieser Gleichung und der Anfangsbedingungen

$$\text{für } t = 0 \qquad U = f(x, y, z) \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(x, y, z) \tag{3}$$

diskutieren.

Setzen wir

$$\frac{r}{4\pi}\int f(x, y, z)\, d\omega = \varphi(r), \quad \frac{r}{4\pi}\int F(x,y,z)\, d\omega = \Phi(r), \tag{4}$$

wo $r^2 d\omega$ das Element einer Kugel vom Radius r bedeutet, die den Aufpunkt p zum Zentrum hat, so ergibt sich das Integral[2])

$$U(p) = \varphi'(vt) + \frac{1}{v}\,\Phi(vt). \tag{5}$$

Da aber nach (4) φ und Φ nur abhängig sind von den Mittelwerten, die f und F und ihre Differentialquotienten auf einer um p mit dem Radius vt beschriebenen Kugelfläche haben, so folgt: *Die Störung breitet sich nach allen Seiten mit der Geschwindigkeit v aus.*[3])

128. Theorie der schwingenden Saite. Eine Saite von der Länge l, auf die keine äußeren Kräfte wirken, sei durch den Zug p gespannt, so daß sie in der Gleichgewichtslage geradlinig sei.

Wir wählen die Richtung der Längserstreckung der Saite zur x-Achse, den einen Endpunkt zum Anfangspunkt des Koordinatensystems.

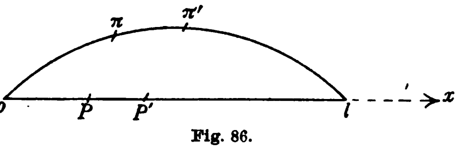


Fig. 86.

Ein Punkt $P(x, 0, 0)$ erleide die Verschiebung $\overline{P\pi}$ (vgl. Fig. 86) mit den Komponenten $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$; dann hat er nach der Verschiebung die Koordinaten $x + \mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$. Ein benachbarter Punkt $P'(x + dx, 0, 0)$ erfahre die Verschiebung $\overline{P'\pi'}(\mathfrak{u}_x + d\mathfrak{u}_x,\ \mathfrak{u}_y + d\mathfrak{u}_y,$

1) Poisson, *Mém. de l'institut* 3; „Mém. sur la théorie du son", *Journ. de l'école polytechn.* 7, 1807.

2) H. Weber-Riemann, *Partielle Differentialgleichungen d. math. Physik,* 5. Aufl., 2, 1912, S. 299.

3) Weitere Ableitungen des Integrals nach anderen Methoden findet man bei R. Riemann, *Vorlesungen,* 3. Aufl., S. 300; G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mechanik,* 4. Aufl., 1897, S. 313 und *Journ. de math.* (Liouville) 1856.

$\mathfrak{u}_z + d\mathfrak{u}_z$). Dann ist die Bogenlänge $\pi\pi'$

$$ds = \sqrt{[(x + dx + \mathfrak{u}_x + d\mathfrak{u}_x) - (x + \mathfrak{u}_x)]^2 + d\mathfrak{u}_y^2 + d\mathfrak{u}_z^2} \quad (1)$$

oder wenn wir $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$, die Funktionen von x sind, und ihre Differentialquotienten nach x als unendlich kleine Größen betrachten, so wird

$$ds = dx\left(1 + \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x}\right). \quad (2)$$

Die Richtungskosinus von ds sind mit demselben Grade der Annäherung

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{dx + d\mathfrak{u}_x}{ds} = 1 \\ \cos\beta &= \frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial s} = \frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial x} \\ \cos\gamma &= \frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial s} = \frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3)$$

In den Punkten π und π' des Elements wirkt aber außer der äußeren Spannung p noch infolge der Dehnung die elastische Spannung $E\frac{\Delta l}{l} = E\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x}$ nach (2), so daß in π die Kraftkomponenten

$$\begin{aligned} &-q\left(p + E\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x}\right)\cos\alpha \\ &-q\left(p + E\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x}\right)\cos\beta \\ &-q\left(p + E\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x}\right)\cos\gamma \end{aligned}$$

oder genähert (vgl. (3))

$$\mathfrak{F}_x = -q\left(p + E\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x}\right), \quad \mathfrak{F}_y = -qp\frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial x}, \quad \mathfrak{F}_z = -qp\frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial x} \quad (4)$$

lauten, wenn q den Querschnitt der Saite bedeutet.

In π' wirkt eine ganz analoge Kraft; nur ist das Vorzeichen das entgegengesetzte, und es sind alle Größen für das Argument $x + dx$ zu nehmen, d. h. dort wirkt, wenn wir nach dem Taylorschen Satze entwickeln,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_x' &= q\left(p + E\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[q\left(p + E\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x}\right)\right]dx \\ \mathfrak{F}_y' &= qp\frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(qp\frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial x}\right)dx \\ \mathfrak{F}_z' &= qp\frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(qp\frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial x}\right)dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Nun ist qp als Gesamtkraft (d. i. das Gewicht, durch das die Saite gespannt ist) von x unabhängig, also wirkt auf ds eine Kraft mit den Komponenten

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_x' + \mathfrak{F}_x &= Eq \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_x}{\partial x^2} dx \\ \mathfrak{F}_y' + \mathfrak{F}_y &= qp \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_y}{\partial x^2} dx \\ \mathfrak{F}_z' + \mathfrak{F}_z &= qp \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_z}{\partial x^2} dx. \end{aligned} \tag{6}$$

Die erste dieser drei Gleichungen gilt nur unter der Voraussetzung, daß der Querschnitt konstant ist.

Nach den Newtonschen Bewegungsgleichungen ist also, wenn ϱ die Dichte der Saite bezeichnet,

$$\varrho q \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_x}{\partial t^2} dx = Eq \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_x}{\partial x^2} dx \tag{7}$$

oder

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_x}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho} \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_x}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Ebenso erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_y}{\partial t^2} &= \frac{p}{\varrho} \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_z}{\partial t^2} &= \frac{p}{\varrho} \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_z}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Gleichung (8) stellt die Longitudinalschwingungen, die Gleichungen (9) die Transversalschwingungen dar, die also, da die Gleichungen nicht simultan sind, unabhängig voneinander bestehen können.

Nach Nr. 126 pflanzen sich die ersteren mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{E}{\varrho}}$, die letzteren mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{p}{\varrho}}$ fort.

Wir können die Gleichungen (8) und (9) in der gemeinsamen Form der Differentialgleichung der schwingenden Saite

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{10}$$

zusammenfassen.

Zur Integration dieser Gleichung sind des weiteren noch die Grenz- und Anfangsbedingungen zu beachten

$$\begin{aligned} &\text{für } x = 0: \quad U = 0 \\ &\quad\,\text{„} \quad x = l: \quad U = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\text{für } t = 0 \text{ und } 0 < x < l: \quad U = f(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t} = F(x), \tag{12}$$

welche aussagen, daß die Enden fest sind, und daß zu Beginn der Bewegung jeder Punkt der Saite eine gegebene Lage und eine gegebene Geschwindigkeit besitzt. Es ist zu betonen, daß f und F nur in dem Intervall $0 < x < l$ gegeben sind.

Abgesehen von den Grenzbedingungen (11) haben wir das Integral bereits in Nr. **126** (4) angegeben. Es lautet mit Beachtung von (12)

$$U = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} F(x)\,dx. \tag{13}$$

Um (11) zu befriedigen, setzen wir f und F über ihren Definitionsbereich fort, indem wir

$$f(-x) = -f(x), \quad F(-x) = -F(x) \tag{14}$$

ansetzen. Dadurch ist die erste Bedingung (11) befriedigt. Der zweiten Bedingung (11) wird genügt durch

$$f(l+x) = -f(l-x), \quad F(l+x) = -F(l-x). \tag{15}$$

Durch (14) und (15) sind f und F für alle Argumentwerte definiert, denn es folgt

$$f(2l+x) = f(x), \quad F(2l+x) = F(x). \tag{16}$$

Bevor wir die Lösung diskutieren, wollen wir die Fouriersche Integrationsmethode kennen lernen, weil aus ihr unmittelbar Aufschluß über die möglichen Elementarschwingungen gegeben wird. Es ist das die Methode der partikularen Integrale.

Wir versuchen, ein partikulares Integral von U zu finden, indem wir

$$U = T \cdot X \tag{17}$$

ansetzen, wo T eine reine Funktion von t, X eine reine Funktion von x ist; dann muß nach (10)

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{c^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2} \tag{18}$$

sein, und das ist nur möglich, wenn beide Seiten gleich ein und derselben Konstanten sind, die wir $-\nu^2$ nennen wollen.

Dann ergibt sich

$$T = \cos \nu t \text{ oder } \sin \nu t$$

$$X = \cos \frac{\nu x}{c} \text{ oder } \sin \frac{\nu x}{c}.$$

Wir genügen den Bedingungen (11), wenn wir $\cos \frac{\nu x}{c}$ fortlassen und ν so bestimmen, daß $\frac{\nu l}{c} = m\pi$ ist, wo m eine beliebige ganze Zahl ist.

Wir bekommen also das allgemeinste Integral in der Form

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cos \frac{m\pi c}{l} t + B_m \sin \frac{m\pi c}{l} t\right) \sin \frac{m\pi}{l} x. \qquad (19)$$

Jeder Wert m stellt eine zeitlich periodische Elementarschwingung dar. Die Schwingungszahl ist gegeben durch

$$n_m = \frac{1}{T_m} = \frac{mc}{2l}. \qquad (20)$$

Für Longitudinalschwingungen ist

$$n_m = \frac{m}{2l} \sqrt{\frac{E}{\varrho}}, \qquad (20')$$

für Transversalschwingungen, die bei Musikinstrumenten allein in Frage kommen (wenn wir das Quietschen der Anfänger beim Violinspielen nicht berücksichtigen),

$$n_m = \frac{m}{2l} \sqrt{\frac{p}{\varrho}}. \qquad (20'')$$

Der tiefste Ton der Saite, der Grundton, wird erhalten für $m = 1$. Dieser Ton ist um so höher, je kürzer die Saite, je größer die Spannung und je kleiner die Dichte und damit das Gewicht der Längeneinheit der Saite ist.

Um tiefe Töne herzustellen, umspinnt man die Saite mit dünnem Metalldraht (Vergrößerung von ϱ). Man stimmt die Saite durch Änderung von p mittels Wirbel am Instrument (wobei allerdings auch ϱ ein wenig verändert wird), und man erhöht den Ton beim Spielen durch Verkürzung von l, indem man den Finger auf eine Stelle des Griffbretts fest aufdrückt und dadurch ein künstliches Ende der Saite herstellt.

Außer der Grundschwingung $m = 1$ treten noch Oberschwingungen auf; $m = 2$ ist die erste, $m + 1$ die m^{te} Oberschwingung. Diese Oberschwingungen heißen harmonische Obertöne, da ihre Schwingungszahlen im Verhältnis der ganzen Zahlen stehen.

$m = 2$ gibt die Oktave des Grundtons, $m = 3$ die Quinte der Oktave, $m = 4$ die zweite Oktave, $m = 5$ die große Terz der zweiten Oktave usw.

(19) ergibt ferner, daß an den Stellen $x = \frac{l}{m}, \frac{2l}{m}, \ldots, \frac{(m-1)l}{m}$ dauernd keine Bewegung der betreffenden Oberschwingung auftritt. Diese $m - 1$ Punkte heißen die *Knotenpunkte* der $m - 1^{\text{ten}}$ Oberschwingung. Die Grundschwingung und die beiden ersten Oberschwingungen sind für einen bestimmten Moment in den Figuren 87—89 dargestellt.

$m=1$

Fig. 87.

$m=2$

Fig. 88.

$m=3$

Fig. 89.

Den Bedingungen (12) kann man durch geeignete Bestimmung der A_m und B_m genügen.

Es muß sein

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{l} x \\ F(x) &= \frac{\pi c}{l} \sum_{m=1}^{\infty} m B_m \sin \frac{m\pi}{l} x. \end{aligned} \tag{21}$$

Auf Grund der Koeffizientenbestimmung der Fourierschen Reihe (vgl. Nr. 79) folgt

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx \\ B_m &= \frac{2}{\pi c m} \int_0^l F(x) \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx. \end{aligned} \tag{22}$$

129. Die gezupfte Saite. Bei manchen Saiteninstrumenten wird die Saite durch Zupfen in Bewegung gesetzt, wie z. B. bei der Zither, der Guitarre und der Harfe. Genähert können wir die sich hierbei abspielenden Vorgänge beschreiben, wenn wir an-

nehmen, daß zur Anfangszeit die Saite die Form der nebenstehenden Figur hat, d. h. daß sie aus zwei geradlinigen Stücken besteht, die in einer scharfen Ecke aneinanderstoßen, und zwar möge die Saite in diesem Zustande anfänglich in Ruhe sein.

Fig. 90.

Wir diskutieren die Bewegung der Saite zuerst auf Grund des von d'Alembert herrührenden Integrals, um die allgemeine Form der Saite zu jeder Zeit zu erkennen; dann aber ziehen wir auch die Fouriersche Methode heran, um zu erfahren, welche Obertöne auftreten können.

Aus Nr. 128 (13) ergibt sich, da

$$F = 0$$

ist,

Fig. 91.

$$U = \tfrac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)]. \tag{1}$$

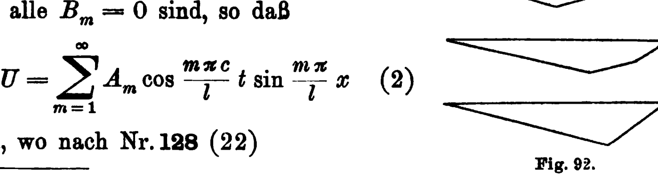
Wegen der in Nr. 128 diskutierten Fortsetzung der Funktion f (vgl. (14) bis (16)) hat f die in Fig. 91 dargestellte Form.

Denken wir uns diese Figur im halben Ordinatenmaßstab gezeichnet, so besteht die Wellenbewegung nach (1) aus einem Forteilen der Figur mit der Geschwindigkeit c sowohl nach rechts als auch nach links. Um den augenblicklichen Zustand zu erhalten, hat man in jedem Moment die Ordinaten der beiden Wellenzüge zu addieren.

Die Formen der Saite, die auf diese Weise entstehen, sind durch die nebenstehenden Figuren 92 dargestellt.[1])

U läßt sich ferner nach Nr. 128 (19) darstellen, wobei zu berücksichtigen ist, daß nach der zweiten Gleichung Nr. 128 (22) alle $B_m = 0$ sind, so daß

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\frac{m\pi c}{l}\, t \sin\frac{m\pi}{l}\, x \tag{2}$$



wird, wo nach Nr. 128 (22)

Fig. 92.

1) Vgl. z. B. H. v. Helmholtz, *Vorlesungen über die mathematischen Prinzipien der Akustik*, Leipzig 1898, S. 116. Man verdankt die Methode Young, *Phil. Trans.* 1800.

$$A_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{m \pi x}{l} \, dx \tag{3}$$

bedeutet. Nun ist (vgl. Fig. 90)

$$\begin{aligned} 0 \leqq x \leqq a: \qquad & f(x) = \frac{xh}{a} \\ a \leqq x \leqq l: \qquad & f(x) = h \frac{l-x}{l-a}. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Ausführung der Quadratur unter Verwendung partieller Integration liefert das Resultat

$$A_m = \frac{2h}{\pi^2 m^2} \sin \frac{\pi m a}{l} \cdot \left[\frac{l}{a} + \frac{l}{l-a}\right]; \tag{5}$$

das ist die Amplitude des $m - 1^{\text{ten}}$ Obertons.

Trägt man $\frac{l}{a} + \frac{l}{l-a}$ als Funktion von a auf, so erhält man das Bild der Fig. 93, d. h. die Amplitude wird, abgesehen von dem Einfluß des Faktors $\sin \frac{\pi m a}{l}$, um so größer, je näher dem Ende die Saite gezupft worden ist.

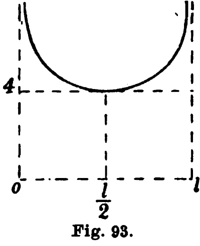


Fig. 93.

Ferner werden die Obertöne um so schwächer sein, je höher die Ordnungszahl ist, da die Amplitude dem Quadrat der Ordnungszahl umgekehrt proportional ist. Schließlich erscheint der Oberton überhaupt nicht, der an der Stelle $x = a$ einen Knoten hat, wegen des Faktors $\sin \frac{\pi m a}{l}$.[1]) Man wird demnach um so mehr Obertöne haben, je näher dem einen Ende die Erregung stattfindet.

130. Fortpflanzung von Unstetigkeiten; Bewegung von Violinsaiten. Christoffel[2]) hat Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten angestellt, die auch für das Problem der schwingenden Saite von Wichtigkeit sind.

1. *Die kinematische Bedingung.* Die Saite habe an einer bestimmten Stelle einen Knick. Vor dieser Unstetigkeitsstelle sei die Elongation der Saite U_1 genannt, hinter derselben U_2. Zur Zeit t sei die Abszisse der Unstetigkeitsstelle ξ (vgl. Fig. 94).

---

1) Diese Tatsache wurde zuerst von Young beobachtet.
2) Christoffel, *Annali di Mat.* 8, 1876

Wir nehmen an, daß sie mit der Geschwindigkeit γ in Richtung der x-Achse wandert. Drücken wir den Zuwachs, den die Ordinate der Unstetigkeitsstelle in der Zeit dt erfährt, auf zwei Weisen aus, indem wir diese Ordinate einmal durch U_1, das andere Mal durch U_2 bezeichnen, so erhalten wir

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} d\xi + \frac{\partial U_1}{\partial t} dt = \frac{\partial U_2}{\partial x} d\xi + \frac{\partial U_2}{\partial t} dt \quad (1)$$

oder

$$\gamma \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_1 = \gamma \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2 + \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_2, \quad (2)$$

Fig. 94.

d. h. die Kombination $\gamma \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t}$ erleidet beim Überschreiten des Unstetigkeitspunktes keinen Sprung.

2. *Die dynamische Bedingung.* Ein Linienelement $d\xi$, dessen Endpunkte zu verschiedenen Seiten der Unstetigkeitsstelle liegen, erfährt eine *endliche* y-Komponente der Kraft (vgl. Nr. **128** (6)), während die Unstetigkeitsstelle über dasselbe hinwegläuft, nämlich

$$\mathfrak{F}_y' + \mathfrak{F}_y = pq\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1\right].$$

Andrerseits erfährt das Teilchen beim Übergehen vom Teil 2 auf Teil 1 den Geschwindigkeitszuwachs

$$\Delta \mathfrak{u}_y = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_2,$$

so daß der Impulssatz der Mechanik $\mathfrak{F}_y dt = m \Delta \mathfrak{u}_y$ die Form

$$pq\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1\right] dt = \varrho q \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_2\right] d\xi \qquad (3)$$

annimmt. Hieraus folgt, wenn wir $\sqrt{\frac{p}{\varrho}} = c$ setzen,

$$c^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1 + \gamma \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_1 = c^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2 + \gamma \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_2. \qquad (4)$$

Also darf auch die Größe $c^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \gamma \frac{\partial U}{\partial t}$ an der Unstetigkeitsstelle keinen Sprung erleiden.

Bezeichnen wir

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1 = K, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_1 = Q,$$

so muß nach (2) und (4)

$$\begin{aligned} \gamma K + Q &= 0 \\ c^2 K + \gamma Q &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

sein. Aus (5) folgt

$$\gamma^2 = c^2, \quad \text{d. h.} \quad \gamma = \pm c. \tag{6}$$

Die Unstetigkeit wandert also mit derselben Geschwindigkeit vorwärts und rückwärts, mit der sich überhaupt Transversalerregungen auf der Saite fortpflanzen.

Des weiteren folgt aber aus (5)

$$\frac{Q}{K} = \mp c. \tag{7}$$

Nun können Q und K ihrer Bedeutung nach aber an irgendeiner Stelle zu irgendeiner Zeit willkürlich gegeben sein, brauchen also nicht der Bedingung (7) zu genügen. Dann muß die Unstetigkeitsstelle als aus zwei entstanden aufgefaßt werden, von denen sich die eine vorwärts, die andere rückwärts bewegt.

Es ist dann

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= K \qquad & Q_1 + Q_2 &= Q \\ cK_1 + Q_1 &= 0 \qquad & cK_2 - Q_2 &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

woraus sich K_1, K_2, Q_1, Q_2 eindeutig ergeben zu

$$K_1 = \frac{1}{2}\left(K - \frac{Q}{c}\right), \quad Q_1 = \frac{1}{2}(Q - cK)$$

$$K_2 = \frac{1}{2}\left(K + \frac{Q}{c}\right), \quad Q_2 = \frac{1}{2}(Q + cK).$$

Diese Untersuchungen wenden wir auf die Bewegung einer Violinsaite an.[1])

Ist U in x und in t linear, so ist der partiellen Differentialgleichung jedenfalls genügt. Wir können also, um eine mögliche Bewegung zu erhalten, indem wir die Grenzbedingungen berücksichtigen, den Ansatz machen

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1 x (t - t_1) \\ U_2 &= \alpha_2 (l - x) t. \end{aligned} \tag{9}$$

Für $x = \xi$ muß $U_1 = U_2$ sein, d. h.

$$\alpha_1 \xi (t - t_1) = \alpha_2 (l - \xi) t.$$

1) Vgl. z. B. H. Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen d. math. Phys.*, 5. Aufl., 2, S. 214, Braunschweig 1912.

Da aber ξ proportional t sein muß, so folgt

$$-\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha c,$$

wo α eine willkürliche Konstante ist, und also $\xi = \frac{lt}{t_1}$. Da aber die Geschwindigkeit, mit der sich der Unstetigkeitspunkt bewegt, gleich c sein muß, so wird $l = ct_1$.

So ergibt (9)

$$U_1 = \alpha(l - ct)x, \quad U_2 = \alpha(l - x)ct. \tag{10}$$

Für den Unstetigkeitspunkt wird

$$\begin{gathered} U_1 = U_2 = \overline{U} = \alpha(l - ct)\xi = \alpha(l - \xi)ct \\ \xi = ct, \quad \overline{U} = \alpha(l - \xi)\xi. \end{gathered} \tag{11}$$

Aus (11) erkennt man, daß der Unstetigkeitspunkt sich auf einer Parabel bewegt.

Für $t = 0$ ist $\xi = 0$ und $U_2 = 0$; d. h. der Unstetigkeitspunkt liegt am Anfang der Saite, die Saite ist in der Gleichgewichtslage. Für $t = \frac{l}{c}$ hat der Unstetigkeitspunkt den ganzen Parabelbogen durchlaufen, die Saite ist wieder geradlinig. Dann läuft die Ecke wieder zurück, ist aber nach unten gerichtet (vgl. Fig. 95).

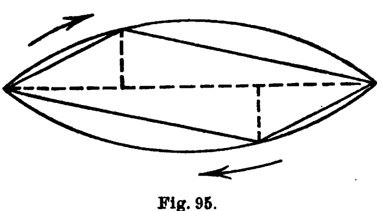


Fig. 95.

Ferner betrachten wir die Bewegung eines speziellen Punktes mit der Abszisse x als Funktion der Zeit. Solange $t < \frac{x}{c}$ ist, gehört der Punkt der Geraden U_2 an. Während dieser Zeit steigt der Punkt nach der zweiten Formel (10) gleichmäßig in die Höhe; von $t = \frac{x}{c}$ bis $t = \frac{l}{c}$ nimmt er wieder mit konstanter Geschwindigkeit bis Null ab. In Fig. 96 ist U als Funktion der Zeit für ein willkürlich gewähltes x aufgetragen. Eine mit dem Bogen gestrichene Saite bewegt sich annähernd nach diesem Gesetz.[1]

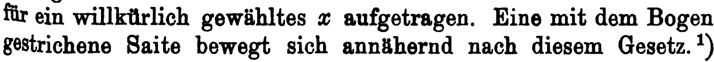


Fig. 96.

Der Vergleich der Fig. 96 mit Fig. 90 zeigt, daß die Darstellung durch die Fouriersche Reihe genau dieselbe ist, wie bei

1) H. v. Helmholtz, *Die Lehre von der Tonempfindung*, 2. Aufl., Braunschweig 1865; *Wissensch. Abh.* 1, Leipzig 1881; Harnack, *Math. Ann.* **29**, 1887, S. 486.

der gezupften Saite, wenn man nur t mit x und somit die Periode T mit $2l$ vertauscht.

τ sei die Zeit, zu der die maximale Ausweichung stattfindet; dann erhält man [1])

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2h}{\pi^2 m^2} \sin \frac{2\pi m \tau}{T} \left[\frac{T}{2\tau} + \frac{T}{T-2\tau}\right] \sin \frac{2\pi m t}{T}, \qquad (12)$$

und das können wir auch in der Form schreiben

$$U = \frac{8P}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{2\pi m t}{T}, \qquad (12')$$

wo P die Ordinate in der Mitte der Saite bedeutet.

Auch die Schwingungen von Klaviersaiten, die an einer bestimmten Stelle mit dem Hammer angeschlagen werden, behandelt Helmholtz.[2]) Die Annahme ist die, daß für $t = 0$ die Saite sich merklich in der Gleichgewichtslage befindet, und daß ein kleiner Bereich der Saite eine Geschwindigkeit erhalten hat, doch hat Kaufmann[3]) gezeigt, daß die Beobachtungen mit der Helmholtzschen Theorie völlig im Widerspruch stehen, da nicht die elastischen Deformationen der Saite am Orte des Hammeranschlags, sondern die Spannung der Saite für das Zurückwerfen des Hammers maßgebend ist, und er hat auf Grund dessen eine neue Theorie entwickelt und mit der Beobachtung verglichen.

131. Berücksichtigung der Steifigkeit der Saite. Die Differentialgleichung für die Longitudinalschwingungen Nr. **128** (8) ist nicht ganz exakt, da die bei jeder Längendilatation auftretende Querkontraktion vernachlässigt ist.

Um die Longitudinalschwingungen einer Saite oder eines Stabes von kreisförmigem Querschnitt zu behandeln, gehen wir von den Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie in Zylinderkoordinaten r, φ, z aus.

Aus Gleichung Nr. **125** (6′) und (7) folgt, daß $\operatorname{div} \mathfrak{u} = \Theta$ der Gleichung

$$\varrho \ddot{\Theta} = a_{11} \Delta \Theta \qquad (1)$$

genügt, und $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{u} = \mathfrak{w}$ genügt nach Nr. **125** (9) der Gleichung

$$\varrho \ddot{\mathfrak{w}} = \frac{a_{11} - a_{12}}{2} \Delta \mathfrak{w}. \qquad (2)$$

1) H. v. Helmholtz, *Vorlesungen über die math. Prinzipien der Akustik,* Leipzig 1898, S. 121.

2) Ebenda S. 133.

3) W. Kaufmann, *Ann. d. Phys. u. Chem.* **54**, 1895, S. 675.

Wir erhalten periodische axial-symmetrische Bewegungen, wenn wir alle Zustandsgrößen der Exponentialfunktion $e^{i(\gamma z + p t)}$ proportional setzen und sowohl $\delta\varphi$ als $\partial/\partial\varphi$ gleich Null annehmen. Dann folgen für Θ und $\mathfrak{w}$ die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Theta}{dr} + h^2\Theta = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d^2\mathfrak{w}_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathfrak{w}_\varphi}{dr} - \frac{\mathfrak{w}_\varphi}{r^2} + k^2\mathfrak{w}_\varphi = 0. \tag{4}$$

Für $\Delta\mathfrak{w}$ kann man nämlich $-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{w}$ setzen, da $\operatorname{div}\mathfrak{w} = 0$ ist, und es ergibt sich für $\mathfrak{w}$

$$\mathfrak{w}_r = 0, \quad 2\mathfrak{w}_\varphi = \frac{\partial\delta r}{\partial z} - \frac{\partial\delta z}{\partial r}, \quad \mathfrak{w}_z = 0. \tag{5}$$

In (3) und (4) ist

$$h^2 = \frac{p^2\varrho}{a_{11}} - \gamma^2, \quad k^2 = p^2\varrho\,\frac{2}{a_{11} - a_{12}} - \gamma^2. \tag{6}$$

Die Gleichung (3) ist die Besselsche Differentialgleichung 0ter, (4) die erster Ordnung.

Da nun

$$\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\delta r)}{\partial r} + \frac{\partial\delta z}{\partial z} \tag{7}$$

ist, so müssen, wenn wir

$$\delta r = Re^{i(\gamma z + p t)}, \quad \delta z = Ze^{i(\gamma z + p t)} \tag{8}$$

ansetzen, R und Z die Form haben

$$\begin{aligned} R &= A\,\frac{d}{dr}J_0(hr) + C\gamma J_1(kr) \\ Z &= Ai\gamma J_0(hr) + \frac{iC}{r}\frac{d}{dr}\{r\cdot J_1(kr)\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Da der Zylindermantel spannungsfrei sein soll, so müssen Π_{rr} und Π_{rz} für $r = a$ verschwinden, d. h. nach Nr. 105

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{12})\,r_r + a_{12}\Theta &= 0 \\ r_z \qquad\qquad &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{12})\frac{\partial\delta r}{\partial r} + a_{12}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial(r\delta r)}{\partial r} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right\} &= 0 \\ \frac{\partial\delta r}{\partial z} + \frac{\partial\delta z}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

So ergeben sich die beiden Gleichungen

$$A\left[(a_{11}-a_{12})\frac{d^2J_0(ha)}{da^2}-p^2\varrho\frac{a_{12}}{a_{11}}J_0(ha)\right]+(a_{11}-a_{12})C\gamma\frac{dJ_1(ka)}{da}=0$$
$$2A\gamma\frac{dJ_0(ha)}{da}+C\left(2\gamma^2-\frac{2p^2\varrho}{a_{11}-a_{12}}\right)J_1(ka)=0. \qquad (11)$$

Durch diese beiden Gleichungen ist erstens das Verhältnis A/C bestimmt. Eliminieren wir es aber, so ergibt sich die Frequenzgleichung.

Ist a klein gegen die Wellenlänge, so können wir für J_0 und J_1 die Anfangsglieder der Reihenentwicklungen nehmen

$$J_0(ha)=1-\frac{h^2a^2}{4}+\frac{h^4a^4}{64},\quad J_1(ka)=\frac{ka}{2}-\frac{1}{16}k^3a^3$$

und erhalten

$$p=\gamma\sqrt{\frac{E}{\varrho}}\left(1-\frac{1}{4}\mu^2\gamma^2a^2\right) \qquad (12)$$

oder

$$c=\sqrt{\frac{E}{\varrho}}\left(1-\frac{\pi^2\mu^2a^2}{\lambda^2}\right). \qquad (13)$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also von der Wellenlänge $\lambda=2\pi/p$ ein wenig abhängig.[1]

Das soeben erhaltene Resultat läßt sich nach einer Methode von Lord Rayleigh[2]) einfacher gewinnen, und zwar für Querschnitte beliebiger Form.

Zu dem Zwecke wollen wir kartesische Koordinaten einführen und die x-Achse in die Saitenachse legen.

Die Verschiebung $\mathfrak{u}_x$ in Richtung der Saite ist von einer Transversalverschiebung mit den Komponenten

$$-\mu y\frac{\partial\mathfrak{u}_x}{\partial x},\quad -\mu z\frac{\partial\mathfrak{u}_x}{\partial x}$$

begleitet, so daß die kinetische Energie lautet

$$T=\int\frac{1}{2}\varrho q\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{u}_x}{\partial t}\right)^2+\mu^2K^2\left(\frac{\partial^2\mathfrak{u}_x}{\partial x\partial t}\right)^2\right\}ds, \qquad (14)$$

---

1) Wegen dieser Lösungen vgl. man L. Pochhammer, *Journ. f. Math. (Crelle)* **81**, 1876, S. 324 und C. Chree, *Quart. J. of Math.* **21**, 1886. Erweiterung auf Zylinder von nicht-kreisförmigem Querschnitt und anisotropem Material siehe C. Chree, ibid. **24**, 1890.

2) Lord Rayleigh, *Theorie des Schalls*, deutsch von Fr. Neesen, **1**, § 157, S. 265. Braunschweig 1880; vgl. auch A. E. H. Love, *Lehrbuch d. Elastizität,* deutsch von A. Timpe, S. 490. Leipzig u. Berlin 1907.

wenn K der Trägheitsradius des Querschnitts bezüglich seines Schwerpunkts ist.

Die potentielle Energie ist

$$U = \int \frac{1}{2} Eq \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x}\right)^2 ds; \tag{15}$$

also ergibt sich nach dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \, [T - U] = 0$$

durch partielle Integration die Gleichung

$$\varrho \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_x}{\partial t^2} - \mu^2 K^2 \frac{\partial^4 \mathfrak{u}_x}{\partial x^2 \partial t^2}\right) = E \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_x}{\partial x^2}.$$

Setzen wir

$$\mathfrak{u}_x = \mathfrak{u}_{x0} e^{i(\gamma x + pt)}$$

an, so folgt

$$\frac{p}{\gamma} = c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \left(1 - \frac{2\pi^2 \mu^2 K^2}{\lambda^2}\right) \tag{16}$$

entsprechend (12).

132. Longitudinalschwingungen von Stäben. Für Longitudinalschwingungen unterscheiden sich Stäbe nicht von Saiten; es gilt also die Differentialgleichung Nr. **128** (8)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_x}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho} \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_x}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Nur die Enden können sich anders verhalten. Ist das Ende befestigt, so ist dort $\mathfrak{u}_x = 0$, ist es dagegen frei, so darf auf die Endfläche keine Spannung wirken, also muß dann $\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x} = 0$ sein.

Sind beide Enden fest, so ist (vgl. Nr. **128** (19))

$$\mathfrak{u}_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cos \frac{m\pi c}{l} t + B_m \sin \frac{m\pi c}{l} t\right) \sin \frac{m\pi x}{l}. \tag{2}$$

Die Grundschwingung ($m = 1$) erfolgt so, daß die beiden Enden Knoten der Bewegung sind, daß also der Stab als halbe Wellenlänge schwingt. Da die Verdichtung durch $\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x}$ gegeben ist, so folgt, daß für jede mögliche Partialschwingung ein Knoten der Verdichtung mit einem Bauch der Bewegung zusammenfällt und umgekehrt.

Sind beide Ende frei, so muß an ihnen $\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x} = 0$ sein, d. h. es wird

$$\mathfrak{u}_x = \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m \cos\frac{m\pi c}{l}t + B_m \sin\frac{m\pi c}{l}t\right)\cos\frac{m\pi x}{l}\,. \tag{3}$$

Die Grundschwingung hat an den Enden Bäuche, in der Mitte einen Knoten der Bewegung; der Stab schwingt somit als halbe Wellenlänge. Ist der Stab in der Mitte eingespannt, so werden damit die Oberschwingungen $m = 2, 4, 6\ldots$ unterdrückt, während die Schwingungen $m = 1, 3, 5\ldots$ weiterbestehen können.

Ist der Anfang des Stabes eingespannt, das Ende frei, so wird

$$\mathfrak{u}_x = \sum_{m=0}^{\infty}\left(A_{2m+1}\cos\frac{(2m+1)\pi c t}{2l} + B_{2m+1}\sin\frac{(2m+1)\pi c t}{2l}\right)\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2l}\,.$$

Die Länge des Stabes ist $^1/_4$ Wellenlänge der Grundschwingung.

Durch Bestimmung der Schwingungszahl $n = \frac{1}{T}$ der Grundschwingung eines in der Mitte eingespannten Stabes ergibt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{nl}{2} \tag{5}$$

und daraus der Elastizitätskoeffizient nach der Formel $c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$.

Wir werden in der Akustik eine Methode von Kundt kennen lernen, auf diese Weise die Schallgeschwindigkeit in festen Körpern zu messen.

Unter Berücksichtigung der Transversalbewegungen, die mit den Longitudinalschwingungen verbunden sind, erhalten wir, ebenso wie bei Saiten, die Gleichung Nr. 131 (16).

133. Transversalschwingungen von Stäben. Die kinetische Energie eines transversal schwingenden Stabes ist

$$T = \frac{\varrho q}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}\right)^2 dx, \tag{1}$$

die potentielle Energie[1])

$$V = \frac{EJ}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial x^2}\right)^2 dx. \tag{2}$$

1) Vgl. Lord Rayleigh, *Theorie des Schalls*; deutsch von Fr. Neesen 1, § 160, S. 271. Braunschweig 1880.

So folgt aus dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt (T - V) = 0$$

durch partielle Integration

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \left\{ EJ \frac{\partial^4 \mathfrak{u}}{\partial x^4} + \varrho q \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial t^2} \right\} \delta \mathfrak{u} \\ &+ EJ \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial x^2} \frac{\partial \delta \mathfrak{u}}{\partial x} - \frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x^3} \delta u \right\}_{x=0}^{x=l} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Daraus ergibt sich, daß überall die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 \mathfrak{u}}{\partial x^4} + \frac{\varrho q}{EJ} \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

gelten muß, daß an einem freien Ende, wo $\delta \mathfrak{u}$ und $\delta \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}$ willkürlich sind,

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x^3} = 0 \tag{5}$$

sein müssen, daß dagegen an einem eingeklemmten Ende eines ursprünglich geraden Stabes $\mathfrak{u}$ und $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}$ gegeben, und zwar daß

$$\mathfrak{u} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

sein müssen.

Wir können $\mathfrak{u}$ in der Form ansetzen

$$\mathfrak{u} = \sum G_m \mathfrak{u}_m \cos \left(\sqrt{\frac{EJ}{\varrho q}} \frac{m^2 t}{l^2} - \gamma_m \right). \tag{7}$$

Dann genügt $\mathfrak{u}_m$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^4 \mathfrak{u}_m}{dx^4} = \frac{m^4}{l^4} \mathfrak{u}_m, \tag{8}$$

deren allgemeinste Lösung

$$\mathfrak{u}_m = A_m \cosh \frac{mx}{l} + B_m \sinh \frac{mx}{l} + C_m \cos \frac{mx}{l} + D_m \sin \frac{mx}{l} \tag{9}$$

ist.

Sind beide Enden frei, so ergibt (5) für $x = 0$

$$A_m = C_m, \quad B_m = D_m,$$

also

$$u_m = A_m\left(\cosh\frac{mx}{l} + \cos\frac{mx}{l}\right) + B_m\left(\sinh\frac{mx}{l} + \sin\frac{mx}{l}\right). \quad (10)$$

Die Anwendung von (5) auf die Stelle $x = l$ ergibt aus (10) die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_m(\cosh m - \cos m) + B_m(\sinh m - \sin m) &= 0 \\ A_m(\sinh m + \sin m) + B_m(\cosh m - \cos m) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

woraus erstens die Frequenzgleichung durch Elimination von A/B

$$\cos m \cosh m = 1 \quad (12)$$

und zweitens das Verhältnis A/B folgt.

So wird, wenn H_m eine willkürliche Konstante bedeutet,

$$\begin{aligned} u_m = H_m \Big\{ &\left(\sin m - \sinh m\right)\left(\cosh\frac{mx}{l} + \cos\frac{mx}{l}\right) \\ &+ \left(\cosh m - \cos m\right)\left(\sinh\frac{mx}{l} + \sin\frac{mx}{l}\right)\Big\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Für große m läßt sich m genähert in der Form $(2\nu+1)\pi/2$ darstellen, und zwar liegen die m-Werte abwechselnd etwas über und unter diesem Näherungswert.

Es wird[1])

	Differenz
$m_1 = 4,7300$	
	3,1232
$m_2 = 7,8532$	
	3,1424
$m_3 = 10,9956$	
	3,1416
$m_4 = 14,1372$	
	3,1416.
$m_5 = 17,2788$	

Aus der letzten Kolonne, welche die Differenzen aufeinanderfolgender Eigenschwingungen angibt, ersieht man tatsächlich, daß diese Differenz sehr bald gleich π wird, daß also die höheren Oberschwingungen merklich harmonisch sind.

Aus (7) folgt die Schwingungszahl

$$N = \sqrt{\frac{EJ}{\varrho q}}\,\frac{m^2}{2\pi l^2}. \quad (14)$$

Die Schwingungszahlen sind also dem Quadrat der Länge umgekehrt und dem Trägheitsradius direkt proportional.

134. An beiden Enden eingeklemmter Stab. Differentiiert man die soeben gefundene Größe u zweimal nach x und setzt

1) Lord Rayleigh, *Theory of sound* 1, § 174.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u'$, so genügt u' der Differentialgleichung Nr. **133** (8), und an den Enden sind u' und $\frac{\partial u'}{\partial x} = 0$, wie nach Nr. **133** (6) verlangt wird.

Es wird also

$$u_m = H_m \left\{ (\sin m - \sinh m) \left(\cosh \frac{m x}{l} - \cos \frac{m x}{l} \right) + (\cosh m - \cos m) \left(\sinh \frac{m x}{l} - \sin \frac{m x}{l} \right) \right\}. \tag{1}$$

Die Frequenzgleichung bleibt dieselbe, es treten also dieselben Eigenschwingungen auf.

Die Stellen $u = 0$ sind die Knoten, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ die Bäuche, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ die Wendepunkte, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ die Stellen stärkster Krümmung.

Wo beim Stabe mit zwei freien Enden Wendepunkte sind, sind die Knoten des beiderseitig festgeklemmten Stabes; die Stellen stärkster Krümmung des ersteren entsprechen den Bäuchen des letzteren. Umgekehrt entsprechen die Knoten resp. Bäuche des ersteren den Wendepunkten resp. Punkten stärkster Krümmung des letzteren.

135. Der einseitig festgeklemmte Stab. Für diesen ergibt sich in ähnlicher Weise

$$u_m = H_m \left\{ (\sinh m + \sin m) \left(\cosh \frac{m x}{l} - \cos \frac{m x}{l} \right) - (\cosh m + \cos m) \left(\sinh \frac{m x}{l} - \sin \frac{m x}{l} \right) \right\}, \tag{1}$$

wobei aber die Frequenzgleichung

$$\cosh m \cdot \cos m = -1 \tag{2}$$

lautet, welche die Wurzeln ergibt[1])

	Differenz
$m_1 = 1{,}8751$	
	2,8196
$m_2 = 4{,}6947$	
	3,1601
$m_3 = 7{,}8548$	
	3,1407
$m_4 = 10{,}9955$	
	3,1417
$m_5 = 14{,}1372$	
	3,1416.
$m_6 = 17{,}2788$	

Auch hier nähern sich die Wurzeldifferenzen der Zahl π.

1) Lord Rayleigh, l. c. § 174.

Da durch zweimalige Differentiation der Lösung eine Lösung gefunden wird, bei der freies und eingespanntes Ende vertauscht sind, so folgt, daß der Abstand der Wendepunkte und Stellen größter Krümmung eines einseitig eingespannten Stabes vom festen Ende gleich dem der Knoten und Bäuche vom freien Ende ist.

136. Die Kurvenform schwingender Stäbe. Lord Rayleigh[1]) berechnet durch eine einfache Umformung von Nr. **133** (13) die Kurvenform eines beiderseitig freien Stabes zu

$$\begin{aligned} u_m &= \sqrt{2} \cos \nu\pi \sin\left\{\frac{m x}{l} - \pi/4 + (-1)^\nu \frac{\beta}{2}\right\} \\ &+ \sin\frac{\beta}{2} e^{\frac{m x}{l}} - \cos\nu\pi \cos\frac{\beta}{2} e^{-\frac{m x}{l}} = F_1 + F_2 + F_3 \end{aligned} \tag{1}$$

bis auf einen konstanten Amplitudenfaktor. Hier ist β ein Maß für die Abweichung der Eigenschwingungen vom harmonischen Verhalten, indem

$$m = \frac{(2\nu+1)\pi}{2} - (-1)^\nu \beta$$

gesetzt ist.

In der Mitte sind $|F_2|$ und $|F_3|$ einander gleich; für gerade ν verschwindet u_m in der Mitte, es liegt dort für diese Schwingungen ein Knoten.

Lord Rayleigh[2]) legt u_m als Funktion von x in Tabellen nieder, und es zeigt sich, daß die Grundschwingung $\nu = 1$ von der Form der Fig. 97 zwei Knoten hat, die um 0,2242 der ganzen Länge von den Enden entfernt liegen.

Fig. 97.

Ebenfalls sind die Knoten der nächsten Oberschwingungen $\nu = 2$ und $\nu = 3$ berechnet. In der Nähe der Stabmitte ergibt sich — wenigstens für die höheren Oberschwingungen —, daß der Abstand benachbarter Knoten $\frac{2l}{2\nu+1}$ ist[3]); in der Nähe der Stabenden sind die Lagen der Knoten von Seebeck[4]) und von Donkin[5]) vermittelt worden.

137. Saiten und Stäbe. Der Unterschied in dem Verhalten transversal schwingender Saiten und Stäbe liegt darin begründet, daß bei ersteren die äußere permanente Spannung die Verlänge-

1) L. c. § 177. 2) L. c. § 178.

3) Vgl. die Messungen von Strehlke, *Pogg. Ann.* **27** und Lissajous, *Ann. de chim.* (3), **30**, 385.

4) A. Seebeck, *Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss.*, Leipzig 1852.

5) Donkin, *Acoustics*, S. 194.

rung zu verhindern sucht, bei letzteren die Steifigkeit einer Biegung entgegenwirkt. Der Effekt dieser verschiedenen Einflüsse ist, wie wir sahen, daß bei vollkommen biegsamen Saiten die Oberschwingungen zueinander harmonisch sind, während bei Stäben das nicht der Fall ist (genähert nur für die höheren Obertöne), oder anders ausgedrückt, daß bei Stäben die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer elastischen Störung von der Wellenlänge abhängt.

Bei Saiten werden in Wirklichkeit stets beide Einflüsse vorhanden sein. Berücksichtigt man die Steifigkeit, so wird man auch Rücksicht nehmen müssen auf die Rotationsträgheit der Teilchen der Saite; jedes Querschnittselement wird sich nämlich nicht nur senkrecht zur Achse verschieben, sondern auch eine Drehung um eine durch den Schwerpunkt senkrecht zur Biegungsebene verlaufende Achse ausführen, deren Geschwindigkeit durch $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ gegeben ist.

Es ist also die potentielle Energie infolge der äußeren Spannung p

$$V_1 = \frac{1}{2} pq \int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx, \tag{1}$$

infolge der Steifigkeit (J Trägheitsmoment bzw. einer durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden Achse)

$$V_2 = \frac{1}{2} EJ \int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx, \tag{2}$$

und die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2}\int \varrho q \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int J\cdot\varrho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right)^2 dx. \tag{3}$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips die Differentialgleichung[1])

$$EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - pq\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varrho q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varrho J \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = 0, \tag{4}$$

aus der die Korrektion der Schwingungszahl n der $(\nu - 1)$ten Oberschwingung einer Saite der Länge l wegen der Steifigkeit zu

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\nu^2 \pi^2 J}{2 l^2 q}\,\frac{E}{p} \tag{5}$$

folgt, falls $\frac{J}{l^2 q}$ klein ist.[2]) Ist der Querschnitt ein Kreis vom Radius r, so ist $\frac{J}{q} = \frac{r^2}{4}$.

1) Vgl. Clebsch, *Theorie der Elastizität fester Körper,* Leipzig 1862.
2) Donkin, *Acoustics*, Art. 184. In obiger Ableitung ist vorausgesetzt, daß p klein gegen E ist, was immer erlaubt ist.

Schwingungen von Membranen.

138. Die Differentialgleichung der Membran. Eine dünne, vollkommen biegsame Membran sei allseitig durch die Zugkraft p gespannt. In der Gleichgewichtslage befinde sie sich in der xy-Ebene.

Da auf die Oberfläche der Membran keine Drucke wirken, so gilt für jeden Punkt derselben (vgl. Nr. **104** (3) und Nr. **102** (4)).

$$\begin{aligned} \Pi_{xx}\cos(nx)+\Pi_{xy}\cos(ny)+\Pi_{xz}\cos(nz)&=0\\ \Pi_{yx}\cos(nx)+\Pi_{yy}\cos(ny)+\Pi_{yz}\cos(nz)&=0\\ \Pi_{zx}\cos(nx)+\Pi_{zy}\cos(ny)+\Pi_{zz}\cos(nz)&=0.\end{aligned} \tag{1}$$

Bezeichnen wir die Verschiebung aus der xy-Ebene heraus mit w, so ist

$$\begin{aligned} \cos(nx)&=-\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}}\\ \cos(ny)&=-\frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}}\\ \cos(nz)&=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}}\end{aligned} \tag{2}$$

oder mit Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung

$$\cos(nx)=-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \cos(ny)=-\frac{\partial w}{\partial y},\quad \cos(nz)=1. \tag{3}$$

Da aber bis auf unendlich kleine Größen

$$\Pi_{xx}=p,\quad \Pi_{yy}=p, \tag{4}$$

ist (das sind nämlich die durch die Bewegung nur unendlich wenig veränderten Gleichgewichtsbedingungen), so ergibt (1)

$$\Pi_{xz}=p\,\frac{\partial w}{\partial x},\quad \Pi_{yz}=p\,\frac{\partial w}{\partial y},\quad \Pi_{zz}=0, \tag{5}$$

so daß, wenn keine äußeren Kräfte außer p auf die Membran wirken, nach Nr. **104** (2)

$$\varrho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{6}$$

wird.

Am Rande muß dauernd

$$w = 0 \tag{7}$$

sein.

Setzen wir $\frac{p}{\varrho} = c^2$, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \Delta w. \tag{8}$$

139. Die rechteckige Membran. Ist die Membran ein Rechteck mit den Seiten a und b, und bilden zwei Kanten des Rechtecks die x- resp. y-Achse, so ist die allgemeinste Lösung von Nr. 138 (8)

$$w = e^{2\pi i n t} u, \tag{1}$$

wo u der Gleichung

$$\Delta u + \frac{4\pi^2 n^2}{c^2} u = 0 \tag{2}$$

genügt.

Eine Lösung, die die Grenzbedingungen befriedigt, ist

$$u_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \sin\frac{\mu\pi x}{a} \sin\frac{\nu\pi y}{b}, \tag{3}$$

wo μ wie ν jede positive ganze Zahl bedeuten kann.

Die möglichen Schwingungszahlen bestimmen sich aus der Gleichung

$$n = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}; \tag{4}$$

es sind also doppelt unendlich viele, aber diskrete Eigenschwingungen möglich.

Die allgemeinste Lösung lautet demnach

$$w = \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\mu\nu} \sin\frac{\mu\pi x}{a} \sin\frac{\nu\pi y}{b} \cos(2\pi n t - \alpha_{\mu\nu}). \tag{5}$$

Die Grundschwingung der Membran ergibt sich aus $\mu = \nu = 1$.

Sind a und b inkommensurabel, so erhält man eine Reihe möglicher harmonischer Schwingungen, wenn man für μ und ν ein Paar relativer Primzahlen nimmt, aus denen sich ein n nach (4) berechnet; $n, 2n, 3n, \ldots$ sind dann eine Reihe möglicher Schwingungen.

Jedes andere Paar relativer Primzahlen gibt eine weitere harmonische Reihe, doch ist keine einzige Schwingung der einen Reihe harmonisch zu irgendeiner einer anderen Reihe. Dagegen gibt es,

wenn a und b kommensurabel sind, Reihen, von denen jede Schwingung der einen harmonisch zu jeder Schwingung der anderen ist.[1])

140. Knotenlinien. Diejenigen Linien, in denen dauernd $w = 0$ ist, heißen *Knotenlinien.*

So sind die den Kanten parallelen Linien

$$x = \frac{a}{\mu}, \frac{2a}{\mu}, \frac{3a}{\mu}, \ldots, \frac{(\mu - 1)a}{\mu}$$

und

$$y = \frac{b}{\nu}, \frac{2b}{\nu}, \frac{3b}{\nu}, \ldots, \frac{(\nu - 1)b}{\nu}$$

Knotenlinien.

Dadurch wird die Membran in kongruente Rechtecke geteilt, für die die Elongation aus der Ruhelage in benachbarten Rechtecken das entgegengesetzte Zeichen hat.

Der Einfachheit halber soll im folgenden angenommen werden, daß die Membran ein Quadrat ist, daß also $a = b$ ist.

Dann lautet Nr. **139** (4)

$$n = \frac{c}{2a}\sqrt{\mu^2 + \nu^2}. \tag{1}$$

Die Grundschwingung $\mu = \nu = 1$ ergibt nach Nr. **139** (5) keine Knotenlinien. Setzen wir $\mu = 2$, $\nu = 1$ und umgekehrt $\mu = 1$, $\nu = 2$, so wird

$$\begin{aligned} w &= A_{1,2} \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} \cos(2\pi n t - \alpha_{1,2}) \\ &\quad + A_{2,1} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{a} \cos(2\pi n t - \alpha_{2,1}). \end{aligned} \tag{2}$$

Ist $A_{2,1} = 0$, so erhält man

$$w = A_{1,2} \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} \cos(2\pi n t - \alpha_{1,2}), \tag{3}$$

eine Schwingung, die eine Knotenlinie $x = \frac{a}{2}$ hat. Ebenso erhält man für $A_{1,2} = 0$ als Knotenlinie $y = \frac{a}{2}$. Ist $A_{1,2} = A_{2,1}$ und $\alpha_{1,2} = \alpha_{2,1}$, so kann man schreiben

$$w = A_{1,2} \cos(2\pi n t - \alpha_{1,2})\, 2 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a}\left(\cos\frac{\pi x}{a} + \cos\frac{\pi y}{a}\right). \tag{4}$$

---

1) Vgl. H. Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der math. Phys.,* 5. Aufl., **2**, S. 245, Braunschweig 1911.

Außer den Kanten, in denen w immer Null sein muß, erhält man eine Knotenlinie

$$\cos\frac{\pi x}{a} + \cos\frac{\pi y}{a} = 0,$$

d. h.

$$y + x = a \qquad \text{(vgl. Fig. 98).}$$

Ebenso ergibt die Annahme $A_{2,1} = -A_{1,2}$ die Knotenlinie

$$\cos\frac{\pi x}{a} - \cos\frac{\pi y}{a} = 0,$$

d. h.

$$x = y \qquad \text{(vgl Fig. 99).}$$

Ohne spezielle Annahme über das Amplitudenverhältnis $A_{1,2}/A_{2,1}$ lautet die Gleichung der Knotenlinie nach (2)

$$\cos\frac{\pi y}{a} = \varepsilon \cos\frac{\pi x}{a}. \tag{5}$$

Zusammengehörige Werte von x und y ergeben sich leicht aus einer trigonometrischen Tafel. Da wir x und y miteinander ver-

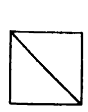
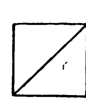



Fig. 98 u. 99.

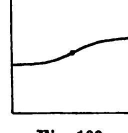


Fig. 100.

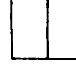
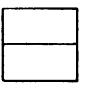



Fig. 101 u. 102.

tauschen können, ist die Allgemeinheit der Untersuchung nicht verletzt, wenn wir $\varepsilon < 1$ annehmen. Die Diskussion ergibt: Die Kurve hat zwei kongruente Hälften, geht durch den Mittelpunkt des Quadrats, steht auf den Kanten, die sie trifft, senkrecht und hat im Zentrum einen Inflexionspunkt (Fig. 100).

Für $\mu = 2$ oder für $\nu = 2$ ergeben sich die Knotenlinien $x = a/2$ resp. $y = a/2$ (Fig. 101 und 102). Für $\mu = 1$, $\nu = 3$ oder $\mu = 3$, $\nu = 1$ findet sich eine Diskussion der Knotenlinien z. B. bei Weber[1]) mit dazugehörigen Figuren für verschiedene Werte von ε.

141. Kreisförmige Membran. In Polarkoordinaten schreibt sich die Gleichung Nr. 138 (8) unter der Annahme, daß die Abhängigkeit von t durch den Exponentialfaktor $e^{2\pi i n t}$ und die Abhängigkeit von φ durch $e^{i\mu\varphi}$ ausgedrückt ist, in der Form

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \left(\frac{4\pi^2 n^2}{c^2} - \frac{\mu^2}{r^2}\right) w = 0, \tag{1}$$

1) H. Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der math. Phys.*, 5. Aufl., 2, S. 250, Braunschweig 1911.

deren Lösung

$$w = A_\mu J_\mu \left(\frac{2\pi n}{c} r\right) \tag{2}$$

ist.

Hier bedeutet J_μ die Besselsche Funktion μ^{ter} Ordnung erster Art. n bestimmt sich daraus, daß

$$J_\mu \left(\frac{2\pi n a}{c}\right) = 0 \tag{3}$$

sein muß. Die dieser Bedingung genügenden Werte nennen wir

$$n_{\mu,1},\ n_{\mu,2}, \ldots,\ n_{\mu,\nu}, \ldots.$$

Dann ist die allgemeinste Lösung

$$w = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} J_\mu \left(\frac{2\pi n_{\mu,\nu} r}{c}\right) A_{\mu\nu} \cos(2\pi n_{\mu\nu} t - \alpha_{\mu\nu}) \sin \mu(\varphi - \beta_{\mu\nu}). \tag{4}$$

Knotenlinien einer Partialschwingung sind die 2μ Radien $\varphi - \beta_{\mu\nu} = \frac{k\pi}{\mu}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2\mu - 1)$ und die konzentrischen Kreise

$$\frac{2\pi n_{\mu\nu} r}{c} = l_{\mu\nu}, \tag{5}$$

wo $l_{\mu\nu}$ eine Wurzel von $J_\mu(x) = 0$ ist, die kleiner als $\frac{2\pi n_{\mu\nu} a}{c}$ ist. Numerische Angaben über die Wurzeln findet man in einer Arbeit von Bourget[1]); man beachte vor allem die Funktionentafeln von Jahnke und Emde[2]).

In Fig. 103 findet man die Klangfiguren der tiefsten Töne einer kreisförmigen Membran nach Lord Rayleigh gezeichnet. Die

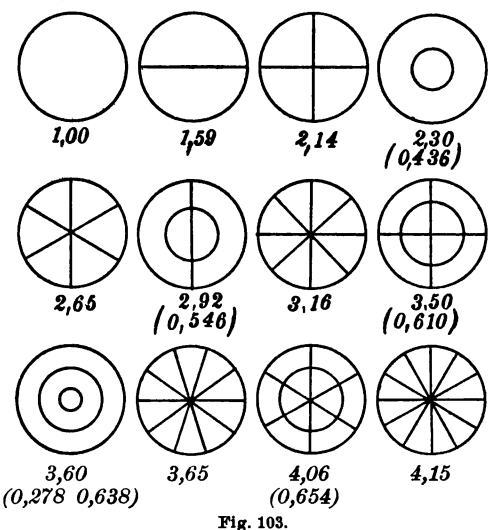


Fig. 103.

Zahlen bedeuten die Schwingungszahlen der erzeugten Töne, bezogen auf den Grundton als Einheit; die eingeklammerten Zahlen

1) Bourget, *Ann. de l'école normale,* **3**, 1866.
2) E. Jahnke u. F. Emde, *Funktionentafeln,* Leipzig u. Berlin 1909.

sind die Radien der kreisförmigen Knotenlinien, bezogen auf den Membranradius als Einheit.

Den Einfluß einer kleinen Belastung der Membran diskutiert Lord Rayleigh[1]) ebenso wie eine kleine Abweichung von der Kreisform.[2])

Es ist zu beachten, daß bei allen erwähnten Problemen über die Schwingungen von Membranen eine Knotenlinie befestigt und als Randlinie gewählt werden kann, ohne daß die Schwingung aufhört, möglich zu sein. So ergibt z. B. die Formel für die Schwingungen einer quadratischen Membran, die eine Diagonale als Knotenlinie liefert, zugleich die Schwingungen eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks.

Schwingende Platten.

142. Die potentielle Energie einer gebogenen Platte.[3]) In Nr. 115 S. 241 haben wir einen Balken betrachtet, auf den die Spannungen $\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = \Pi_{zy} = \Pi_{xz} = \Pi_{yx} = 0$, $\Pi_{zz} = -\alpha x$ wirken. Diese Spannung wird hervorgerufen durch ein Drehmoment an den Enden des Balkens um die y-Achse von der Größe

$$\mathfrak{N}_y = \alpha \int x^2 \, dx$$

pro Längeneinheit in Richtung von y.

Wir wollen jetzt erstens die Buchstaben z und x vertauschen und die Dicke in Richtung von z als unendlich klein annehmen. Wir haben es dann mit einer Platte zu tun und erhalten

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} &= -\alpha z \\ \mathfrak{N}_y &= \alpha \int z^2 \, dz \end{aligned} \tag{1}$$

und für die Verschiebungen, wenn wir ihnen den Index 1 geben, nach Nr. 115 (6)

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= -\frac{\alpha}{E} xz \\ \delta y_1 &= \frac{\mu\alpha}{E} yz \\ \delta z_1 &= \frac{\alpha}{2E}(x^2 + \mu z^2 - \mu y^2). \end{aligned} \tag{2}$$

---

1) Lord Rayleigh, *Theory of sound*, 1, § 208.
2) Ibid. § 209.
3) Vgl. Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, 2, p. 265. 266.

Existiert außerdem noch ein analoges Drehmoment um die x-Achse, welches durch die Spannung $\Pi_{yy} = -\beta z$ hervorgerufen ist, und das demnach den Wert

$$\mathfrak{N}_x = \beta \int z^2 \, dz$$

hat, auf die Längeneinheit in Richtung von x bezogen, so bewirkt dieses die Deformationen

$$\begin{aligned} \delta x_2 &= \mu \frac{\beta}{E} x z \\ \delta y_2 &= -\frac{\beta}{E} y z \\ \delta z_2 &= \frac{\beta}{2E}(y^2 + \mu z^2 - \mu x^2). \end{aligned} \tag{3}$$

Sind beide Drehmomente gleichzeitig vorhanden, so berechnet sich die resultierende Verschiebung nach dem Superpositionsprinzip als Summe der in (2) und (3) ausgedrückten Verschiebungen als

$$\begin{aligned} \delta x &= -\frac{xz}{E}(\alpha - \mu\beta) \\ \delta y &= \frac{yz}{E}(\mu\alpha - \beta) \\ \delta z &= \frac{1}{2E}\left[(\alpha - \beta\mu)x^2 + (\beta - \alpha\mu)y^2 + \mu(\alpha + \beta)z^2\right] \end{aligned} \tag{4}$$

und daraus die Deformationsgrößen (vgl. Nr. 101 (5))

$$\begin{aligned} x_x &= -\frac{z}{E}(\alpha - \mu\beta) \\ y_y &= \frac{z}{E}(\mu\alpha - \beta) \\ z_z &= \frac{z}{E}\mu(\alpha + \beta) \\ y_z &= z_x = x_y = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Setzt man diese Werte in die Formel Nr. 103 (22) für die Dichte ω der elastischen Energie ein, so erhält man, wenn man berücksichtigt, daß nach der dritten Gleichung (4) die beiden Hauptkrümmungen der deformierten Platte sich als

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\alpha - \beta\mu}{E}; \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\beta - \alpha\mu}{E} \tag{6}$$

ergeben, das Resultat

$$\omega = \frac{z^2}{2}\frac{E}{(1-\mu^2)}\left\{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^2 - \frac{2(1-\mu)}{R_1 R_2}\right\}, \tag{7}$$

und wenn wir über das ganze Volumen der Platte, d. h. über z von $-h/2$ bis $+h/2$, sowie über x und y integrieren,

$$\Omega = \frac{h^3 E}{24(1-\mu^2)}\int\left\{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^2 - \frac{2(1-\mu)}{R_1 R_2}\right\} d\sigma. \tag{8}$$

Diese Formel gilt allgemein für die potentielle Energie einer gebogenen Platte, da es gleichgültig sein muß, wie bei einem Plattenelement die betreffenden Spannungen erzeugt werden.

Führen wir anstatt R_1 und R_2 mit Hilfe der dritten Gleichung (4) $\frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 \delta z}{\partial y^2}$ ein, ersetzen δz durch w und wählen ein anderes Koordinatensystem x, y, dessen Achsen nicht gerade in die Hauptnormalschnitte fallen, so daß

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2$$

wird[1]), so erhalten wir schließlich für die potentielle Energie

$$\Omega = \frac{h^3 E}{24(1-\mu^2)}\int\left\{\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]^2 \right.$$
$$\left. - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} d\sigma. \tag{9}$$

143. Die Bewegungsgleichung und die Grenzbedingungen. Außer der potentiellen Energie Ω können wir auch die kinetische Energie T berechnen und zwar ist

$$T = \frac{h}{2}\varrho\int\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 d\sigma. \tag{1}$$

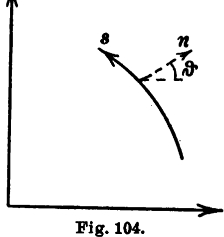


Fig. 104.

Somit läßt sich das Hamiltonsche Prinzip anwenden.

Die Umformung durch partielle Integration ergibt, wenn man die äußere Normale n einführt, deren Neigung gegen die x-Achse ϑ heißen möge, und wenn man s in der Richtung positiv wählt (vgl. Fig. 104), daß n und s ebenso liegen, wie x und y, unter Berücksichtigung der Beziehungen

1) $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ und $\frac{1}{R_1 R_2}$ heißen nach Gauß die mittlere und totale Krümmung der Fläche im betrachteten Punkte; vgl. z. B. E. Pascal, *Repertorium der höheren Mathematik* **2** S. 487.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \delta w}{\partial x} &= -\frac{\partial \delta w}{\partial s} \sin \vartheta + \frac{\partial \delta w}{\partial n} \cos \vartheta \\
\frac{\partial \delta w}{\partial y} &= \frac{\partial \delta w}{\partial s} \cos \vartheta + \frac{\partial \delta w}{\partial n} \sin \vartheta
\end{aligned}
\tag{2}
$$

erstens die Differentialgleichung

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E h^2}{24 \varrho (1-\mu^2)} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = 0 \tag{3}
$$

oder abgekürzt

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E h^2}{24 \varrho (1-\mu^2)} \Delta \Delta w = 0. \tag{3'}
$$

Ist der Rand frei, so daß dort δw und $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$ willkürlich sind, so kommen die Grenzbedingungen hinzu

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta w}{\partial n} + (1-\mu) \frac{\partial}{\partial s} \Big\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \vartheta \cos \vartheta \\
+ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \Big\} = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\mu \Delta w + (1-\mu) \Big\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \vartheta \\
+ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \vartheta \cos \vartheta \Big\} = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Ist dagegen der Rand eingespannt, so sind die Bedingungen (4) und (5) zu ersetzen durch

$$
w = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \tag{6}
$$

Für eine rechteckige Platte gehen die Gleichungen (4) und (5) in

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left[\Delta w + (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

über für die Kanten, die senkrecht zur x-Achse liegen, während die an den anderen beiden Kanten gültigen Gleichungen aus (7) durch Vertauschung von x und y hervorgehen.

Hierzu kommt in den Ecken des Rechtecks noch die Bedingung

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \tag{8}
$$

hinzu.

Diese letzte Bedingung hat Kirchhoff[1]), der zuerst die vollständige Theorie der Transversalschwingungen von Platten gab, übersehen; sie ist zuerst von Lamb[2]) bemerkt worden.

Die Integration der Differentialgleichung (3) für das Rechteck bot noch vor kurzem unüberwindliche Schwierigkeiten außer bei Platten, deren Ränder ringsum „gestützt" sind, oder bei denen zwei gegenüberliegende Ränder frei, die anderen beiden dagegen „gestützt" sind, für die Voigt[3]) das Problem löste. Erst Ritz[4]) gab eine neue Integrationsmethode, nach der man die Schwingungen und Klangfiguren einer freien rechteckigen Platte berechnen kann. Dieselben stimmen mit den Angaben von Chladni[5]) über die Tonhöhen und den Beobachtungen von Strehlke[6]) über die Kurvenform der Klangfiguren genau überein.

Die Ritzsche Methode besteht darin, daß er nicht von der Differentialgleichung und den Grenzbedingungen, sondern direkt vom Prinzip der kleinsten Wirkung ausgeht, indem er das Variationsproblem genähert durch ein Maximum- und Minimumproblem mit einer endlichen Anzahl Parameter ersetzt.

144. Kreisförmige Platten. Wesentlich einfacher als das Problem der quadratischen ist das der kreisförmigen, und infolgedessen ist dasselbe auch als erste hierher gehörige Aufgabe von Kirchhoff[7]) gelöst worden.

Setzt man in der Differentialgleichung Nr. **143** (3′) w in der Form

$$w = U e^{2\pi i n t} \tag{1}$$

an, so erhält man

$$\Delta\Delta U - k^4 U = 0, \tag{2}$$

wenn zur Abkürzung

$$k^4 = \frac{96\pi^2 n^2 \varrho (1-\mu^2)}{E h^2} \tag{3}$$

gesetzt ist.

1) G. Kirchhoff, *Crelles Journal* **40**, 1850, S. 51.

2) H. Lamb, *Lond. Math. Soc.* **21**, 1890, S. 70.

3) W. Voigt, *Gött. Nachr.* 1893, S. 225. Unter einer gestützten Platte versteht man eine solche, bei der die Befestigung am Rande derart ist, daß $\delta w = 0$, $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$ aber willkürlich ist.

4) W. Ritz, *Ann. Phys.* (4) **28**, 1909, S. 737.

5) E. F. F. Chladni, *Akustik*, Leipzig 1802, S. 138.

6) F. Strehlke, *Pogg. Ann.* **95**, 1855, S. 577; **146**, 1872, S. 319.

7) G. Kirchhoff, *Crelles Journal* **40**, 1850; *Pogg. Ann.* **81**, 1850; siehe auch *Vorlesungen über math. Phys.* **1**, S. 459, 4. Aufl., Leipzig 1897.

Durch Einführung von Zylinderkoordinaten r, ϑ gehen die Grenzbedingungen Nr. 143 (4) und (5) in die für $r = a$ gültigen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\left(\frac{2-\mu}{a^2}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{3-\mu}{a^3} w\right) = 0 \tag{4}$$

und

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\left(\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2}\right) = 0 \tag{5}$$

über. Setzen wir für w eine Entwicklung nach der Fourierschen Reihe in der Form

$$U = \sum_{w=0}^{\infty} U_\nu \cos(\nu\vartheta - \gamma_\nu) \tag{6}$$

an, so lauten die Grenzbedingungen

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2 U_\nu}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_\nu}{dr}\right) - \nu^2\left(\frac{2-\mu}{a^2}\frac{dU_\nu}{dr} - \frac{3-\mu}{a^3} U_\nu\right) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d^2 U_\nu}{dr^2} + \mu\left(\frac{1}{a}\frac{dU_\nu}{dr} - \frac{\nu^2}{a^2} U_\nu\right) = 0. \tag{8}$$

Die Differentialgleichung (2), die auch

$$(\Delta + k^2)(\Delta - k^2) U = 0 \tag{9}$$

geschrieben werden kann, muß für jeden Term der Fourierschen Reihe erfüllt werden, und geht deshalb über in

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} + k^2\right)\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} - k^2\right) U_\nu = 0. \tag{10}$$

Setzen wir

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0 \tag{11}$$

$$\Delta\Psi - k^2\Psi = 0 \tag{12}$$

und

$$S = \Phi + \Psi \tag{13}$$

$$D = \Phi - \Psi, \tag{14}$$

so ergibt sich durch Addition resp. Subtraktion von (11) und (12) mit Benutzung von (13) und (14)

$$\Delta S + k^2 D = 0 \tag{15}$$

$$\Delta D + k^2 S = 0 \tag{16}$$

und somit

$$\Delta\Delta S + k^2\Delta D = \Delta\Delta S - k^4 S = 0. \tag{17}$$

Ebenso ist

$$\Delta\Delta D + k^2 \Delta S = \Delta\Delta D - k^4 D = 0; \tag{18}$$

S und D sind also Integrale von (9), also auch Φ und Ψ selbst.

Bekanntlich sind aber

$$\Phi = J_\nu(kr)$$

und (19)

$$\Psi = J_\nu(ikr)$$

die für $r = 0$ endlichen Integrale von (11) und (12), wenn J_ν das Integral erster Gattung der Besselschen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung bedeutet.

Somit lautet das allgemeinste Integral von w

$$w = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \cos(\nu\vartheta - \gamma_\nu)\{J_\nu(kr) + \lambda_\nu J_\nu(ikr)\}\cos(2\pi n t - \tau_\nu). \tag{20}$$

Die Knotenlinien der durch (20) dargestellten Transversalschwingungen sind die Radien

$$\cos(\nu\vartheta - \gamma_\nu) = 0 \tag{21}$$

und die Kreise

$$J_\nu(kr) + \lambda_\nu J_\nu(ikr) = 0. \tag{22}$$

Für einen bestimmten Wert ν gibt es also 2ν symmetrisch um den Mittelpunkt verteilte Radien, in denen keine Bewegung stattfindet. Welche Radien das sind (d. h. welchen Wert γ_ν hat), hängt von der Art der Einspannung der Platte und der Erregung der Schwingungen ab.

Nach (7) und (8) ergeben sich k und λ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} -\lambda &= \frac{\nu^2(\mu-1)\{kaJ_\nu'(ka) - J_\nu(ka)\} - k^3a^3J_\nu'(ka)}{\nu^2(\mu-1)\{ikaJ_\nu'(ika) - J_\nu(ika)\} + ik^3a^3J_\nu'(ika)} \\ -\lambda &= \frac{(\mu-1)\{kaJ_\nu'(ka) - \nu^2 J_\nu(ka)\} - k^2a^2J_\nu(ka)}{(\mu-1)\{ikaJ_\nu'(ika) - \nu^2 J_\nu(ika)\} + k^2a^2J_\nu(ika)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen (23) die Größe λ, so erhält man eine transzendente Gleichung für die Werte k bei gegebenem a.

Für $\nu = 0$, d. h. wenn keine radialen Knotenlinien vorhanden sind, geht (23) in

$$2(1-\mu) + ika\frac{J_0(ika)}{J_0'(ika)} + ka\frac{J_0(ka)}{J_0'(ka)} = 0 \tag{24}$$

über.

Nach Messungen von Strehlke[1]) sind für $\nu = 0$ die Knotenlinien durch folgende Tabelle gegeben[2]), falls $a = 1$ gesetzt ist,

	Beob.	Ber.
Ein Kreis	0,67 815	0,68 062
Zwei Kreise	0,39 133 0,84 149	0,39 151 0,84 200
Drei Kreise	0,25 631 0,59 107 0,89 360	0,25 679 0,59 147 0,89 381

Ebenfalls finden sich bei Lord Rayleigh Vergleiche der Kirchhoffschen Theorie für $\nu \neq 0$ mit Beobachtungen von Strehlke, die sehr befriedigend sind.

Nach Chladni macht man die Knotenlinien von Platten dadurch sichtbar, daß man die etwa in der Mitte eingespannte Platte mit Sand bestreut und dann am Rande mit einem Violinbogen anstreicht. Der Sand wird in den Knotenlinien liegen bleiben, dagegen an den anderen Stellen fortgeschleudert werden.

B. Hydrodynamik.

Kapitel I.

Bewegungsgleichungen und allgemeine Sätze.

145. Die Bewegungsgleichungen. Man erhält die Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik, ebenso wie die der Elastizitätstheorie aus den Prinzipien der Mechanik.

Ist ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit, $\mathfrak{f}$ die auf die Masseneinheit wirkende Kraft, $\delta\mathfrak{s}$ eine virtuelle Verschiebung, so lautet das d'Alembertsche Prinzip

$$\int \varrho \left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt} - \mathfrak{f}, \delta\mathfrak{s}\right) dS + \int (\overline{\Pi}_n, \overline{\delta\mathfrak{s}})\, d\sigma = 0. \tag{1}$$

In dieser Gleichung bedeutet $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ die Geschwindigkeitsänderung in einem materiellen, d. h. an der Bewegung teilnehmenden Punkte, ist also wohl zu unterscheiden von der zeitlichen Änderung des Vektors $\mathfrak{v}$ an einem festen Raumpunkte, die wir mit $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$ bezeichnen

---

1) Strehlke, *Pogg. Ann.* **95**, 1855, S. 577.

2) Vgl. Lord Rayleigh, *Die Theorie des Schalles*; deutsch von Fr. Neesen, **1**, Braunschweig 1880, S. 399.

wollen. Da $\mathfrak{v}_x = \mathfrak{v}_x(x, y, z, t)$ ist, so gilt z. B.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} &= \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}\mathfrak{v}_x + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\mathfrak{v}_y + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z}\mathfrak{v}_z.\end{aligned} \tag{2}$$

$\mathfrak{k}$ ist die Kraft auf die Masseneinheit und $\overline{\Pi_n}$ ist ein Vektor, welcher den von außen ausgeübten Druck auf ein Flächenelement $d\sigma$ der Flüssigkeitsoberfläche mit der äußeren Normalen n bezeichnet, $\overline{\delta\mathfrak{s}}$ ist der Verschiebungsvektor dieses Oberflächenelements.

Unter der *Kontinuitätsgleichung* versteht man die analytische Beziehung, welche ausdrückt, daß in einem beliebigen Raumteile S eine Zunahme an Masse nur durch Einströmen durch die Oberfläche σ des Raumteiles S stattfinden kann.

Nennen wir ein Flächenelement der Oberfläche des Raumteiles $d\sigma$, die äußere Normale n, so strömt nach innen in der Zeiteinheit $-\int \varrho \mathfrak{v}_n d\sigma$. Dadurch wird eine Massenzunahme $\int \frac{\partial \varrho}{\partial t} dS$ hervorgerufen, und es muß also

$$\int \frac{\partial \varrho}{\partial t} dS + \int \varrho \mathfrak{v}_n d\sigma = 0 \tag{3}$$

sein. Der Gaußsche Integralsatz ergibt hieraus

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathfrak{v} = 0 \tag{4}$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho \mathfrak{v}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho \mathfrak{v}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho \mathfrak{v}_z) = 0. \tag{4'}$$

Hierfür darf man auch

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{4''}$$

schreiben, wenn man unter $\frac{d\varrho}{dt}$ die totale Änderung $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial x}\mathfrak{v}_x + \frac{\partial \varrho}{\partial y}\mathfrak{v}_y + \frac{\partial \varrho}{\partial z}\mathfrak{v}_z$ versteht.

Die Gleichung (4) ist eine Nebenbedingung für die Verschiebungen; sie ist im allgemeinen nicht holonom.[1])

1) Wegen des Begriffs „holonom" vgl. man Nr. **36** S. 67. Über die Bedeutung dieser Nebenbedingung für die Hydrodynamik vgl. man A. Brill, *Jahresber. d. deutsch. Math.-Vereinig.* **8**, 1900, S. 202 und *Math. Ann.* **58**, 1904, S. 473 Fußnote.

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, also $\frac{d\varrho}{dt} = 0$, so haben die virtuellen Verschiebungen der Gleichung

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

zu genügen.

Multiplizieren wir (5) mit $p\,dS$, integrieren über den Raum S und subtrahieren dieses Integral von (1), so erhalten wir

$$\int \left\{ \left(\varrho \frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} - \mathfrak{f}_x \right) \delta x - p \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \cdots \right\} dS + \int (\overline{\Pi}_n, \overline{\delta \mathfrak{s}})\, d\sigma = 0. \tag{6}$$

In dieser Gleichung sind δx, δy, δz voneinder unabhängig, p ist Lagrangescher Faktor, und wir erhalten durch partielle Integration des letzten Gliedes des Raumintegrals

$$\int \varrho \left(\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} - \mathfrak{f}_x \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \Big\} \delta x\, dS + \int (\overline{\Pi}_n, \overline{\delta \mathfrak{s}})\, d\sigma - \int p \delta \mathfrak{s}_n d\sigma = 0, \tag{7}$$

aus dem die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} = \mathfrak{f}_x - \frac{\partial P}{\partial x} \tag{8}$$

folgt, wenn wir

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{9}$$

setzen. Hier bedeutet nach Nr. **102** p einen auf jedes Flächenelement der Flüssigkeit wirkenden normalen Druck. Die Kontinuitätsgleichung ist also dem Vorhandensein einer Zwangskraft äquivalent, die sich als Druck darstellt.

Ferner gilt an einer freien Oberfläche, an der $\overline{\delta \mathfrak{s}}$ willkürlich ist,

$$p \cos(n, x) = \overline{\Pi}_{nx}, \tag{10}$$

usw.

während an einer starren Wand die Normalkomponente $\mathfrak{v}_n$ der Flüssigkeit gleich der der Wand sein muß.

Mit Hilfe von (2) wird (8)

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial t} + \mathfrak{v}_x \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} + \mathfrak{v}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} + \mathfrak{v}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} = \mathfrak{f}_x - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{11}$$

Bei kompressiblen Flüssigkeiten wird bei Komprimierung eine Arbeit geleistet. Diese ist, wenn die Flüssigkeit ideal, d. h. nicht reibend ist, einfach der Volumänderung proportional, so daß die

virtuelle Arbeit dieser Kraft auf das Volumelement dS sich in der Form schreibt

$$\delta' A = p\,\delta dS = p\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \cdots\right) dS.$$

Es ergibt sich also die Bewegungsgleichung, wenn wir diesen Term im d'Alembertschen Prinzip (Gleichung (1)) zu $\mathfrak{f}, \delta\mathfrak{s}$ addieren. Im allgemeinen Falle haben also die Bewegungsgleichungen dieselbe Form wie bei inkompressiblen Flüssigkeiten, nur ist hier ϱ nicht mehr konstant, sondern eine Funktion des Druckes p

$$\varrho = f(p). \tag{12}$$

So kann man die Funktion $P = \int \frac{dp}{\varrho}$ für tropfbar flüssige und gasförmige Medien bilden, sobald nach (12) die Abhängigkeit der Dichte vom Druck bekannt ist.

Für tropfbar flüssige, kompressible Medien ist z. B.

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1 + \mu(p - p_0), \tag{12'}$$

wo μ der Kompressibilitätskoeffizient (vgl. Nr. **103** (16') und Nr. **109**) heißt, also ist

$$\begin{aligned} P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho} &= \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho_0(1 + \mu(p - p_0))} \\ &= \frac{1}{\varrho_0 \mu} \lg(1 + \mu(p - p_0)), \end{aligned} \tag{13}$$

während bei inkompressiblen Flüssigkeiten, bei denen p so klein bleibt, daß ϱ als konstant $(= \varrho_0)$ angesehen werden darf,

$$P = \int \frac{dp}{\varrho}$$

durch $\frac{p - p_0}{\varrho_0}$ oder bei anderer Wahl der Integrationskonstanten durch $\frac{p}{\varrho}$ zu ersetzen ist.

Bei Gasen kommt es wesentlich auf die Temperaturänderungen an, welche die Druckänderungen begleiten. Wir betrachten zwei wichtige Grenzfälle. Erstens nehmen wir an, daß die Druckänderungen so langsam erfolgen, daß der Vorgang isotherm vor sich geht. Dann ist nach dem Boyleschen Gesetze

$$p = \frac{p_0}{\varrho_0}\varrho \quad \text{und} \quad P = \frac{p_0}{\varrho_0} \lg \frac{p}{p_0}. \tag{14}$$

Geht andererseits die Druckänderung so schnell vor sich, daß die hierbei auftretenden Wärmemengen nicht in die Umgebung entweichen können, so ist der Vorgang adiabatisch, und es gilt für ihn

$$p = p_0 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^k \quad \text{und} \quad P = \frac{p_0^{1/k}}{\varrho_0} \frac{p^{1-1/k}}{1-\frac{1}{k}}, \tag{15}$$

wo $k = \frac{c_p}{c_v}$ das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck zu der bei konstantem Volumen bedeutet. k hat für einatomige Gase den Wert 1,67; für zweiatomige Gase wie z. B. Luft ist $k = 1{,}40$.

Aus den drei Differentialgleichungen (8), der Kontinuitätsgleichung (4′) und der Beziehung zwischen ϱ und p lassen sich die fünf Größen $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$, ϱ, p bestimmen unter Hinzuziehung der Grenzbedingungen.

Die Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens folgt dann durch Integration der Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = \mathfrak{v}_x, \quad \frac{dy}{dt} = \mathfrak{v}_y, \quad \frac{dz}{dt} = \mathfrak{v}_z. \tag{16}$$

Hierdurch werden x, y, z als Funktionen der Zeit und der Anfangswerte der Koordinaten a, b, c bestimmt.

Die Differentialgleichungen der Bewegung in der Form (8) heißen die Eulerschen Gleichungen.[1]

146. Die Lagrangeschen Gleichungen. Während die Eulersche Form der Gleichungen die Geschwindigkeit als Funktion des Orts und der Zeit betrachtet, d. h. das Geschwindigkeitsfeld in seiner zeitlichen Änderung darzustellen sucht, somit in jedem Augenblick nur die Tangente der Bahn eines Masseteilchens gibt, und erst durch Integration der Gleichungen Nr. **145** (16) die Bahnkurve eines Massenteilchens bestimmt ist, schließt sich die sogenannte Lagrangesche Form der Bewegungsgleichungen, die übrigens auch von Euler[2]) stammt, mehr an die Mechanik diskreter Massenpunkte an. Es wird hier direkt die Aufgabe gestellt, die Koordinaten x, y, z eines Massenelements als Funktionen von t anzugeben.

---

1) L. Euler, *Hist. de l'Ac. de Berlin 1755.*

2) L. Euler, *Novi Comm. Acad. Petrop.* **16**, 1759, p. 1. — Lagrange, *Miscellanea Taurinensia* **2**, 1760; *Oeuvres* **1**, Paris 1867—92; *Nouv. mém. de l'acad. de Berlin 1781, Oeuvres* **4**; *Mécanique Analytique* § 18.

So wie in der Mechanik diskreter Massenpunkte die einzelnen Massenpunkte durch Indizes unterschieden werden müssen, kennzeichnet man hier das Massenelement durch drei Größen a, b, c, die z. B. die Anfangswerte von x, y, z sein können, und es sind dann x, y, z als Funktionen von a, b, c, t darzustellen. a, b, c, t sind also die unabhängigen Variabeln.

Man multipliziere die Gleichungen (8) der Nr. **145**

$$\varrho\left(\frac{d^2 x}{d t^2} - \mathfrak{f}_x\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1}$$

usw.

resp. mit $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$ und addiere; dann erhält man

$$\left(\frac{d^2 x}{d t^2} - \mathfrak{f}_x\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \mathfrak{f}_y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \mathfrak{f}_z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a} = 0;$$

ebenso durch Multiplikation mit $\frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial b}$ resp. $\frac{\partial x}{\partial c}, \frac{\partial y}{\partial c}, \frac{\partial z}{\partial c}$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2 x}{d t^2} - \mathfrak{f}_x\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{d^2 y}{d t^2} - \mathfrak{f}_y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - \mathfrak{f}_z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b} = 0 \\
&\left(\frac{d^2 x}{d t^2} - \mathfrak{f}_x\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2 y}{d t^2} - \mathfrak{f}_y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - \mathfrak{f}_z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Hat die Kraft auf die Masseneinheit $\mathfrak{f}_x$ ein Potential V, d. h. ist $\mathfrak{f}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ usw., so wird einfacher

$$\begin{aligned}
\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial a} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial a} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a} &= 0 \\
\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial b} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial b} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial V}{\partial b} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b} &= 0 \\
\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial c} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial c} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial V}{\partial c} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c} &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet: Das Integral $\iiint \varrho\, dx\, dy\, dz$, bezogen auf einen bestimmten Teil der bewegten Masse, ist von der Zeit unabhängig. Führen wir anstatt der x, y, z die a, b, c ein, so werden die Grenzen von der Zeit unabhängig, und man erhält

$$\iiint \varrho\, \Theta \cdot da\, db\, dc,$$

wo Θ die Funktionaldeterminante

$$\Theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \tag{4}$$

ist. Es ist dann

$$\frac{d}{dt} \varrho \Theta = 0$$

oder (5)

$$\varrho \Theta = \varrho_0 \Theta_0$$

die Kontinuitätsgleichung.

Sind die a, b, c nicht Funktionen der Anfangswerte, sondern die Anfangswerte selber, so gilt für $t = 0$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial b} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial c} = 1; \quad \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial x}{\partial c} = \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial y}{\partial c} = \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial b} = 0,$$

also $\Theta_0 = 1$ und somit anstatt (5)

$$\Theta = \frac{\varrho_0}{\varrho}. \tag{5'}$$

Ist die Begrenzung des betrachteten Flüssigkeitsfeldes fest vorgeschrieben, so werden die Eulerschen Gleichungen den Vorzug verdienen, da x, y, z in ihnen einen konstanten Bereich haben. Ist dagegen die äußere Begrenzung variabel, und betrachtet man dieselben Flüssigkeitsteilchen im Laufe der Zeit, so wendet man besser die Lagrangesche Form an, da dann die a, b, c einen unveränderlichen Bereich haben.[1])

147. Hydrostatik. Im Gleichgewichtszustande ist $\mathfrak{v} = 0$; also geht die Gleichung Nr. **145** (8) für inkompressible Flüssigkeiten, auf die nur die Schwerkraft wirkt, in

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \varrho g \tag{1}$$

über, wenn die z-Achse vertikal nach unten gerichtet ist.

Bezeichnet p_0 den Atmosphärendruck, und liegt der Nullpunkt des Koordinatensystems in der freien Oberfläche, so ergibt sich

$$p = p_0 + \varrho g z. \tag{2}$$

---

1) H. Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der math. Phys.*, 5. Aufl., 2, S. 417, Braunschweig 1912.

Diese Gleichung erfüllt auch die Grenzbedingung, welche fordert, daß in der freien Oberfläche $p = p_0$ sei.

Aus (2) folgt, daß der *hydrostatische Druck* einer Flüssigkeitssäule der senkrechten Höhe h den Betrag

$$p - p_0 = \varrho g h \tag{3}$$

hat. Im Falle eines Barometers (vgl. Fig. 105) ist der Druck bei A gleich Null, dagegen bei B gleich dem Atmosphärendruck p_0, so daß, wenn bei A $z = 0$ gewählt wird,

$$\begin{aligned} p &= \varrho g z \\ p_0 &= \varrho g h, \end{aligned} \tag{4}$$

also

$$p = p_0 \frac{z}{h} \tag{5}$$

im Innern des Rohrs gesetzt werden muß, um die Grenzbedingungen an beiden Oberflächen zu erfüllen.

Fig. 105.

Für Quecksilber von 0^0 ist $\varrho = 13{,}596$; unter 45^0 geographischer Breite hat g den Wert $g = 980{,}6\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2}$. Eine *Atmosphäre* entspricht dem Quecksilberdruck von $h = 76$ cm Höhe, also ist nach der zweiten Gleichung (4)

$$1^{\mathrm{atm}} = 13{,}596 \cdot 980{,}6 \cdot 76 = 1\,013\,200\ \frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}^2}. \tag{6}$$

Halten sich in kommunizierenden Röhren, z. B. im U-Rohr der Fig. 106 zwei Flüssigkeiten der Höhen $AB = h_1$ und $BC = h_2$ und der Dichten ϱ_1 und ϱ_2 das Gleichgewicht, so muß nach (4)

$$h_1 \varrho_1 = h_2 \varrho_2 \tag{7}$$

sein, d. h. die Dichten sind den Höhen umgekehrt proportional. Auf diese Weise lassen sich spezifische Gewichte nicht mischbarer Flüssigkeiten vergleichen.

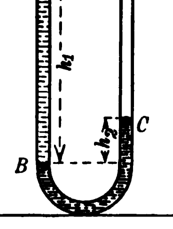


Fig. 106.

Genau genommen ist auch noch der Druck der Luftsäule $CD = h_1 - h_2$ der mittleren Dichte λ zu berücksichtigen, es ist also

$$h_1 \varrho_1 = h_2 \varrho_2 + (h_1 - h_2)\lambda \tag{7'}$$

oder

$$\varrho_2 = \frac{h_1}{h_2}(\varrho_1 - \lambda) + \lambda. \tag{8}$$

Aus Gleichung (3) folgt auch das sogenannte *hydrostatische Paradoxon*, daß der gesamte Bodendruck einer Flüssigkeit derselben Höhe in Gefäßen von gleicher horizontaler Bodenfläche σ denselben Wert

$$\mathfrak{F} = \varrho g h \sigma \tag{9}$$

hat, trotzdem die Flüssigkeitsmengen verschieden sind (vgl. Fig. 107).

Ebenso ergibt sich, daß in *kommunizierenden Röhren* (vgl.

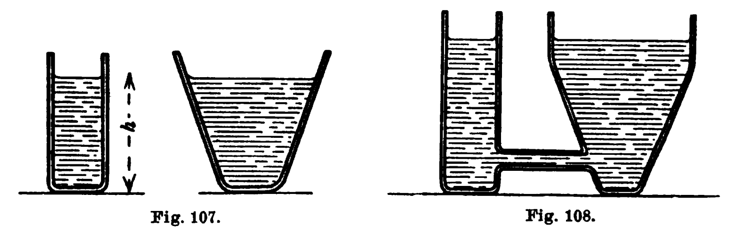


Fig. 107. Fig. 108.

Fig. 108) die Flüssigkeit in beiden Schenkeln verschiedener Form gleich hoch steht.

148. Aerostatik. Für die Kenntnis der Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe ist die Berechnung des Drucks in einer vertikalen Gassäule der Temperatur t von Interesse.

Nach den Gleichungen Nr. **145** (8) und (14) ist

$$\frac{p_0}{\varrho_0} \lg \frac{p}{p_0} = -gz, \tag{1}$$

wenn die z-Achse vertikal nach oben gerichtet ist und p_0 und ϱ_0 Druck resp. Dichte in der Horizontalebene $z = 0$ bezeichnen.

Aus (1) folgt

$$p = p_0 e^{-\frac{\varrho_0 g}{p_0} z}, \tag{2}$$

und da nach Nr. **145** (14) $p/p_0 = \varrho/\varrho_0$ ist, so ergibt sich für die Dichte

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{\varrho_0 g}{p_0} z}. \tag{3}$$

Formel (1) bildet die Grundlage für *barometrische Höhenmessungen*; die Höhendifferenz zweier Örter der Höhen h_1 und h_2, deren Luftdrucke p_1 resp. p_2 sind, ist nach (1)

$$h_2 - h_1 = \frac{p_0}{g \varrho_0} \lg \frac{p_1}{p_2}. \tag{4}$$

Nach Nr. **147** (6) ist $\frac{p_0}{g} = 13{,}596 \cdot 76$; ferner ist für 0^0 $\varrho_0 = 0{,}001\,293$. Daraus ergibt sich der numerische Wert $\frac{p_0}{g\varrho_0} = 799\,300$, falls h in Zentimetern gemessen wird. Geht man von den natürlichen zu gewöhnlichen Logarithmen über und mißt h in Metern, so wird

$$h_2 - h_1 = 18\,400 \lg \frac{p_1}{p_2}. \tag{5}$$

In dieser Formel ist die Temperatur der ganzen Säule als 0^0 angenommen worden. Ist die Temperatur Funktion der Höhe, so müßte man sie zur genauen Berechnung kennen; in Ermangelung dieser Daten rechnet man so, als ob die Temperatur konstant wäre und zwar den mittleren Wert t zwischen den beiden Örtern habe, und muß dann wegen der Veränderlichkeit von ϱ_0 mit der Temperatur nach dem Gay-Lussacschen Gesetze in (5) noch den Faktor $1 + \alpha t$ hinzufügen, wo $\alpha = 0{,}00\,367$ ist, so daß (5)

$$h_2 - h_1 = 18\,400\,(1 + \alpha t) \log \frac{p_1}{p_2} \tag{6}$$

lautet.

Die Korrektion wegen der geographischen Breite, die g beeinflußt (vgl. Nr. **71** S. 144) und wegen der Luftfeuchtigkeit finden sich z. B. bei Kohlrausch[1]) angegeben.

In den Formeln (2) und (3) ist vorausgesetzt, daß das Gas einheitlich ist; das gilt aber nicht für die Luft, die im wesentlichen aus Sauerstoff und Stickstoff besteht, aber auch Beimengungen von Argon, Neon, Helium, Krypton und Xenon enthält. Da nach dem Daltonschen Gesetze jedes Gas sich so verhält, als ob das andere nicht vorhanden wäre, so muß in großen Höhen die relative Volumkonzentration der leichten Gase viel größer sein als in der Nähe des Erdbodens, denn der Faktor $\frac{\varrho_0 g}{p_0}$ im Exponenten ist der Dichte proportional, also für die leichteren Gase viel kleiner, d. h. die Dichtigkeitsabnahme mit der Höhe geht bei ihnen langsamer vor sich.

149. Die Helmholtzschen Wirbelsätze. Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial t} + \mathfrak{v}_x \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} + \mathfrak{v}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} + \mathfrak{v}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} = \mathfrak{f}_x - \frac{\partial P}{\partial x} \tag{1}$$

usw.

---

1) F. Kohlrausch, *Lehrbuch der prakt. Physik* 11. Aufl., S. 141.

lassen sich durch Addition und Subtraktion von $\mathfrak{v}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} + \mathfrak{v}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}$ in die Form bringen

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}, \operatorname{rot} \mathfrak{v}]_x = \mathfrak{f}_x - \frac{\partial P}{\partial x}. \tag{2}$$

Bilden wir von (2) die Rotation und setzen

$$\mathfrak{w} = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v}, \tag{3}$$

so erhalten wir

$$2 \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} + 2 \operatorname{rot} [\mathfrak{w}, \mathfrak{v}] = \operatorname{rot} \mathfrak{f}. \tag{4}$$

$\mathfrak{w}$ bedeutet nach Nr. 100 (5) die Rotationsgeschwindigkeit des betreffenden Volumelements oder, wie man in der Hydrodynamik auch sagt, die Wirbelgeschwindigkeit.

Aus (3) folgt

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = 0, \tag{5}$$

d. h. *die Wirbellinien haben weder Anfangs- noch Endpunkte.*

Da ferner[1])

$$\int_\sigma \left\{ \frac{\partial \mathfrak{w}_n}{\partial t} + \operatorname{rot}_n [\mathfrak{w}, \mathfrak{v}] + \mathfrak{v}_n \operatorname{div} \mathfrak{w} \right\} d\sigma = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{w}_n \, d\sigma \tag{6}$$

die Änderungsgeschwindigkeit des über eine materielle Fläche σ erstreckten Flächenintegrals $\int \mathfrak{w}_n \, d\sigma$ bedeutet, so ergibt die Integration der Normalkomponente von (4) über eine Fläche σ mit der Randkurve s

$$2 \frac{d}{dt} \int_\sigma \mathfrak{w}_n \, d\sigma = \oint (\mathfrak{f}, d\mathfrak{s}), \tag{7}$$

wo das Zeichen $\circ$ am Integral die Integration über eine geschlossene Kurve bedeuten soll.

Hat die Kraft auf die Masseneinheit $\mathfrak{f}$ ein eindeutiges Potential V, so verschwindet das Linienintegral über eine geschlossene Linie in (7), und es folgt

$$\int \mathfrak{w}_n \, d\sigma = \text{konst.} \tag{8}$$

$\int \mathfrak{w}_n \, d\sigma$ heißt das Wirbelmoment der Fläche σ.

Der Helmholtzsche Wirbelsatz[2]) lautet: *Bewegt sich eine*

---

1) Vgl. z. B. R. Gans, *Einführung in die Vektoranalysis*, 3. Aufl., Leipzig und Berlin 1913, S. 53.

2) H. v. Helmholtz, *Crelles Journ.* **55**, 1858 = Ges. Abh. **1**, S. 101.

Flüssigkeit unter dem Einfluß konservativer Kräfte, so bleibt das Wirbelmoment einer durch dieselben Flüssigkeitsteilchen gehenden Fläche zeitlich konstant.

Setzt man (3) in (8) ein, und wendet den Stokesschen Satz an, so erhält man

$$\int_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{v}, d\mathfrak{s}) = \text{konst.} \tag{9}$$

Legen wir durch die Punkte eines Linienelements dl die $\mathfrak{w}$-Linien, so erhalten wir einen Flächenstreifen, für dessen Punkte $\mathfrak{w}_n = 0$ ist. Da nach (8) für diese Materieteilchen $\mathfrak{w}_n = 0$ bleibt, so bedeutet das: *Die Flüssigkeitsteilchen einer $\mathfrak{w}$-Linie (Wirbellinie) bleiben während der Bewegung auf einer Wirbellinie.*

Durch alle Punkte der Begrenzung einer beliebigen Fläche lege man die Wirbellinien; diese bilden einen sogenannten Wirbelkanal, und jeder Querschnitt hat dasselbe Wirbelmoment, weil $\operatorname{div} \mathfrak{w} = 0$ ist. Daraus folgt: *Die Flüssigkeitsmasse, die zu einer bestimmten Zeit einen Wirbelkanal erfüllt, bildet auch im Laufe der Bewegung einen Wirbelkanal von zeitlich unveränderlichem Moment.*

150. Wirbelfreie Bewegung. Aus Nr. **149** (9) folgt, daß wenn $\int_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{v}, d\mathfrak{s})$ zu einer bestimmten Zeit Null war, es dauernd Null bleibt, oder nach Nr. **149** (3), daß eine Wirbelbewegung, wenn die wirkenden Kräfte konservativ sind, nicht entstehen kann.

Gleichbedeutend mit

$$\int_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{v}, d\mathfrak{s}) = 0 \tag{1}$$

ist aber

$$\mathfrak{v} = -\operatorname{grad} \Phi, \tag{2}$$

d. h.

$$\mathfrak{v}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{v}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{v}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{3}$$

Φ heißt nach Helmholtz das Geschwindigkeitspotential.

Setzen wir (3) in die Bewegungsgleichungen Nr. **149** (2) ein, so erhalten wir

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right\} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

usw.,

woraus durch Integration

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right\} + \int^p \frac{dp}{\varrho} + V = \text{konst.} \tag{5}$$

folgt. Die Konstante kann allerdings noch Funktion der Zeit sein, die man jedoch mit in das Glied $\partial \Phi / \partial t$ hineinnehmen kann, da nur die örtlichen Differentialquotienten von Φ physikalische Bedeutung haben. In stationären Fällen jedoch ist alles von der Zeit unabhängig, also

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad}^2 \Phi + \int \frac{dp}{\varrho} + V = \text{konst.} \tag{6}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{v}^2}{2} + \int \frac{dp}{\varrho} + V = \text{konst.} \tag{6'}$$

Diese Gleichung erhält man auch aus den Gleichungen Nr. **145** (11), wenn man in denselben $\partial / \partial t = 0$ setzt, $\mathfrak{f} = -\operatorname{grad} V$ substituiert und die drei Gleichungen resp. mit $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ multipliziert und addiert. Ersetzt man dann nach Nr. **145** (16) $\mathfrak{v}_x$ durch dx/dt etc. und integriert längs eines Stromfadens, so folgt

$$\frac{\mathfrak{v}^2}{2} + \int \frac{dp}{\varrho} + V = \text{konst.}, \tag{6''}$$

eine Relation, die äußerlich mit (6′) identisch zu sein scheint, die aber nach der Herleitung verschieden ist. (6″) ist nämlich allgemeiner, weil kein Geschwindigkeitspotential zu existieren braucht, dagegen spezieller, weil die Konstante in (6″) nur innerhalb eines Stromfadens konstant ist, aber von Stromfaden zu Stromfaden variieren kann, während die Konstante in (6′) innerhalb des ganzen Flüssigkeitsfeldes denselben Wert hat.

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so wird aus der Kontinuitätsgleichung

$$\Delta \Phi = 0, \tag{7}$$

die zusammen mit den Grenzbedingungen genügt, um Φ zu bestimmen.

Die Gleichung

$$\varrho\left(\tfrac{1}{2} \operatorname{grad}^2 \Phi + V\right) + p = \text{konst.} \tag{8}$$

ergibt dann an jeder Stelle der Flüssigkeit den Druck.

151. Ausflußgeschwindigkeit. Es befinde sich in der Wand eines Gefäßes ein kleines Loch, und die Flüssigkeit im Gefäße habe konstante Höhe, so daß der Strömungsvorgang stationär ist. Die äußere Kraft sei die Schwere, d. h.

$$V = -gz. \tag{1}$$

Hier ist die xy-Ebene in die obere Fläche und die z-Achse vertikal nach unten gelegt.

Dann folgt aus Nr. **150** (8) für inkompressible Flüssigkeiten[1])

$$\frac{\mathfrak{v}^2}{2} - gz + \frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho}. \tag{2}$$

Hier ist die Konstante so bestimmt, daß in der oberen Fläche, in der wir wegen ihres großen Querschnitts $\mathfrak{v} = 0$ annehmen dürfen, der konstante Atmosphärendruck p_0 herrscht.

An der Oberfläche des austretenden Strahls muß auch $p = p_0$, also

$$\mathfrak{v}^2 = 2gz \tag{3}$$

sein, d. h. es gilt das Toricellische Theorem[2]), daß die Geschwindigkeit gerade so groß ist, als wenn die Flüssigkeit frei die Höhe z heruntergefallen wäre.

Die Formel (2) hätte man auch energetisch ableiten können.[3])

Die Gleichung (3) läßt sich aber nicht zur Berechnung der Ausflußmenge verwenden[4]), da die Richtung der Geschwindigkeit in der Öffnung nicht überall senkrecht zu ihr steht, sondern von allen Seiten auf sie zu konvergiert. In kurzer Entfernung von der Öffnung dagegen wird der Strahl zylindrisch, allerdings ist sein Querschnitt σ' dort kleiner als der Querschnitt σ der Öffnung. Auf Grund von Experimenten ist der Kontraktionskoeffizient zu $\sigma'/\sigma = 0{,}62$ bestimmt worden.

Für Gase gilt, wenn wir von äußeren Kräften absehen, nach Nr. **150** (6)

$$v^2 = 2\int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho}, \tag{4}$$

wenn wir annehmen, daß im Innern des Gefäßes der Druck p und die Geschwindigkeit Null, dagegen außen der Druck p_0 und die Geschwindigkeit v herrschen.

Geht das Ausströmen adiabatisch vor sich, so wird mit Hilfe von Nr. **145** (15)

$$v = \sqrt{\frac{2k}{(k-1)\varrho_0}}\left\{p_0\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]\right\}^{1/2}, \tag{5}$$

1) D. Bernoulli, *Hydrodynamica,* Straßburg 1738.

2) Toricelli, *De motu gravium naturaliter accelerato,* Florenz 1643.

3) Siehe z. B. H. Lamb, *Lehrb. d. Hydrodynamik,* deutsch von J. Friedel, Leipzig und Berlin 1907, S. 24.

4) H. Lamb, *Lehrb. d. Hydrodynamik*, deutsch von J. Friedel, Leipzig und Berlin 1907, S. 28.

also das in der Zeiteinheit durch den Querschnitt σ der vena contracta strömende Volumen[1] V/T

$$\frac{V}{T} = v\sigma = \sqrt{\frac{2k}{(k-1)\varrho_0}}\,\sigma\,\left\{p_0\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]\right\}^{1/2}, \qquad (6)$$

wenigstens solange der Druck p des Gases durch das Ausströmen selbst nicht verändert wird. Es gilt also keineswegs die einfache gewöhnlich für die Ausflußzeiten angegebene Formel

$$T'^2 : T^2 = \varrho_0' : \varrho.$$

Findet das Ausströmen dagegen isotherm statt, so folgt aus (4) mit Benutzung von Nr. **145** (14)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}\sqrt{2p_0 \lg\frac{p}{p_0}}. \qquad (7)$$

Die Ausflußgeschwindigkeit ist umgekehrt, die Ausflußzeit direkt proportional der Wurzel aus der Dichte, wenn das Ausströmen entweder isotherm erfolgt, oder wenn — bei adiabatischem Ausströmen — k für die betreffenden Gase gleich ist. Dies Gesetz stellte Graham[2]) nach experimentellen Befunden auf.

---

1) Die Formel stammt von de St. Venant und Wantzel, *Journ. de l'école polytechn.* **16**, 1839, p. 85. Als weitere Forschungen über das Ausströmen von Gasen sind folgende zu nennen: Hirn, *Ann. de chim. et de phys.* (6) **7**, 1886, p. 289 untersuchte das Ausströmen genauer und fand Abweichungen von der Theorie. Seine Versuche wurden aber von Hugoniot nachgerechnet, C. R. 1886 passim, *Ann. de chim. et de phys.* 1886, und es zeigte sich dabei, daß die experimentellen Ergebnisse in Übereinstimmung mit der (allerdings erweiterten) Theorie waren. Auf Grund Wildescher Versuche (*Phil. Mag.* 1886) erweiterte Osborne Reynolds die Theorie in ähnlicher Weise (*Phil. Mag.* 1886) wie Hugoniot es getan hatte. Parenty, *Ann. de chim. et de phys.* **8**, p. 1, 1896; **12**, p. 289, 1897 verwirft die adiabatische Theorie und schlägt andere Formeln vor. Eine Experimentaluntersuchung, die auch die Nebenerscheinungen sorgfältig berücksichtigt, wurde von F. G. Donnan, *Phil. Mag.* (5) **49**, 1900, p. 423 an Argon, Helium und anderen Gasen angestellt. Es zeigte sich, daß das Grahamsche Gesetz auf H_2, O_2, CO, die alle dasselbe k haben, anwendbar ist, daß dagegen Argon schneller, als diesem Gesetze entspricht, ausströmt, so daß man annehmen muß, daß der Vorgang zwischen dem isothermen und dem adiabatischen liegt. Bei CO_2 liegen Abweichungen vor, die sich durch die Abweichungen vom idealen Gaszustande erklären lassen. — Sekundäre Einwirkungen untersuchte R. Emden, *Wied. Ann.* **69**, p. 264, 1889 (s. dort Literaturangaben).

2) Graham, *Phil. Trans.* 1846, **4**, p. 573.

Bunsen[1]) hat auf Grund dieser Überlegungen einen Apparat konstruiert, um mit Hilfe von Ausströmungsgeschwindigkeiten Gasdichten zu messen.

152. Die Strahlbildung und der hydrodynamische Druck. Nach Nr. **150** (8) muß in einer inkompressiblen Flüssigkeit, auf die keine Kräfte wirken,

$$\frac{\mathfrak{v}^2}{2} + \frac{p}{\varrho} = \text{konst.} \tag{1}$$

sein.

Herrscht an Stellen, an denen keine Bewegung stattfindet, der Atmosphärendruck p_0, so ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{v}^2}{2} + \frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho}, \tag{2}$$

d. h. an Stellen, an denen die Flüssigkeit sich bewegt, ist der Druck p geringer als der der Atmosphäre.

Für Wasser ist $\varrho = 1$; ferner ist nach Nr. **147** (6)

$$p_0 = 1013200 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}.$$

Daraus folgt, daß $p = 0$ wird an den Stellen, an denen $\mathfrak{v}$ den Betrag $1424 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ erreicht. Bei größerer Geschwindigkeit wird $p < 0$, es tritt ein Zug auf die Wasserteilchen ein, der ein Zerreißen der Flüssigkeit hervorruft und im allgemeinen Strahlbildung bewirkt.[2])

Läßt man z. B. durch ein Rohr, das unten in eine kreisförmige Platte A mündet (vgl. Fig. 109), der eine gleiche Platte B gegenübersteht, einen Luftstrom in Richtung der Pfeile treten, so wird die untere Platte B nicht etwa abgestoßen, sondern angezogen, denn unter ihr herrscht keine wesentliche Geschwindigkeit, dort ist also der Atmosphärendruck p_0 vorhanden, während zwischen den beiden Platten eine Druckverminderung stattfindet.

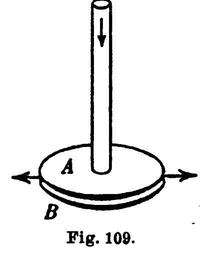


Fig. 109.

1) R. Bunsen, *Gasometrische Methoden* S. 129. Die Methode war bereits angegeben von Leslie, *Experimental Inquiry into the nature and propagation of heat,* 1804, p. 534.

2) H. v. Helmholtz, *Über diskontinuierl. Flüssigkeitsbewegungen* 1868, Wiss. Abh. **1** S. 146 = Berl. Ber. 1866; G. Kirchhoff, *Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen,* Crelles Journ. **70**, 1869 = Ges. Abh. S. 416; siehe auch *Vorlesungen über Mechanik,* 4. Aufl., Leipzig 1897, S. 273 ff.

Dieselbe Wirkung beobachtet man beim Aspirator (Fig. 110). Tritt durch eine Röhre, die sich an einer Stelle erweitert und dort ein seitliches Ansatzrohr besitzt, das in ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß taucht, ein Luftstrom in der Pfeilrichtung, so wird der Druck p in A geringer sein als der Druck p_0 in B, wodurch die Flüssigkeit gehoben und mit dem Luftstrahl fortgerissen wird.

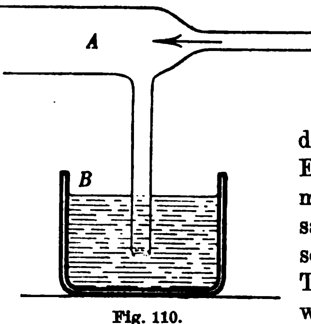


Fig. 110.

Voraussetzung ist aber, daß die Geschwindigkeit der Luft so groß ist, daß sie beim Eintreten in das weitere Rohr zerreißt, somit einen Strahl bildet, der die Luft im Ansatzrohr in Ruhe läßt. Bei kleineren Geschwindigkeiten würde die bewegte Luft zum Teil ins Seitenrohr eintreten und eine Druckwirkung, aber keine Saugwirkung auf die Flüssigkeit ausüben.

Auf einem ähnlichen Effekt des verminderten Seitendrucks bei Flüssigkeitsstrahlen beruht die Wasserstrahlluftpumpe sowie die Luftzufuhr beim Bunsenbrenner; die Phänomene gehorchen jedoch nicht ohne weiteres der Formel (2), die der Reibung und Dichtigkeitsänderung der Gase infolge des Drucks nicht Rechnung trägt.

Letzteren Umstand könnte man berücksichtigen, indem man anstatt der Gleichung (2) die Formel

$$\frac{\mathfrak{v}^2}{2} + \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho} = 0 \tag{3}$$

anwendet, die, falls die Dichteänderungen isotherm vor sich gehen, nach Nr. 145 (14) in

$$\frac{\mathfrak{v}^2}{2} = \frac{p_0}{\varrho_0} \lg \frac{p_0}{p} \tag{4}$$

übergeht, woraus

$$p_0 - p = p_0 \left(1 - e^{-\frac{\mathfrak{v}^2 \varrho_0}{2 p_0}}\right) \tag{5}$$

folgt.

Sind die Dichteänderungen dagegen adiabatisch, so wird (vgl. Nr. 145 (15))

$$\mathfrak{v}^2 = \frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\varrho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right], \tag{4'}$$

woraus sich

$$p = p_0 \left[1 - \frac{k-1}{2k} \frac{\varrho_0}{p_0} \mathfrak{v}^2\right]^{\frac{k}{k-1}} \tag{5'}$$

ergibt.

Um die Bedingungen, die an einer Unstetigkeitsfläche der Geschwindigkeit gelten, kennen zu lernen, ziehen wir die Gleichung Nr. 150 (4) heran, welche für stationäre Zustände in Vektorschreibweise

$$\text{grad}\,\{\varrho(\tfrac{1}{2}\mathfrak{v}^2 + V) + p\} = 0 \tag{6}$$

lautet.

Hier ist V eine stetige Funktion des Orts; ebenso darf p keinen Sprung erleiden, da ein solcher eine unendliche Kraft bedeuten würde; es muß also, wenn wir die beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche durch die Indizes 1 und 2 unterscheiden,

$$V_1 = V_2, \tag{7}$$

$$p_1 = p_2 \tag{8}$$

sein.

Integrieren wir (6) von einem Punkte 1, welcher der Unstetigkeitsfläche unendlich benachbart ist, bis zu einem Punkte 2, der dem Punkte 1 auf der anderen Seite der Fläche unmittelbar gegenüberliegt, so ergibt sich

$$\mathfrak{v}_2^2 - \mathfrak{v}_1^2 = \text{konst.}, \tag{9}$$

d. h. der Sprung des Geschwindigkeitsquadrats ist in der ganzen Fläche konstant.

Dabei muß die Normalkomponente der Geschwindigkeit auch beim Durchschreiten der Unstetigkeitsfläche stetig bleiben, da sich in dieser sonst eine unendliche Masse anhäufen würde.

Kapitel II.

Feste Körper in Flüssigkeiten. Kinematik.

153. Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit, in der sich ein starrer Körper befindet. Nach Nr. 150 (7) gilt die Gleichung

$$\Delta \Phi = 0, \tag{1}$$

wenn keine Wirbel in der Flüssigkeit existieren.

An der Oberfläche des starren Körpers muß die Flüssigkeit dieselbe Normalkomponente der Geschwindigkeit haben wie der Körper. Nennen wir diese $\mathfrak{V}_n$, so muß

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \mathfrak{V}_n \tag{2}$$

sein.

Weiter soll in unendlich großer Entfernung vom bewegten Körper durch kein Flächenelement des Raumes Flüssigkeit hindurchtreten; deshalb muß auch

$$\lim_{R=\infty} R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} = 0 \tag{3}$$

sein, oder, was dasselbe ist,

$$\lim_{R=\infty} R\Phi = 0. \tag{3'}$$

Durch (1) bis (3) ist Φ eindeutig gegeben, wenn die Flüssigkeit einen einfach zusammenhängenden Raum erfüllt.

Zum Beweise nehmen wir an, es gäbe zwei Lösungen Φ_1 und Φ_2, die beide den genannten Bedingungen gehorchen, dann müßte $U = \Phi_1 - \Phi_2$ denselben Bedingungen genügen, nur würde anstatt (2) $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ an der Oberfläche des starren Körpers gelten.

Nach dem Greenschen Satze ist nun (vgl. Nr. **63** (1') S. 128)

$$\int \operatorname{grad}^2 U\, dS = \int \operatorname{div}(U \operatorname{grad} U)\, dS - \int U \Delta U\, dS. \tag{4}$$

Der letzte Term rechts fällt wegen (1) fort, der erste ergibt, nach dem Gaußschen Satze umgeformt,

$$\int U \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma, \tag{5}$$

wo $d\sigma$ ein Element der Oberfläche und der unendlich großen, das Flüssigkeitsfeld begrenzenden Fläche ist.

Somit wird das Integral (5) Null, also

$$\int \operatorname{grad}^2 U\, dS = 0,$$

d. h. $\operatorname{grad} U = 0$, oder U eine Konstante. Φ_1 und Φ_2 unterscheiden sich somit nur um eine Konstante, d. h. die beiden verschieden angenommenen Geschwindigkeitsfelder sind es in Wirklichkeit nicht.

Bei der Ableitung ist aber die Stetigkeit von Φ vorausgesetzt, die aus der Stetigkeit der Geschwindigkeit nur in einfach zusammenhängenden Räumen folgt.

Die kinetische Energie T der Flüssigkeit ergibt sich aus (4), wenn wir U durch Φ ersetzen. Es ist nämlich

$$2T = \varrho \int \operatorname{grad}^2 \Phi\, dS = \varrho \int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\sigma, \tag{6}$$

oder nach (2)

$$2T = -\varrho \int \Phi \mathfrak{B}_n\, d\sigma. \tag{7}$$

154. Zerlegung des Problems in Teilaufgaben. Die Geschwindigkeit eines starren Körpers setzt sich in folgender Weise aus den Komponenten der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{U}$ und der Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{W}$ um eine durch den Koordinatenursprung gehende Achse zusammen, wenn x, y, z die Koordinaten irgend eines Körperpunktes bedeuten (vgl. Nr. **26** (1) S. 45):

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_x &= \mathfrak{U}_x + \mathfrak{W}_y z - \mathfrak{W}_z y \\ \mathfrak{B}_y &= \mathfrak{U}_y + \mathfrak{W}_z x - \mathfrak{W}_x z \\ \mathfrak{B}_z &= \mathfrak{U}_z + \mathfrak{W}_x y - \mathfrak{W}_y x . \end{aligned} \tag{1}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_n = \mathfrak{U}_x \cos(nx) + \mathfrak{U}_y \cos(ny) + \mathfrak{U}_z \cos(nz) \\ + \mathfrak{W}_x[y\cos(nz) - z\cos(ny)] + \mathfrak{W}_y[z\cos(nx) - x\cos(nz)] \\ + \mathfrak{W}_z[x\cos(ny) - y\cos(nx)] . \end{aligned} \tag{2}$$

Deshalb liegt es nahe, zu setzen

$$\Phi = \mathfrak{U}_x\Phi_1 + \mathfrak{U}_y\Phi_2 + \mathfrak{U}_z\Phi_3 + \mathfrak{W}_x\Phi_4 + \mathfrak{W}_y\Phi_5 + \mathfrak{W}_z\Phi_6 \tag{3}$$

und anzunehmen, daß alle Φ_ν einzeln der Gleichung $\Delta\Phi_\nu = 0$ genügen. Dann lauten die Grenzbedingungen wegen (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} &= -\cos(nx) & \frac{\partial\Phi_4}{\partial n} &= z\cos(ny) - y\cos(nz) \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} &= -\cos(ny) & \frac{\partial\Phi_5}{\partial n} &= x\cos(nz) - z\cos(nx) \\ \frac{\partial\Phi_3}{\partial n} &= -\cos(nz) & \frac{\partial\Phi_6}{\partial n} &= y\cos(nx) - x\cos(ny). \end{aligned} \tag{4}$$

Die Funktionen $\Phi_1 \ldots \Phi_6$ sind die Integrale bei speziellen Bewegungen des Körpers, Φ_1 nämlich, wenn der Körper nur eine Translation mit der Geschwindigkeit Eins in Richtung der x-Achse, Φ_6, wenn er nur eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit Eins um die z-Achse besitzt.

Die Φ_ν sind, unabhängig von der Bewegung des starren Körpers, nur durch seine Oberflächenform gegeben.

Mit der Kenntnis von Φ_1, Φ_2, Φ_3 ist auch das Problem gelöst, daß ein starrer Körper in einen gleichförmigen Strom mit den Geschwindigkeitskomponenten a_x, a_y, a_z gebracht und festgehalten wird, denn

$$\Phi' = -a_x(x + \Phi_1) - a_y(y + \Phi_2) - a_z(z + \Phi_3) \tag{5}$$

genügt auch der Gleichung $\Delta\Phi' = 0$, und es ist an der Oberfläche

$\frac{\partial \Phi'}{\partial n} = 0$, da $\frac{\partial x}{\partial n} = \cos(nx)$, also wegen (4) gleich $-\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}$ ist. Im Unendlichen sind Φ_1, Φ_2, Φ_3 Null; dort ist das gleichförmige Flüssigkeitsfeld demnach ungestört.

155. Kugel in einer Flüssigkeit.[1]) Wir wählen den Kugelmittelpunkt zum Koordinatenursprung; dann ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{1}$$

die Gleichung der Kugeloberfläche, und es ist

$$\cos(nx) = -\frac{x}{R}, \quad \cos(ny) = -\frac{y}{R}, \quad \cos(nz) = -\frac{z}{R}.$$

Die Normale n wird von uns nämlich stets als äußere Normale der Flüssigkeit in den starren Körper hinein positiv gerechnet. Daraus ergibt sich $\Phi_4 = \Phi_5 = \Phi_6 = 0$, da $y\cos(nz) - z\cos(ny) = 0$ usw.

Φ_3 genügt den Gleichungen

$$\Delta \Phi_3 = 0 \tag{2}$$

und für $r = R$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial r} = -\frac{z}{R} = -\cos\vartheta. \tag{3}$$

Eine Lösung von (2) und (3), die im Unendlichen verschwindet, ist

$$\Phi_3 = R^3 \frac{\cos\vartheta}{2r^2} = \frac{R^3 z}{2r^3} = -\frac{R^3}{2}\frac{\partial\, 1/r}{\partial z}. \tag{4}$$

Durch Differentiation von Φ_3 nach den Koordinaten erhält man die Geschwindigkeitskomponenten

$$\mathfrak{v}_x = -\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} = \frac{R^3}{2}\frac{\partial^2\, 1/r}{\partial x \partial z} \text{ usw.} \tag{4'}$$

Die doppelte kinetische Energie $2T$ der Flüssigkeit ist nach Nr. **153** (6), unter der Annahme, daß die Kugelgeschwindigkeit 1 ist,

$$2T = \varrho \int \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n}\, d\sigma = \frac{2\pi R^3}{3}\varrho. \tag{5}$$

Ist die Translationsgeschwindigkeit nicht Eins, sondern $|\mathfrak{B}|$, so ist

$$T = \frac{\varrho \pi R^3}{3}\mathfrak{B}^2. \tag{6}$$

---

1) Dirichlet, *Berl. Akad. Ber.* 1852, S. 12; *Werke* **2**, S. 115. — Stokes, *Camb. Trans.* 8, 1843; *Math. and Phys. Papers* **1**, p. 17.

Bringt man eine Kugel in einen gleichförmigen Strom der Geschwindigkeit C, so wird nach Nr. **154** (5)

$$\Phi' = -C\cos\vartheta\left(r + \frac{R^3}{2r^2}\right). \tag{7}$$

Die durch (4') gegebenen Strömungslinien, die auf den Flächen $\Phi =$ konst. senkrecht stehen, sind in Fig. 111 dargestellt.

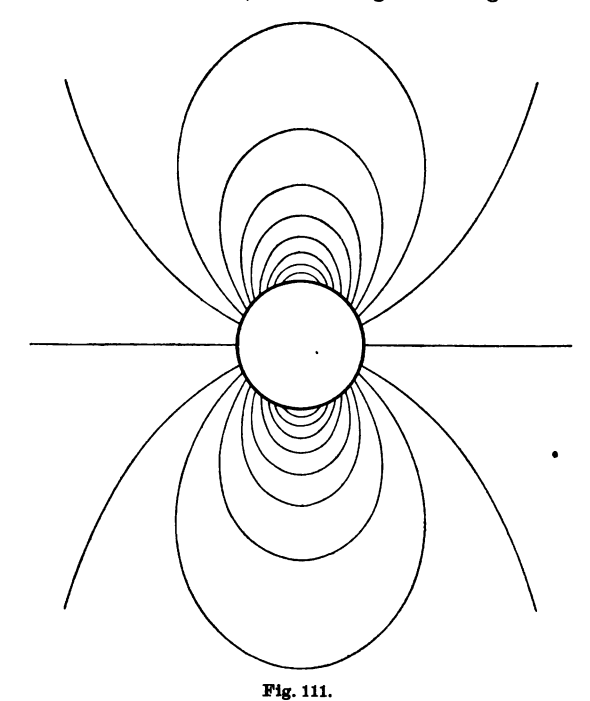


Fig. 111.

156. Ellipsoid in einer Flüssigkeit.[1]) Nach ähnlichen Methoden ergibt sich das Geschwindigkeitsfeld einer imkompressiblen reibungslosen Flüssigkeit, in der sich ein Ellipsoid der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

bewegt. Man findet

1) Clebsch, *Crelles Journ.* **52**, S. 103 und **53**, 1856—57, S. 287. Vgl. auch Green, *Trans. R. Soc. Edingb.* 1833 oder *Math. Papers* p. 315.

$$\Phi_1 = -\frac{X}{4 - X_0}, \quad \Phi_2 = -\frac{Y}{4 - Y_0}, \quad \Phi_3 = -\frac{Z}{4 - Z_0}, \tag{2}$$

$$\Phi_4 = -\frac{(yZ - zY)(b^2 - c^2)}{4(b^2 - c^2) + (Y_0 - Z_0)(b^2 + c^2)} \text{ usw.} \tag{3}$$

Hier bedeutet

$$X = -2x\int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)D}, \quad Y = -2y\int_\lambda^\infty \frac{ds}{(b^2+s)D},$$

$$Z = -2z\int_\lambda^\infty \frac{ds}{(c^2+s)D}, \tag{4}$$

wo λ die positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0 \tag{5}$$

und

$$D = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right)\left(1 + \frac{s}{b^2}\right)\left(1 + \frac{s}{c^2}\right)} \tag{6}$$

ist.

Ferner ist

$$X_0 = 2\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)D}, \quad Y_0 = 2\int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)D}, \quad Z_0 = 2\int_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)D}. \tag{7}$$

Diese drei Größen hängen nur von den Achsenverhältnissen des Ellipsoids ab.

Die Resultate vereinfachen sich wesentlich, wenn man es mit einem Rotationsellipsoid zu tun hat.

157. Zwei Kugeln in einer Flüssigkeit. Befinden sich zwei Kugeln der Radien R und R' in einer Flüssigkeit, und haben ihre Zentren die Koordinaten a, b, c resp. a', b', c' und die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ resp. $\mathfrak{v}'$, so können wir das Geschwindigkeitspotential Φ ähnlich wie wenn nur e i n Körper in der Flüssigkeit wäre, in der Form

$$\Phi = \mathfrak{v}_x\Phi_1 + \mathfrak{v}_y\Phi_2 + \mathfrak{v}_z\Phi_3 + \mathfrak{v}_x'\Phi_1' + \mathfrak{v}_y'\Phi_2' + \mathfrak{v}_z'\Phi_3' \tag{1}$$

ansetzen. Im Falle der Kugeln fallen in (1) die Terme mit $\Phi_4, \Phi_5, \Phi_6, \Phi_4', \Phi_5', \Phi_6'$ fort (vgl. Nr. 155).

$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_3'$ sind hier Funktionen von x, y, z, die als Parameter die augenblickliche Lage der Kugeln $(a, b, \ldots, c')$, aber nicht die Geschwindigkeiten enthalten.

An der Oberfläche der ersten Kugel gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = -\cos(nx), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = -\cos(ny), \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} = -\cos(nz), \\ &\frac{\partial \Phi_1'}{\partial n} = 0, \qquad\quad \frac{\partial \Phi_2'}{\partial n} = 0, \qquad\quad \frac{\partial \Phi_3'}{\partial n} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Die entsprechenden Bedingungen für die Oberfläche der zweiten Kugel erhält man, wenn man die gestrichenen Φ mit den ungestrichenen vertauscht.

Sind die Radien der Kugeln klein gegen ihren gegenseitigen Abstand $r_0 = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')^2}$, so läßt sich die Lösung durch sukzessive Approximation finden, indem wir für Φ die unendliche Reihe ansetzen

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \Phi^{(3)} + \Phi^{(4)} + \cdots \\ + \Phi'^{(1)} + \Phi'^{(2)} + \Phi'^{(3)} + \Phi'^{(4)} + \cdots. \end{aligned} \tag{3}$$

In Gleichung (3) soll $\Phi^{(1)}$ den Wert haben, der bestehen würde, wenn die Kugel 1 allein in der Flüssigkeit wäre, und entsprechend ist Φ_2 das Geschwindigkeitspotential der allein im Felde gedachten Kugel 2.

Nehmen wir $\Phi^{(2)}$ hinzu, so muß in zweiter Näherung auf der Oberfläche der ersten Kugel

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial n} + \frac{\partial \Phi'^{(1)}}{\partial n} = 0 \tag{4}$$

sein und auf der Oberfläche der zweiten Kugel

$$\frac{\partial \Phi'^{(2)}}{\partial n} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n} = 0 \tag{5}$$

usw.

Berücksichtigt man, daß die Funktion

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{R^3}{2}\left(\mathfrak{v}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathfrak{v}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathfrak{v}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) \\ &= +\frac{R^3}{2}\left(\mathfrak{v}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + \mathfrak{v}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + \mathfrak{v}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

sowohl der Gleichung $\Delta \Psi = 0$ als auch an der Oberfläche der ersten Kugel der Bedingung (vgl. Nr. **155** (4))

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \mathfrak{v}_x \cos(nx) + \mathfrak{v}_y \cos(ny) + \mathfrak{v}_z \cos(nz) \tag{7}$$

genügt, so erhalten wir in erster Näherung für $\Phi^{(1)}$ und $\Phi'^{(1)}$

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)} &= \frac{R^3}{2}\left(\mathfrak{v}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + \mathfrak{v}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + \mathfrak{v}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\right)\\ \Phi'^{(1)} &= \frac{R'^3}{2}\left(\mathfrak{v}_x' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial a'} + \mathfrak{v}_y' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial b'} + \mathfrak{v}_z' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial c'}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Um Φ auch in zweiter Näherung zu bekommen, muß nach (4)

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi'^{(1)}}{\partial n}\\ = -\left\{\frac{\partial \Phi'^{(1)}}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial \Phi'^{(1)}}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial \Phi'^{(1)}}{\partial z}\cos(nz)\right\}\end{gathered} \tag{9}$$

auf der Oberfläche der ersten Kugel sein, oder

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial n} &= \frac{R'^3}{2}\left\{\mathfrak{v}_x' \frac{\partial^2 \frac{1}{r'}}{\partial a'^2} + \mathfrak{v}_y' \frac{\partial^2 \frac{1}{r'}}{\partial b' \partial a'} + \mathfrak{v}_z' \frac{\partial^2 \frac{1}{r'}}{\partial c' \partial a'}\right\}\cos(nx)\\ &+ \frac{R'^3}{2}\left\{\mathfrak{v}_x' \frac{\partial^2 \frac{1}{r'}}{\partial a' \partial b'} + \mathfrak{v}_y' \frac{\partial^2 \frac{1}{r'}}{\partial b'^2} + \mathfrak{v}_z' \frac{\partial^2 \frac{1}{r'}}{\partial c' \partial b'}\right\}\cos(ny)\\ &+ \frac{R'^3}{2}\left\{\mathfrak{v}_x' \frac{\partial^2 \frac{1}{r'}}{\partial a' \partial c'} + \mathfrak{v}_y' \frac{\partial^2 \frac{1}{r'}}{\partial b' \partial c'} + \mathfrak{v}_z' \frac{\partial^2 \frac{1}{r'}}{\partial c'^2}\right\}\cos(nz).\end{aligned} \tag{10}$$

Ersetzen wir in den geschweiften Klammern r' durch den genäherten Wert r_0, so folgt durch Vergleichung von (10) mit (7) aus (6), daß

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)} = &-\frac{R^3 R'^3}{4}\left\{\mathfrak{v}_x' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a'^2} + \mathfrak{v}_y' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b' \partial a'} + \mathfrak{v}_z' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c' \partial a'}\right\}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\\ &-\frac{R^3 R'^3}{4}\left\{\mathfrak{v}_x' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a' \partial b'} + \mathfrak{v}_y' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b'^2} + \mathfrak{v}_z' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c' \partial b'}\right\}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}\\ &-\frac{R^3 R'^3}{4}\left\{\mathfrak{v}_x' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a' \partial c'} + \mathfrak{v}_y' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b' \partial c'} + \mathfrak{v}_z' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c'^2}\right\}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}.\end{aligned} \tag{11}$$

$\Phi'^{(2)}$ ergibt sich aus $\Phi^{(2)}$ durch Vertauschung der gestrichenen Buchstaben mit den ungestrichenen.[1])

1) Das Flüssigkeitsfeld zweier Kugeln ist behandelt worden von Bjerknes, *Mémoire sur le mouvement simultané de corps sphériques*

Kapitel III.

Feste Körper in Flüssigkeiten. Dynamik.

158. Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. *Dynamischer Teil.* Während bisher nur die Frage nach der Flüssigkeitsströmung behandelt worden ist, wenn die in derselben befindlichen Körper vorgeschriebene Bewegungen ausführen, wollen wir in diesem Kapitel die Bewegung der Körper unter dem Einfluß äußerer Kräfte und der strömenden Flüssigkeit behandeln.

Die kinetische Energie. Die kinetische Energie der starren Körper ist bekanntlich (vgl. S. 45 Nr. **27**) eine quadratische Funktion der Geschwindigkeitskomponenten $\mathfrak{U}_x, \mathfrak{U}_y, \mathfrak{U}_z$ und der Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{W}_x, \mathfrak{W}_y, \mathfrak{W}_z$ um drei aufeinander senkrechte Achsen.

Da das Geschwindigkeitspotential die Form (vgl. Nr. **154** (3)) hat

$$\Phi = \mathfrak{U}_x \Phi_1 + \mathfrak{U}_y \Phi_2 + \mathfrak{U}_z \Phi_3 + \mathfrak{W}_x \Phi_4 + \mathfrak{W}_y \Phi_5 + \mathfrak{W}_z \Phi_6, \quad (1)$$

wo die $\Phi_1 \ldots \Phi_6$ von den $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ unabhängig sind, und da andrerseits die kinetische Energie der Flüssigkeit (Nr. **153** (6))

$$T_1 = \frac{1}{2} \varrho \int \operatorname{grad}^2 \Phi \, dS_1 = \frac{\varrho}{2} \int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma \quad (2)$$

ist, wo ϱ die konstante Dichte der Flüssigkeit, S_1 den momentan von ihr eingenommenen Raum bedeutet, so ergibt sich durch Substitution von (1) in (2), daß auch die kinetische Energie der Flüssigkeit, und somit die gesamte kinetische Energie eine quadratische Funktion der $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ ist.

Eine homogene quadratische Funktion von 6 Variabeln hat 21 Koeffizienten, die sich aber, da in dem Bezugssystem 6 Größen, der Anfangspunkt und 3 Winkel willkürlich sind, auf 15 reduzieren.[1]) Sind gewisse Symmetrieebenen oder -achsen vorhanden, so wird sich die kinetische Energie durch eine noch geringere Zahl von Konstanten darstellen lassen.

Anstatt durch die Lage und Geschwindigkeit in rechtwinkligen Koordinaten läßt sich die Bewegung auch durch allgemeine La-

---

variables dans un fluide indéfini et incompressible, Christiania 1871; W. Thomson, *Proc. Roy. Soc.* **19**, 1869; *Phil. Mag.* 1870; W. M. Hicks, *Phil. Trans.* 1880, p. 455; R. A. Herman, *Quat. Journ. Math.* **22**, 1887; Basset, *Proc. Lond. Math. Soc.* **18**, p. 369, 1887; C. Neumann, *Hydrodynamische Untersuchungen,* Leipzig 1883; Basset, *Hydrodynamics* **1**, Cambridge 1888.

1) Clebsch, *Math. Ann.* **3**, 1870, S. 238; s. auch H. Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der math. Phys.* **2**, 5. Aufl., S. 454, Braunschweig 1912; H. Minkowski, *Berl. Sitzungsber.* 1888.

grangesche Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ und ihre Ableitungen nach der Zeit $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ beschreiben. Dann wird die kinetische Energie des Systems eine homogene quadratische Funktion der $\dot{q}$, deren Koeffizienten Funktionen der q sind. Das läßt sich ebenso beweisen wie der entsprechende Satz für starre Körper (vgl. Nr. **19** (2)).

159. Das Hamiltonsche Prinzip. Mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips lassen sich die Bewegungsgleichungen der starren Körper aufstellen. Das haben zuerst Thomson und Tait[1]) getan.

Ist $\delta' A$ die bei einer virtuellen Verschiebung geleistete Arbeit

$$\delta' A = \Sigma(\mathfrak{f}, \delta \mathfrak{s}),$$

so ist (vgl. Nr. **17**)

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \{\delta T + \delta' A\} = 0 \tag{1}$$

der Ausdruck des Hamiltonschen Prinzips. Haben die Kräfte ein Potential, so daß $\delta' A = -\delta V$ ist, so wird

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt (T - V) = 0 \tag{2}$$

oder in der zweiten Form der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} = \frac{\partial (T - V)}{\partial q_\nu} \tag{3}$$

(vgl. Nr. **19** (9)).

160. Integrale der Bewegungsgleichungen und der Minimalsatz von Minkowski.[2]) Wirken keine äußeren Kräfte auf das System, so ergeben sich aus Nr. **159** die Bewegungsgleichungen (vgl. Nr. **29** (7))

---

1) Thomson u. Tait, *Nat. phil.* § 320 oder deutsch von Helmholtz u. Wertheim, Braunschweig 1871, **1**, p. 292. S. auch G. Kirchhoff, *Crelles Journ.* **71**, 1869 oder *Ges. Abh.* S. 376 u. 404. Boltzmann wies jedoch darauf hin, daß die Theorie eine Modifikation verlangt, wenn der Flüssigkeitsraum mehrfach zusammenhängend ist. *Crelles Journ.* **73**, 1871, was allgemein dann von C. Neumann, *Hydrodynamische Untersuchungen*, Leipzig 1883, durchgeführt wurde (vgl. auch C. Larmor, *Proc. Lond. Math. Soc.* **15**, 1884). Zu erwähnen sind noch J. Purser, *Phil. Mag.* 1878; Basset, *Hydrodynamics*, Cambridge 1888, Kap. 8; H. Lamb, *Lehrb. d. Hydrodynamik*, deutsch von J. Friedel, Berlin und Leipzig 1907, Kap. 6; H. Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen d math. Phys.*, 5. Aufl., **2**, S. 465, Braunschweig 1912.

2) H. Minkowski, *Berl. Ber.* 1888.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial v},
\end{aligned} \tag{1}$$

und wenn wir die Gleichungen Nr. **29** (11') für den Fall erweitern, daß die Translationen und Rotationen gleichzeitig vorhanden sind,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= u\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= v\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q},
\end{aligned} \tag{2}$$

wo u, v, w resp. p, q, r die Komponenten der Translations- resp. Drehgeschwindigkeit bezüglich dreier im Körper fester Achsen bedeuten.[1])

Da T eine homogene Funktion 2. Grades der u, v, w, p, q, r ist, so gilt der Eulersche Satz

$$2T = u\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{\partial T}{\partial w} + p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{3}$$

Da ferner

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt}, \tag{4}$$

so folgt

$$\frac{dT}{dt} = u\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} + p\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + \cdots. \tag{5}$$

Substituieren wir die Gleichungen (1) und (2) in (5), so folgt, daß die kinetische Energie konstant bleibt

$$2T = C_1. \tag{6}$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (1) resp. mit $\frac{\partial T}{\partial u}, \frac{\partial T}{\partial v}, \frac{\partial T}{\partial w}$ und addieren, so folgt ferner

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = C_2. \tag{7}$$

---

1) G. Kirchhoff, *Crelles Journ.* 71, 1869 (*Ges. Abhandl.* S. 376); *Mechanik*, 19. Vorlesung.

Schließlich ergibt die Multiplikation von (1) mit $\frac{\partial T}{\partial p}, \frac{\partial T}{\partial q}, \frac{\partial T}{\partial r}$ und von (2) mit $\frac{\partial T}{\partial u}, \frac{\partial T}{\partial v}, \frac{\partial T}{\partial w}$ und Addition aller 6 Gleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r} = C_3 . \tag{8}$$

Die Gleichungen (6), (7), (8) sind Integrale von (1) und (2).

Da für stationäre Bewegungen die linken Seiten von (1) und (2) Null sind, so folgt aus (1)

$$p = \lambda \frac{\partial T}{\partial u}, \quad q = \lambda \frac{\partial T}{\partial v}, \quad r = \lambda \frac{\partial T}{\partial w}, \tag{9}$$

wo λ eine willkürliche Konstante ist.

Aus (2) ergibt sich, wenn wir p, q, r durch (9) ersetzen,

$$\left(u - \lambda \frac{\partial T}{\partial p}\right)\frac{\partial T}{\partial v} = \left(v - \lambda \frac{\partial T}{\partial q}\right)\frac{\partial T}{\partial u} \quad \text{usw.}$$

oder

$$\begin{aligned} u - \lambda \frac{\partial T}{\partial p} &= k \frac{\partial T}{\partial u} \\ v - \lambda \frac{\partial T}{\partial q} &= k \frac{\partial T}{\partial v} \\ w - \lambda \frac{\partial T}{\partial r} &= k \frac{\partial T}{\partial w}, \end{aligned} \tag{10}$$

wo k eine willkürliche Konstante bedeutet.

(9) und (10) lassen sich in dem Variationssatze zusammenfassen

$$\delta\left(T - \lambda C_3 - \frac{k}{2} C_2\right) = 0, \tag{11}$$

wenn man die Impulse $\frac{\partial T}{\partial u}, \frac{\partial T}{\partial v}, \frac{\partial T}{\partial w}$ und die Drehimpulse $\frac{\partial T}{\partial p}, \cdots$ als unabhängige Variable betrachtet oder in Worten:

Bei der wirklich stattfindenden stationären Bewegung ist die kinetische Energie kleiner als bei jeder anderen stationären Bewegung, die bei denselben Werten von C_2 und C_3 denkbar ist.

Bei der Ableitung der Gleichungen (9) und (10) aus (11) ist zu berücksichtigen, daß, wenn man T als Funktion der Impulskomponenten $\partial T/\partial u$ usw. auffaßt, nach Nr. **20** (6)

$$\frac{\partial T}{\partial \frac{\partial T}{\partial u}} = u \quad \text{usw.}$$

ist.

Kirchhoff[1]) hat zuerst darauf hingewiesen, daß die Gleichungen (1) und (2) befriedigt werden für $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, wenn u, v, w konstant und zwar

$$u : v : w = \frac{\partial T}{\partial u} : \frac{\partial T}{\partial v} : \frac{\partial T}{\partial w} \tag{12}$$

sind, d. h. eine stationäre Translationsbewegung ist in drei aufeinander senkrechten Richtungen möglich, die sich als die Hauptachsenrichtungen des Ellipsoids $T =$ konst. ergeben, wenn wir in T u, v, w als orthogonale Koordinaten auffassen.

161. Bewegung eines Rotationskörpers. Ist der Körper ein Rotationskörper, dessen Figurenachse wir als z-Achse wählen, so hat die kinetische Energie die Form

$$2T = c_{11}(u^2 + v^2) + c_{33}w^2 + c_{44}(p^2 + q^2) + c_{66}r^2. \tag{1}$$

Aus der letzten Gleichung Nr. 160 (2) folgt dann

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \text{d. h.} \quad r = \text{konst.} \tag{2}$$

Auch die anderen Bewegungsgleichungen lassen sich durch elliptische Funktionen vollständig integrieren.[1])

Nehmen wir noch spezieller $v = 0$, $p = 0$, $r = 0$ an, so wird die kinetische Energie

$$2T = c_{11}u^2 + c_{33}w^2 + c_{44}q^2. \tag{3}$$

Wir wollen die stationäre Bewegung suchen, die bei dieser Annahme möglich ist.

Nach dem Minkowskischen Minimalsatz muß bei gegebenem

$$c_{11}^2 u^2 + c_{33}^2 w^2 = C_2 \tag{4}$$

T ein Minimum werden, denn C_3 ist beständig Null, also konstant.

Zunächst muß $q = 0$ sein.

Ferner können wir

$$c_{33}w = J\cos\vartheta$$
$$c_{11}u = -J\sin\vartheta$$

setzen, wenn ϑ der Winkel ist, den der Impuls J mit der Figurenachse bildet (vgl. Fig. 112). Dann wird

Fig. 112.

$$2T = J^2\left(\frac{\sin^2\vartheta}{c_{11}} + \frac{\cos^2\vartheta}{c_{33}}\right)$$

1) G. Kirchhoff, l. c.

ein Minimum bei gegebenem

$$J^2 = C_2 .$$

Dieses Minimum findet aber statt für $\vartheta = 0$, wenn $c_{33} > c_{11}$ ist, dagegen für $\vartheta = \pm \pi/2$, wenn $c_{33} < c_{11}$.

Der erstere Fall entspricht z. B. einem abgeplatteten Rotationsellipsoid oder einer Kreisscheibe. Sie bewegt sich stabil und stationär so, daß sie ihre Breitseite der Strömung entgegenstellt.

Daß in diesem Falle $\vartheta = 0$ wirklich die stabile Lage ist, erkennt man aus der einen Bewegungsgleichung

$$c_{44} \frac{dq}{dt} = (c_{33} - c_{11}) u w, \tag{5}$$

die in unserer Bezeichnungsweise in

$$\frac{d^2 2\vartheta}{dt^2} = - \frac{c_{33} - c_{11}}{c_{11} c_{33} c_{44}} C_2 \sin 2\vartheta \tag{6}$$

übergeht, da $q = d\vartheta/dt$ ist. Gleichung (6) ist der Pendelgleichung analog, d. h. der Körper wird, wenn er aus der Lage $\vartheta = 0$ ein wenig abgelenkt ist, kleine Pendelschwingungen um dieselbe ausführen.

Mögliche auch nicht stationäre Bewegungen finden sich gezeichnet bei Lamb.[1])

Ist jedoch $c_{33} < c_{11}$, wie bei einem Geschoß, so ist die Bewegung in Richtung der Achse labil; sie wird jedoch wieder stabil durch ein hinreichend großes konstantes r (Drall).[2])

162. Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit. Die kinetische Energie einer mit der Geschwindigkeit v bewegten Kugel in einer Flüssigkeit setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie der Flüssigkeit (Nr. **155** (6))

$$T_1 = \frac{\varrho \pi R^3}{3} v^2 \tag{1}$$

und der kinetischen Energie der Kugel selbst

$$T_2 = \frac{M}{2} v^2 . \tag{2}$$

Nennen wir die Masse der von der Kugel verdrängten Flüssig-

1) H. Lamb, *Lehrbuch d. Hydrodynamik*, deutsch von J. Friedel, Leipzig und Berlin 1907, S. 204.

2) Greenhill, *Quat. Journ. Math.* **16**, 1879; s. auch H. Lamb l. c. p. 205. Versuche über Pendelung der Geschosse sind von F. Neesen, *Verh. d. deutschen phys. Ges.* **11**, 1909, S. 724 angestellt.

keit M', so können wir T_1 in der Form

$$T_1 = \frac{M'}{4} v^2 \tag{3}$$

schreiben, so daß

$$T = T_1 + T_2 = \frac{v^2}{2}\left(M + \frac{M'}{2}\right) \tag{4}$$

wird.

Es ist also durch das Vorhandensein der Flüssigkeit die Masse M der Kugel scheinbar um die halbe Masse der verdrängten Flüssigkeit vermehrt.

Die Bewegungsgleichung Nr. **159** (3) ergibt, wenn keine äußeren Kräfte wirken ($V = 0$), eine Translationsbewegung mit konstanter Geschwindigkeit, d. h. es findet nach dieser Theorie infolge der Anwesenheit der Flüssigkeit nicht, wie man es beobachtet, eine Abnahme der Geschwindigkeit statt, oder, anders ausgedrückt, es bedarf keiner Kraft, um eine Kugel mit konstanter Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit vorwärts zu bewegen. Diese Abweichung von der Erfahrung hat ihren Grund darin, daß die Reibungskräfte der Flüssigkeit vernachlässigt worden sind.

In ähnlicher Weise lassen sich die Koeffizienten im Ausdrucke der kinetischen Energie aus den Resultaten von Nr. **156** für die Bewegung eines Ellipsoids in einer Flüssigkeit berechnen.

Spezielle Fälle wie Umdrehungsellipsoid, Kreisscheibe, dünner Stab finden sich z. B. bei W. Wien[1]) diskutiert.

163. Bewegung zweier Kugeln in einer Flüssigkeit. Um die kinetische Energie zu berechnen, die die Flüssigkeit hat, wenn in ihr zwei Kugeln der Radien R und R', deren Zentralabstand r_0 beträgt, sich auf der Zentralen mit den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_x$ und $\mathfrak{v}_x'$ bewegen, brauchen wir in den Resultaten von Nr. **157** nur $\mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}_z = 0$, $b = c = b' = c' = 0$ zu setzen. Dann wird

$$\begin{aligned}\Phi = + \frac{R^3}{2}\mathfrak{v}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + \frac{R'^3}{2}\mathfrak{v}_x' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial a'} - \frac{R^3 R'^3}{4}\mathfrak{v}_x' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a'^2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \\ - \frac{R^3 R'^3}{4}\mathfrak{v}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2}\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial a'}.\end{aligned} \tag{1}$$

Das Integral $\int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r}\, d\sigma$, über die erste Kugel erstreckt, läßt sich unter der Annahme, daß $\frac{R}{r_0}$ und $\frac{R'}{r_0}$ sehr klein sind, genau

1) W. Wien, *Lehrb. d. Hydrodynamik,* Leipzig 1900, S. 147—150.

genug auswerten, wenn man den Winkel zwischen r und der Zentralen mit ϑ bezeichnet und

$$r'^2 = r_0^2 + r^2 - 2 r_0 r \cos\vartheta$$

durch die Näherungsformel

$$r' = r_0 - r \cos\vartheta$$

ersetzt und sich auf die Glieder niedrigster Ordnung in $\frac{R}{r_0}$ und $\frac{R'}{r_0}$ beschränkt.

Fügt man das analoge Integral über die Oberfläche der zweiten Kugel hinzu, so erhält man für die kinetische Energie der Flüssigkeit

$$T_1 = \pi\varrho \left\{ \frac{R^3}{3} \mathfrak{v}_x^2 + \frac{R'^3}{3} \mathfrak{v}_x'^2 - 2 \frac{R^3 R'^3}{r_0^3} \mathfrak{v}_x \mathfrak{v}_x' \right\}. \qquad (2)$$

Addiert man hierzu die kinetische Energie der Kugeln selbst, so erhält man

$$T = \frac{M}{2} v^2 + \frac{M'}{2} v'^2 + \pi\varrho \left\{ \frac{R^3}{3} v^2 + \frac{R'^3}{3} v'^2 - 2 \frac{R^3 R'^3}{r_0^3} v v' \right\}. \qquad (3)$$

Aus Nr. **159** (3) folgt die Bewegungsgleichung der ersten Kugel

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v} = \mathfrak{F}_x + \frac{\partial T}{\partial a}. \qquad (4)$$

Soll keine Beschleunigung der beiden Kugeln eintreten, so muß nach (3)

$$\mathfrak{F}_x = -6\pi\varrho \frac{R^3 R'^3}{r_0^4} v'^2 \qquad (5)$$

sein, oder, anders ausgedrückt, die zweite Kugel übt auf die erste die scheinbare Abstoßungskraft $+6\pi\varrho \frac{R^3 R'^3}{r_0^4} v'^2$ aus.[1]) Die Kraft, welche die erste Kugel auf die zweite ausübt, ist im allgemeinen (wenn $|v| \neq |v'|$) nicht der Kraft gleich und entgegengesetzt, welche die zweite auf die erste ausübt.

Führen beide Kugeln Schwingungen gleicher Periode aus, so verschwindet der Mittelwert der linken Seite von (4). Damit die Schwingungen möglich sind, muß also auf die erste Kugel eine äußere Kraft wirken, deren zeitlicher Mittelwert gleich dem zeitlichen Mittelwert von $-\frac{\partial T}{\partial a} = -6\pi\varrho \frac{R^3 R'^3}{r_0^4} v v'$ ist. Diese Kraft ist je nach der Phasendifferenz der Bewegung der beiden Kugeln eine Anziehungs- oder Abstoßungskraft.[2])

1) Betreffs des Vorzeichens ist zu bemerken, daß wir als positive x-Achse die Richtung vom Zentrum der zweiten Kugel zu dem der ersten angenommen haben.

2) C. A. Bjerknes, *Christ. Förhandl.* 1863, 1868, 1871, 1875;

Ändert sich das Volumen der Kugeln periodisch, oder, was auf dasselbe herauskommt, haben wir es mit Quellen variabler Ergiebigkeit zu tun, so entstehen zwischen diesen Kugeln (resp. Quellen) Anziehungs- oder Abstoßungskräfte (je nach der Phasendifferenz der Schwingungen), die umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes sind, so daß die Elementarkräfte der Gravitation resp. der Elektrizität und des Magnetismus durch die Einwirkung einer unsichtbaren Flüssigkeit (Äther) gedeutet werden können.[1])

Brill[2]) zeigt, daß zwei Senken in einer inkompressiblen Flüssigkeit Kräfte erfahren, die dem Gravitationsgesetze analog sind; dabei sind die „Massen" der Senken nicht den Einflußgeschwindigkeiten, sondern den Impulsen proportional zu setzen.

Kapitel IV.

Zweidimensionale Bewegung.

164. Potential und Strömungsfunktion. Ist das Strömungsfeld von einer Koordinate, etwa z, unabhängig, so reduziert sich die Kontinuitätsgleichung für den Fall der wirbelfreien Bewegung (vgl. Nr. **153** (1)) auf

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

während die Geschwindigkeitskomponenten den Gleichungen

$$\mathfrak{v}_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{v}_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{v}_z = 0 \quad (2)$$

genügen.

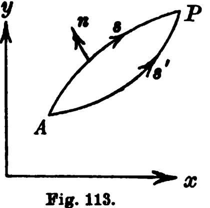


Fig. 113.

Die Flüssigkeitsmenge, welche pro Zeiteinheit durch eine Zylinderfläche in der Richtung der Normalen n fließt, der sogenannte „*Fluß*", deren Spur in der xy-Ebene die Kurve $s = \widehat{AP}$ (vgl. Fig. 113) ist, und die zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 1$

Gött. Nachr. 1876. Experimentell untersuchte er die Frage *Gött. Nachr.* 1877; *C. R.* **84**, **88**, **89** (1877—79). V. Bjerknes, *Hydrodynamische Fernkräfte*, Leipzig 1900. F. Guthrie, *Proc. Roy. Soc.* **19**, 1869. W. Thomson, *Reprint of papers on electrostatics* § 741.

1) V. Bjerknes, *Acta Mathematica* **30**, p. 99, 1905; *Arch. des sc. phys. et nat.* **20**, 1905; *Arkiv för Mat., Astr. och Fysik* **4**, 1907; „Die Kraftfelder", Braunschweig 1909. Einwendungen gegen die Möglichkeit einer hydrodynamischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen macht H. Witte, *Ann. Phys.* (4) **30**, 1909, S. 337.

2) A. Brill, *Math. Ann.* **58**, 1904; *Mechanik raumerfüllender Massen*, Leipzig und Berlin 1909, S. 127 (vgl. auch B. Riemann, *Ges. Werke* S. 503 und H. Poincaré, *Électricité et optique*, 2. Aufl., 1901, p. 623).

liegt, berechnet sich nach der Gleichung

$$\int_A^P \mathfrak{v}_n \, ds = -\int_A^P \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, ds. \tag{3}$$

Da nach dem Gaußschen Integralsatze und nach (1) für ein geschlossenes Flächenstück σ mit der Randkurve s

$$\int \Delta \Phi \, d\sigma = \oint \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, ds = 0 \tag{4}$$

ist, so folgt, daß

$$(s) \int_A^P \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, ds = (s') \int_A^P \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, ds \tag{5}$$

ist, wo (s) resp. (s') die Integrationswege auf zwei verschiedenen Kurven zwischen A und P bedeuten. Also kann der Fluß nur Funktion der Koordinaten des Anfangs- und Endpunktes A resp. P der Kurve sein, er muß sich also in der Form

$$\Psi(P) - \Psi(A) = -\int_A^P \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, ds \tag{6}$$

darstellen lassen.

Hat P die variablen Koordinaten x, y, A die festen Koordinaten a, b, so geht (6) in

$$\Psi(x, y) - \Psi(a, b) = -\int_{A(a,b)}^{P(x,y)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, ds$$

über, und wenn die beiden Punkte sich unendlich nahe liegen, ergibt sich

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}. \tag{7}$$

Ist ds speziell ein Linienelement, das die Richtung der x-Achse resp. der y-Achse hat, so gilt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{8}$$

Ψ heißt die *Strömungsfunktion.*

Die kinetische Energie der Flüssigkeit, die sich innerhalb eines Zylinders der Grundfläche σ und der Höhe 1 befindet, ist nach

Nr. 153 (6), wenn s die Randkurve von σ bedeutet,

$$T = \frac{\varrho}{2}\int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \tag{9}$$

und mit Benutzung von (7)

$$T = -\frac{\varrho}{2}\int \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = -\frac{\varrho}{2}\int \Phi d\Psi. \tag{10}$$

Die *Äquipotentialkurven* $\Phi =$ konst. stehen auf den *Stromlinien* $\Psi =$ konst. senkrecht, da nach (8)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \tag{11}$$

ist.

Da Ψ nach (8) auch der Gleichung $\Delta \Psi = 0$ gehorcht, und da die Gleichungen (8) sich nicht verändern, wenn man Φ durch Ψ und Ψ durch $-\Phi$ ersetzt, so folgt, daß die Vertauschung der Strömungslinien mit den Äquipotentiallinien wieder eine mögliche Strömung ergibt.

Aus der Funktionentheorie ist bekannt, daß der reelle Teil Φ und der imaginäre Teil Ψ jeder komplexen Funktion $X = \Phi + i\Psi$ des Arguments $z = x + yi$ (man wird z nicht mit der dritten Raumkoordinate verwechseln) den Bedingungen (1) und (8) genügt. Hierdurch ist es ermöglicht, die Methoden der Funktionen komplexer Variablen zur Integration zweidimensionaler Probleme der wirbelfreien und reibungslosen Flüssigkeitsbewegung heranzuziehen.

Hierbei kommt die konforme Abbildung eines Polygons in der z-Ebene und eines Flächenstreifens in der X-Ebene auf die Halbebene und damit die Abbildung des Polygons auf den Flächenstreifen in Frage, die sich nach den Methoden von Schwarz und Christoffel[1]) bewerkstelligen lassen.

165. Austritt der Flüssigkeit aus einem Kanal. Wir wollen nur ein Beispiel geben, welches von Helmholtz[2]) stammt.

1) H. A. Schwarz, *J. f. Math.* **70**, 1869, S. 105; E. B. Christoffel, *Ann. di mat.* (2) **1**, 1867; **4**, 1870. Man vgl. ferner z. B. H. Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen d. math. Physik* **1**, 5. Aufl., Braunschweig 1910, S. 115 ff. und S. 351 ff. oder G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mechanik*, 4. Aufl., Leipzig 1897, S. 273 ff.

2) H. v. Helmholtz, *Berl. Ber.* 1868, S. 215 = *Wissensch. Abh.* **1**, S. 146.

Es sei

$$z = X + e^X, \tag{12}$$

d. h.

$$x = \Phi + e^\Phi \cos \Psi, \quad y = \Psi + e^\Phi \sin \Psi. \tag{13}$$

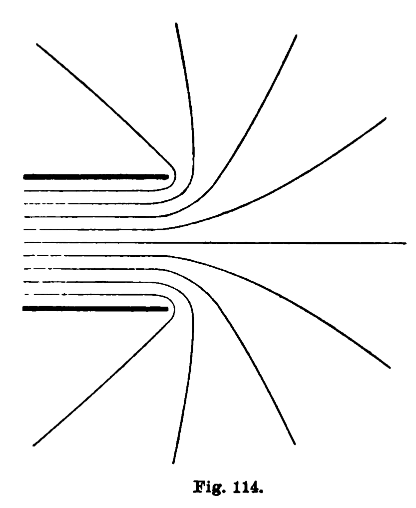
Die x-Achse entspricht dem Werte $\Psi = 0$, ist also Stromlinie. Ferner entspricht $\Psi = \pi$ dem Werte $y = \pi$, während $x = \Phi - e^\Phi$ wird, d. h. den Werten

$$\Phi = +\infty, 0, -\infty$$

entsprechen die Werte

$$x = -\infty, -1, -\infty,$$

so daß also dem Werte $\Psi = \pi$ eine doppelt zu rechnende Parallele zur x-Achse im Abstande π entspricht, die sich von $x = -\infty$ bis $x = -1$ erstreckt (vgl. Fig. 114). Ebenso entspricht $\Psi = -\pi$ der Parallelen zur x-Achse im Abstande $-\pi$, die sich von $x = -\infty$ bis $x = -1$ erstreckt.


Fig. 114.

Für große negative Werte von Φ wird nach (13) $\Phi = x$, d. h. die Geschwindigkeit hat die Richtung der negativen x-Achse und den Betrag 1; für große positive Werte von Φ wird nach (13) $x = e^\Phi \cos \Psi$, $y = e^\Phi \sin \Psi$ oder $\Phi = \log r$, d. h. die Strömungsgeschwindigkeit ist unendlich klein, und die Strömungslinien sind sämtlich radial auf den Punkt $x = y = 0$ zu gerichtet.

Wir haben es also mit einer Strömung zu tun, die aus der unendlichen Flüssigkeit in einen dünnwandigen unendlich langen Kanal eintritt.

In der Nähe der Enden der Kanalwände ($\Phi = 0$, $\Psi = \pm \pi$) wird die Geschwindigkeit unendlich groß, dort wird also nach Nr. 152 eine Strahlbildung eintreten.

Setzt man etwas allgemeiner als in (12)

$$z = -\frac{1}{c} X + \frac{h}{\pi} e^{-\frac{\pi X}{c h}}, \tag{14}$$

so ist die Kanalbreite $2h$, die Geschwindigkeit im Kanal hat die umgekehrte Richtung, die Flüssigkeit strömt also aus dem Kanal in den unendlichen Raum heraus und die Geschwindigkeit im Kanal in einer unendlichen Entfernung von der Kanalmündung hat den Betrag c.

Auf diese Ausführungen wollen wir uns beschränken, zumal da wegen der Vernachlässigung der Reibung die wirkliche Bewegung doch merklich anders ausfallen wird. So ist z. B. auch die Tangentialgeschwindigkeit einer reibenden Flüssigkeit an festen Wänden gleich Null, während sie nach dem Obigen endlich bleibt.

Es möge nur noch an die freien Grenzen erinnert werden, die durch Strahlbildung auftreten können (vgl. Nr. 152), und an denen die Flüssigkeit auf der einen Seite in Ruhe sein kann, während ihre Geschwindigkeit auf der anderen Seite der Diskontinuitätsfläche einen konstanten Wert hat.[1])

Kapitel V.

Wellen.

166. Oberflächenwellen.[2]) Oszillatorische Bewegungen inkompressibler Flüssigkeiten unter dem Einfluß der Schwere sollen in dieser Nummer unter der Bedingung behandelt werden, daß die Geschwindigkeit ein Potential hat, und daß die Geschwindigkeitskomponenten so klein sind, daß ihre höheren Potenzen und Produkte vernachlässigt werden können.

Nach Nr. 150 (7) genügt Φ der Gleichung

$$\Delta\Phi = 0. \tag{1}$$

Ferner muß an allen von Wänden begrenzten Oberflächen der Flüssigkeit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \tag{2}$$

und an den freien Oberflächen der Druck

$$p = \text{konst.} \tag{3}$$

sein.

Das Potential der äußeren Kraft (Schwerkraft) ist

$$V = -gz, \tag{4}$$

wenn die z-Achse senkrecht nach unten gerichtet ist. Also wird

1) Vgl. G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mechanik,* 4. Aufl., Leipzig 1897, S. 290 ff.; H. Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik* 2, 5. Aufl., S. 483 ff.

2) Vgl. Airy, *Tides and Waves*, §§ 160 ff., 1845.

aus Nr. 150 (5) unter Vernachlässigung der zweiten Potenzen von Φ

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\varrho} - gz = \text{konst.} \tag{5}$$

Die freie Oberfläche sei genähert die xy-Ebene, also ist an ihr, wenn wir den dort herrschenden Druck p_0 nennen,

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p_0}{\varrho} - gz = \text{konst.} \tag{6}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach t (bezogen auf ein materielles Teilchen) erhalten wir an der freien Oberfläche

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{dz}{dt} = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = g\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{7}$$

und zwar darf in (7) genähert $z = 0$ gesetzt werden.

Durch (1), (2) und (7) ist die Bewegung bestimmt, wenn sie zur Zeit $t = 0$ gegeben ist.

Zur Integration der Gleichung (1) nehmen wir an, daß Φ in der Form

$$\Phi = \Psi \cdot Z \cdot T \tag{8}$$

dargestellt werden kann, wo Ψ von x und y, Z von z, T von t abhängig ist.

Wegen (1) gilt dann

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + k^2 \Psi = 0 \tag{9}$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 Z. \tag{10}$$

Ist der Boden horizontal, also z. B. die Ebene $z = h$, so ergibt (10) zusammen mit der auf den Boden angewandten Gleichung (2), die die Form $\left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=h} = 0$ annimmt,

$$Z = \cosh k(h - z). \tag{11}$$

Aus (7) folgt dann für T die Gleichung

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -gk \operatorname{tgh} kh \cdot T, \tag{12}$$

deren Integral

$$T = A\cos\frac{2\pi}{\tau}(t - t_0) \tag{13}$$

lautet, wo

$$\frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{gk \operatorname{tgh} kh} \tag{14}$$

ist.

Ist die Bewegung von y unabhängig, so ergibt (9) als Integrale für Ψ $\sin kx$ und $\cos kx$.

Stehende Wellen. Sind ferner noch die Ebenen $x = 0$ und $x = l$ feste Wände, so wird der Gleichung (2) dadurch genügt, daß man für Ψ in (8) $\cos \frac{n\pi x}{l}$ setzt, wo $n = \frac{kl}{\pi}$ eine beliebige ganze Zahl ist.

Das allgemeinste Integral lautet demnach

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos \frac{2\pi t}{\tau_n} + B_n \sin \frac{2\pi t}{\tau_n}\right) \cos \frac{n\pi x}{l} \cosh \frac{n\pi}{l}(h-z). \quad (15)$$

Hierbei ist

$$\frac{2\pi}{\tau_n} = \sqrt{g\frac{n\pi}{l}\,\mathrm{tgh}\,\frac{n\pi h}{l}}. \quad (16)$$

Die Konstanten A_n und B_n können mit Hilfe der Fourierschen Reihe so bestimmt werden, daß für $t = 0$ die Form der Oberfläche und die vertikal nach unten gerichtete Geschwindigkeitskomponente jeden Teilchens derselben gegeben sind, so daß z. B. beliebige kleine Anfangsstörungen der freien Oberfläche dargestellt werden können.[1]

Die Schwingungsdauern der durch (15) dargestellten stehenden Wellen ergeben sich aus (16). Sie werden besonders einfach, wenn $\frac{n\pi h}{l}$ sehr klein oder sehr groß ist.

Im ersteren Falle, d. h. in sehr seichtem Wasser, wird

$$\tau_n = \frac{2l}{n\sqrt{gh}},$$

im zweiten, d. h. in sehr tiefem Wasser

$$\tau_n = 2\sqrt{\frac{\pi l}{ng}}.$$

Fortschreitende Wellen. Ist die Wassermenge nicht durch vertikale Wände begrenzt, so ergibt (8) z. B. Wellen, die in der x-Richtung fortschreiten, in der Form

$$\Phi = \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - kx\right) \cosh k(h-z), \quad (17)$$

1) Poisson, *Paris Mém. de l'Ac.* **1**, 1816. A. L. Cauchy, *Paris Mém. de l'Ac.* **1**, 1827. W. Thomson, *Proc. Roy. Soc.* **42**, 1887; *Phil. Mag.* (5) **23**, 1887, p. 113. W. Burnside, *Lond. Math. Soc. Proc.* **20**, 1889, p. 22.

deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = \frac{2\pi}{k\tau}$ ist, oder nach (14)

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}\operatorname{tgh} kh}\,. \tag{18}$$

Hier ist k mit der Wellenlänge L durch die Gleichung $\frac{2\pi}{L} = k$ verknüpft, so daß

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\operatorname{tgh}\frac{2\pi h}{L}} \tag{19}$$

wird.

Für Tiefseewellen ist $\frac{h}{L}$ unendlich groß, also

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}\,. \tag{19'}$$

Ist andrerseits die Wellenlänge sehr groß gegen die Tiefe, so wird

$$v = \sqrt{gh}\,. \tag{19''}$$

Die Bahn eines Flüssigkeitsteilchens erhält man durch Integration der Gleichungen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad \frac{d\underline{z}}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \tag{20}$$

Für fortschreitende Wellen folgt aus (17)

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \frac{k\tau}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - kx\right)\cosh k(h - z) \\ \underline{z} &= \frac{k\tau}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - kx\right)\sinh k(h - z). \end{aligned} \tag{21}$$

Elimination von t ergibt, daß die Teilchen Ellipsen beschreiben.[1])

167. Die Lord Rayleighsche Methode.[2]) Zur Lösung vieler auf Wellen bezüglicher Probleme kann man mit Lord Rayleigh zweckmäßig die funktionentheoretische Methode heranziehen. Voraussetzung ist, daß die Strömung nur von zwei Koordinaten abhänge. Wir legen die x-Achse horizontal, die y-Achse vertikal nach oben, und es sei bei ruhender Flüssigkeit die Ebene $y = 0$ die Oberfläche.

---

1) Stokes, *Cambr. Phil. Soc. Trans.* **8**, 1847, p. 441 (*Papers* **1**, p. 197); *Cambr. and Dublin Math. Journ.* **4**, 1849, p. 219 (*Papers* **2**, p. 221).

2) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* (5) **1**, p. 305.

Wir nennen das Geschwindigkeitspotential und die Strömungsfunktion Φ und Ψ und setzen $z = x + yi$. Dann sei z. B.

$$\frac{\Phi + i\Psi}{v} = -z + i\alpha e^{ikz} + i\beta e^{-ikz}, \tag{1}$$

so daß

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{v} &= -x - (\alpha e^{-ky} - \beta e^{ky}) \sin kx \\ \frac{\Psi}{v} &= -y + (\alpha e^{-ky} + \beta e^{ky}) \cos kx \end{aligned} \tag{2}$$

wird.

Durch (2) ist eine Strömung mit der Geschwindigkeit v parallel der x-Achse dargestellt, zu der eine wellenförmige Störung hinzukommt.

Es soll angenommen werden, daß die Amplitude der Wellen klein gegen die Wellenlänge ist, d. h. αk und βk sollen klein sein.

Die Oberfläche sei durch die Strömungslinien $\Psi = 0$ gebildet, nach (2), muß also genähert sein

$$y = (\alpha + \beta) \cos kx. \tag{3}$$

Auf dem Grunde $y = -h$ muß Ψ auch konstant sein, also muß

$$\alpha e^{kh} + \beta e^{-kh} = 0 \tag{4}$$

sein.

Setzen wir wegen (4)

$$\alpha = -\frac{C}{2} e^{-kh}, \quad \beta = \frac{C}{2} e^{kh},$$

so gehen die Gleichungen (2) über in

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{v} &= -x + C \cosh k(y + h) \sin kx \\ \frac{\Psi}{v} &= -y + C \sinh k(y + h) \cos kx. \end{aligned} \tag{5}$$

Nach Nr. 150 (8) ist

$$\frac{p}{\varrho} + gy + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right\} = \text{konst.}$$

Diese Gleichung wird auf der Oberfläche, wo

$$y = C \sinh kh \cdot \cos kx$$

ist, genähert

$$\begin{aligned} \frac{p}{\varrho} &= \text{konst.} - gy - \frac{1}{2} v^2 (-1 + Ck \cosh kh \cdot \cos kx)^2 \\ &= \text{konst.} - (g - v^2 k \operatorname{ctgh} kh)\, y. \end{aligned}$$

Der Druck muß aber auf der Oberfläche konstant sein, also muß

$$v^2 = \frac{g}{k} \operatorname{tgh} kh \tag{6}$$

sein, wodurch sich die Wellenlänge $L = \frac{2\pi}{k}$ von Wellen auf einem Strome der Tiefe h und der Geschwindigkeit v ergibt.

Grenzen zwei sonst unbegrenzte Flüssigkeiten mit den Dichten ϱ und ϱ' in der Ebene $y = 0$ aneinander, und bewegen sie sich mit der konstanten horizontalen Geschwindigkeit v (abgesehen von den Wellen, die noch auftreten können), so gilt in der unteren

$$\frac{\Psi}{v} = -y + \beta e^{ky} \cos kx, \tag{7}$$

denn da Φ für $y = -\infty$ endlich bleiben muß, so wird α in (2) Null. Für die obere gilt dagegen

$$\frac{\Psi'}{v} = -y + \beta e^{-ky} \cos kx. \tag{8}$$

In großer Entfernung von der Grenzschicht ist die Geschwindigkeit beider Flüssigkeiten v.

An der Grenzfläche sei $\Psi = \Psi' = 0$, also genähert

$$y = \beta \cos kx. \tag{9}$$

Dann ergeben die Druckgleichungen

$$\frac{p}{\varrho} = \text{konst.} - gy - \frac{v^2}{2}(1 - 2k\beta e^{ky} \cos kx)$$

$$\frac{p'}{\varrho'} = \text{konst.} - gy - \frac{v^2}{2}(1 + 2k\beta e^{-ky} \cos kx).$$

An der Grenzfläche ist also

$$\begin{aligned} \frac{p}{\varrho} &= \text{konst.} - (g - v^2 k)y \\ \frac{p'}{\varrho'} &= \text{konst.} - (g + v^2 k)y. \end{aligned} \tag{10}$$

Da aber $p = p'$ sein muß, so folgt (Stokes)[1]) die Beziehung

$$v^2 = \frac{g}{k} \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho + \varrho'}, \tag{11}$$

aus der sich wiederum, wie in (6) die Wellenlänge als Funktion der Strömungsgeschwindigkeit ergibt.

1) Wegen dieser Probleme vgl. man H. Lamb, *Lehrb. d. Hydrodynamik*, deutsch von J. Friedel, Leipzig u. Berlin 1907, S. 433ff.

168. Gruppengeschwindigkeit von Wasserwellen. Da nach Nr. 166 (19) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v von Oberflächenwellen eine Funktion der Wellenfläche L ist, so wird die Geschwindigkeit u einer endlich begrenzten Wellengruppe von der Phasengeschwindigkeit eines unendlichen Wellenzuges verschieden sein.

Nach Nr. 85 (3) gilt

$$u = v - L\frac{dv}{dL}. \tag{1}$$

Ist das Gewässer sehr flach, so folgt speziell aus Nr. 166 (19″)

$$u = v, \tag{2}$$

d. h. die Gruppe pflanzt sich mit derselben Geschwindigkeit fort wie eine unendlich ausgedehnte sinusförmige Welle.

Ist dagegen die Tiefe unendlich groß, so wird nach Nr. 166 (19′)

$$u = \frac{v}{2}, \tag{3}$$

dann ist also die Gruppengeschwindigkeit nur halb so groß.

Die Gruppengeschwindigkeit hat, wie Reynolds[1]) am speziellen Falle der Tiefwasserwellen, Lord Rayleigh[2]) dagegen allgemein bewiesen hat, eine einfache Beziehung zum Energietransport. Sie ist nämlich das Verhältnis der mittleren Energieströmung zum Energieinhalt zwischen zwei Ebenen vom Abstande 1 senkrecht zur Richtung der Energieströmung.

Kapitel VI.

Luftschwingungen.

169. Die Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential. In den folgenden Nummern wollen wir die Schwingungen in Gasen unter der Voraussetzung behandeln, daß keine äußeren Kräfte wirken, daß die Geschwindigkeit sich aus einem Potential Φ ableitet, und daß die Amplituden der Oszillationen so klein sind, daß man die höheren Potenzen von Φ und seiner Differentialquotienten vernachlässigen kann. Dann werden auch die Verdichtungen unendlich klein sein.

Unter diesen Beschränkungen gelten die Gleichungen

$$\mathfrak{v}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad \mathfrak{v}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \mathfrak{v}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{1}$$

(vgl. Nr. 150 (3));

1) O. Reynolds, *Nature* 16. 343, 1877 = *Scient. Papers* 1, S. 198.
2) Lord Rayleigh, *Proc. Lond. Math. Soc.* 9. 21, 1877 = *Scient. Papers* 1, S. 322.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \varrho \Delta \Phi \tag{2}$$

(vgl. Nr. **145** (4')) und

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \int^{p} \frac{dp}{\varrho} = \text{konst.} \tag{3}$$

(vgl. Nr. **150** (5)).

Hier ist ϱ eine Funktion von p, und zwar finden die Luftverdichtungen und -verdünnungen so schnell statt, daß der Vorgang als adiabatisch betrachtet werden kann. Dann gilt nach Nr. **145** (15))

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\varkappa}, \tag{4}$$

d. h.

$$\frac{dp}{p} = \varkappa \frac{d\varrho}{\varrho}, \tag{5}$$

wenn wir $\varrho = \varrho_0 + d\varrho$, $p = p_0 + dp$ setzen.

Für $\frac{d\varrho}{\varrho}$, die sogenannte Verdichtung, wollen wir die Bezeichnung

$$ds = \frac{d\varrho}{\varrho} \tag{6}$$

einführen.

Dann wird (2)

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \Delta \Phi, \tag{7}$$

während nach (5)

$$\frac{dp}{\varrho} = \frac{\varkappa p}{\varrho^2} d\varrho = \frac{\varkappa p}{\varrho} ds = c^2 ds \tag{8}$$

wird, wenn wir die für jedes Gas charakteristische Konstante

$$\frac{\varkappa p}{\varrho} = c^2 \tag{9}$$

setzen. Somit geht (3) in

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + c^2 s = 0 \tag{10}$$

über, wenn wir die Konstante im Integral von (3) so bestimmen, daß bei ruhender Luft ($s = 0$) $\Phi = 0$ wird.

Aus (7) und (10) folgt für Φ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi .\text{[1]} \tag{11}$$

---

1) Differentiiert man (3) nach t, so erhält man $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{d\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial t}$, also nach (2) $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{dp}{d\varrho} \Delta \Phi$. Nun ist für isotherme Änderungen $dp/d\varrho$

Kennt man Φ, so ergeben sich die Geschwindigkeitskomponenten nach (1), die Verdichtung nach (10).

Durch Vergleich von (11) mit den Ergebnissen von Nr. **127** ersehen wir, daß Schwingungen in Gasen sich mit der Geschwindigkeit c ausbreiten, und zwar ist nach (9)

$$c = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\varrho}}. \tag{12}$$

Für Luft von Atmosphärendruck ist $\varkappa = 1{,}41$; $p = 1$ Atm $= 1{,}013\ 10^6 \frac{\text{gr}}{\text{cm sec}^2}$; $\varrho = \frac{0{,}001293}{1 + \alpha t} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$, so daß sich die Schallgeschwindigkeit in Luft zu

$$C = 33\,240 \sqrt{1 + \alpha t} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

berechnet.

Es wird genügen, wenn wir die Schwingungen als einfach sinusförmig annehmen, d. h. einfache Töne voraussetzen, da kompliziertere Bewegungen wegen der Linearität der Gleichung (11) sich durch Fouriersche Reihen einfach additiv aus den Einzelschwingungen zusammensetzen.

Sei die Schwingungszahl n, die Schwingungsdauer T, also $n = \frac{1}{T}$, so können wir

$$\Phi = \Psi e^{2\pi i n t} \tag{13}$$

setzen, und nach (11) genügt dann Ψ der Gleichung

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0, \tag{14}$$

unter k den Wert

$$k = \frac{2\pi n}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{15}$$

verstanden, wenn λ die Wellenlänge ist.

170. Ebene Wellen. Hängt Ψ nur von z ab, so haben wir es mit ebenen Wellen zu tun. Die Integrale von Nr. **168** (14) sind dann e^{-ikz} und e^{+ikz}, so daß die allgemeinste Lösung für das Potential der reelle Teil von

$$A e^{2\pi i \left(nt - \frac{z}{\lambda} - \alpha\right)} + B e^{2\pi i \left(nt + \frac{z}{\lambda} - \beta\right)}$$

wird. D. h.

$$\Phi = A \cos 2\pi\left(nt - \frac{z}{\lambda} - \alpha\right) + B \cos 2\pi\left(nt + \frac{z}{\lambda} - \beta\right). \tag{1}$$

---

eine Konstante, dagegen für adiabatische $dp/d\varrho = \frac{\varkappa p}{\varrho}$ nur innerhalb der von uns gewünschten Genauigkeit.

(1) stellt also die Summe zweier Wellen dar, die sich mit der Geschwindigkeit $c = n\lambda$ in Richtung der positiven resp. negativen z-Achse fortpflanzen (Nr. 83).

Betrachten wir nur die nach positiven z fortschreitende Welle

$$\Phi = A \cos 2\pi\left(nt - \frac{z}{\lambda} - \alpha\right), \tag{2}$$

so wird nach Nr. 168 (1)

$$\mathfrak{v}_x = 0;\ \mathfrak{v}_y = 0;\ \mathfrak{v}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{2\pi A}{\lambda} \sin 2\pi\left(nt - \frac{z}{\lambda} - \alpha\right). \tag{3}$$

Die Geschwindigkeit hat also die Richtung, in der sich die Phasen fortpflanzen, d. h. Schwingungen in Gasen, welche ein Geschwindigkeitspotential haben, sind *longitudinale Wellen.*

Die Verdichtung berechnet sich nach Nr. 168 (10)

$$s = -\frac{A 2\pi n}{c^2} \sin 2\pi\left(nt - \frac{z}{\lambda} - \alpha\right); \tag{4}$$

sie pflanzt sich also mit derselben Geschwindigkeit c fort, wie das Potential und die Geschwindigkeit der Teilchen.

Aus (3) und (4) folgt

$$\mathfrak{v}_z = cs. \tag{5}$$

Die Verschiebung ζ eines Luftteilchens aus der Gleichgewichtslage berechnet sich nach der Formel $\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$. Hier ist $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\mathfrak{v}_z$ (vgl. Nr. 145 (2)); da aber die Geschwindigkeiten unendlich klein sind, so gilt einfach

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{6}$$

d. h.

$$\zeta = \frac{A}{c} \cos 2\pi\left(nt - \frac{z}{\lambda} - \alpha\right). \tag{7}$$

Nach (3) und (4) haben also für fortschreitende Wellen Geschwindigkeit und Verdichtung gleiche Phasen, während nach (7) die Phase der Verschiebung um $1/4$ Periode hinter der der Geschwindigkeit und der Verdichtung zurück ist.

171. Schwingungen in Röhren und Pfeifen. Wir legen die z-Achse in die Röhrenachse. Die Ebene $z = 0$ sei eine feste Wand, an der die Luftgeschwindigkeit Null sein muß, während

an der Stelle $z = l$ eine am Ende eines Stabes S befestigte Korkscheibe die Röhre fast völlig abschließt. Reibt man den Stab longitudinal an, so macht an der Stelle $z = l$ die in der Röhre eingeschlossene Luft die gegebenen Schwingungen der Korkscheibe mit. Die Anordnung ist die in Fig. 115 skizzierte der sogenannten Kundtschen Staubfiguren, die noch in der Akustik besprochen werden wird.

S $z=0$ $z=l$

Fig. 115.

Für das Potential der Luftbewegung in der Röhre gelten außer der Differentialgleichung Nr. 168 (11) die Grenzbedingungen

$$\text{für} \qquad z = 0: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0; \tag{8}$$

$$\text{für} \qquad z = l: \; -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = C \cos 2\pi n t; \tag{8'}$$

an der Rohrwand

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \tag{9}$$

Der Bedingung (9) wird genügt, wenn man Φ als unabhängig von x und y annimmt; für Ψ gilt also die Gleichung Nr. 168 (14)

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} + k^2 \Psi = 0,$$

welche das allgemeinste Integral

$$\Psi = A \cos (kz - \alpha) \tag{10}$$

hat. Wegen (8) ist $\alpha = 0$, und wegen (8′) ist

$$Ak \sin kl = C, \tag{11}$$

so daß

$$\Phi = \frac{C}{k \sin kl} \cos kz \cos 2\pi n t \tag{12}$$

wird.

Daraus folgt für die Geschwindigkeit und die Verdichtung

$$\mathfrak{v}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{C}{\sin kl} \sin kz \cos 2\pi n t, \tag{13}$$

$$s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{C}{c \sin kl} \cos kz \sin 2\pi n t. \tag{14}$$

Es ist also im Rohr eine stehende Welle vorhanden mit Knoten und Bäuchen an festliegenden Stellen (vgl. Nr. 84), und zwar koinzidieren örtlich die Bäuche der Geschwindigkeit mit den Knoten der Verdichtung. Insbesondere ist die Wand $z = 0$ ein Knoten für die Geschwindigkeit, dagegen ein Bauch für die Verdichtung.

Die $\left\{\begin{matrix}\text{Knoten}\\ \text{Bäuche}\end{matrix}\right\}$ der $\left\{\begin{matrix}\text{Bewegung}\\ \text{Verdichtung}\end{matrix}\right\}$ liegen an den Stellen $z = \frac{q\pi}{k} = \frac{q\lambda}{2}$, wo $q = 0, 1, 2, 3, \ldots$ d. h. alle ganzzahligen Werte haben kann, die $\frac{q\lambda}{2} < l$ entsprechen.

Die Amplituden erhalten ihre größten Werte für $kl = r\pi$, wo r eine beliebige ganze Zahl ist, oder da nach Nr. 168 (15) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist, für $l = \frac{r\lambda}{2}$, d. h. wenn die Röhrenlänge ein Multiplum der halben Wellenlänge ist.

Dann werden die Amplituden der Geschwindigkeit und der Verdichtung nach (13) und (14) unendlich groß. Daß dies in Wahrheit nicht eintritt, liegt daran, daß die Rohrwände niemals vollkommen starr sind, und daß die Schwingungen im Rohr durch Reibung gedämpft sind.

Das Maximum bleibt aber trotzdem bestehen. Es wird durch *Resonanz* des Rohrs auf die erregende Schwingung hervorgerufen. Resonanz tritt also ein, wenn die Erregung in einem Bewegungsknoten der erzeugten Welle stattfindet. Für $z = l$ wird allerdings $\mathfrak{v}_z$ nicht gleich Null, wie es das Kriterium eines Knotens verlangt, sondern nimmt den Wert C an, doch kann man im Falle der Resonanz diesen Ort als *relativen Knoten* bezeichnen.

Da r alle beliebigen ganzzahligen Werte annehmen kann, so resoniert ein Rohr der Länge l auf einen Ton der Wellenlänge $\lambda = 2l$ und alle harmonischen Obertöne.

Man kann die Gleichung (13) in der Form

$$\mathfrak{v}_z = \frac{C}{2\sin kl}\{\sin(kz + 2\pi nt) + \sin(kz - 2\pi nt)\} \qquad (15)$$

schreiben, d. h. die stehende Welle kann man sich (vgl. Nr. 84) durch die Superposition zweier fortlaufender Wellen entstanden denken, von denen die eine sich nach negativen, die andere sich nach positiven z fortpflanzt. Letztere entsteht durch Reflektion der ersteren an der festen Wand $z = 0$.

Orgelpfeifen. Sieht man von der Trägheit der Luft außerhalb des offenen Endes einer Orgelpfeife ab, so darf man annehmen,

daß am offenen Ende die Verdichtung Null bleibt, also einen Knoten hat, wie D. Bernoulli, Euler und Lagrange das getan haben.

Das untere Ende $z = 0$, d. h. das Ende, welches angeblasen wird, darf genähert als offen in diesem Sinne angesehen werden, weil die Pfeife dort ein seitliches Loch hat (vgl. Fig. 116).

Ist auch das obere Ende offen, so wird das Geschwindigkeitspotential die Form annehmen

$$\Phi = (A \cos kz + B \sin kz) \sin 2\pi n t. \tag{16}$$

Da aber nach Nr. 168 (10) $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ sein muß für $z = 0$ und $z = l$, so muß $A = 0$ und $kl = r\pi$ sein, wo r eine beliebige ganze Zahl ist, d. h. es wird

$$\Phi = \sum_{r=1}^{\infty} B_r \sin \frac{r\pi}{l} z \sin 2\pi n t. \tag{17}$$

Die Wellenlänge des Grundtons ($r = 1$) wird also $\lambda_1 = 2l$ sein. Außer diesem können alle harmonischen Obertöne entstehen.

Die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\sum_{r=1}^{\infty} B_r \frac{r\pi}{l} \cos \frac{r\pi}{l} z \sin 2\pi n t \tag{18}$$

Fig. 116.

besteht aus einfachen Schwingungen, die an den Enden Bäuche haben.

Ist dagegen die Pfeife oben gedeckt, so gilt für $z = 0$: $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$; für $z = l$: $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$, somit geht (16) in

$$\Phi = \sum_{q=0}^{\infty} B_q \sin \frac{(2q+1)\pi}{2l} z \sin 2\pi n t \tag{19}$$

über, wo q alle ganzen Zahlen, Null eingeschlossen, durchläuft.

Die Wellenlänge des Grundtons $q = 0$ ist somit $\lambda_0 = 4l$. Außer diesem kommen aber nur die Obertöne ungerader Ordnung zustande. Am geschlossenen Ende hat die Bewegung somit einen Knoten, die Verdichtung einen Bauch.

Eine offene Pfeife wird nach dem Vorigen einen Grundton haben, der eine Oktave höher ist als der einer gedeckten Pfeife derselben Länge.

Die exaktere Theorie der Pfeifentöne wird in Nr. 172 besprochen werden.

172. Kugelwellen. Nehmen wir an, daß das Potential Φ außer von der Zeit nur von der Entfernung r von einem festen Punkte abhängt, so schreibt sich die Gleichung Nr. **168** (11) in der Form[1])

$$\frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2}, \tag{1}$$

so daß Φ nach Nr. **126** (3) und (4) das Integral

$$\Phi = \frac{F_1(r - ct)}{r} + \frac{F_2(r + ct)}{r} \tag{2}$$

hat, unter F_1 und F_2 zwei willkürliche Funktionen verstanden. Der erste Term rechts stellt eine Kugelwelle dar, die sich mit der Geschwindigkeit c nach außen fortpflanzt, während der zweite Term eine Kugelwelle ist, die mit derselben Geschwindigkeit von allen Seiten auf den Punkt $r = 0$ zuläuft.

Wenn ein bestimmter Wert Φ der Gleichung **168** (11) genügt, so ist der Differentialquotient nach einer Koordinate auch ein Integral.

Setzen wir in (2) $F_2 = 0$ und wählen für F_1 die Funktion $e^{ik(r-ct)}$, wo $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ die Wellenlänge, $\frac{c}{\lambda} = n$ die Schwingungszahl bedeutet, so ist also auch der reelle Teil von

$$C \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ik(r-ct)}}{r}$$

eine Lösung der Gleichung Nr. **168** (11), die wir jetzt diskutiren wollen.

Die soeben angegebene Funktion kann man auch schreiben

$$C \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ik(r-ct)}}{r}\right)\frac{\partial z}{\partial r} = C \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ik(r-ct)}}{r}\right)\cos\vartheta,$$

wenn ϑ der Winkel ist, den der Radiusvektor r mit der Achse eines räumlichen Polarkoordinatensystems einschließt.

Der reelle Teil dieser Funktion ist

$$\Phi = C \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos k(r - ct)}{r}\right)\cos\vartheta. \tag{3}$$

Für Werte von r, die klein gegen die Wellenlänge λ sind, so daß kr eine unendlich kleine Zahl ist, gilt

1) Vgl. z. B. R. Gans, *Einführung in die Vektoranalysis* 3. Aufl. Leipzig u. Berlin 1913, S. 62, Formel (12).

$$\Phi = -\frac{C}{r^2}\cos kct \cdot \cos\vartheta = -\frac{C}{r^2}\cos 2\pi nt \cdot \cos\vartheta, \tag{4}$$

also

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \mathfrak{v}_r = -\frac{2C}{r^3}\cos 2\pi nt \cos\vartheta. \tag{5}$$

Für $r = a$ wird

$$\mathfrak{v}_r = -\frac{2C}{a^3}\cos 2\pi nt \cos\vartheta, \tag{6}$$

d. h. eine von r unabhängige Funktion.

(3) ist also ein Integral, welches der Luftbewegung entspricht, wenn eine gegen die Wellenlänge kleine Kugel vom Radius a auf der z-Achse sich in unendlich kleinen Schwingungen hin und her bewegt. Die Bedingung, daß $\frac{a}{\lambda}$ klein ist, ist sogar überflüssig, nur gelten dann die Gleichungen (4) bis (6) nicht mehr.

In Entfernungen r vom Kugelzentrum, die groß gegen die Wellenlänge sind, wird

$$\Phi = -Ck\frac{\sin k(r-ct)}{r}\cos\vartheta \tag{7}$$

und

$$\mathfrak{v}_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = Ck^2\frac{\cos k(r-ct)}{r}\cos\vartheta. \tag{8}$$

Ist die Amplitude der Kugelschwingung A, so wird

$$\mathfrak{v}_r = \left(2\pi\frac{a}{\lambda}\right)^3\frac{Ac}{2}\,\frac{\cos k(r-ct)}{r}\cos\vartheta, \tag{8'}$$

da für die Geschwindigkeit des Kugelzentrums nach (6)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{2C}{a^3}\cos 2\pi nt$$

und somit

$$\zeta = -\frac{C}{a^3\pi n}\sin 2\pi nt$$

gilt.

173. Die Endkorrektion offener Pfeifen. Resonatoren. Wie wir schon oben (Nr. 170) erwähnten, ist die Annahme, daß die Verdichtung an der Mündung einer offenen Pfeife stets gleich Null sei, wegen der Trägheit der äußeren Luftmasse unzulässig. Deshalb wird auch der Eigenton einer offenen Pfeife etwas tiefer sein, als der Vernachlässigung der Schwingungen im äußeren Luftraum entspricht, oder die „reduzierte Pfeifenlänge“ etwas größer, als

die wahre Länge, wenn man unter reduzierter Länge die Länge einer gedachten Pfeife versteht, bei der sich unter der Annahme, daß an der Mündung ein Knoten der Verdichtung liegt, derselbe Eigenton berechnet, den die wahre Pfeife in Wirklichkeit hat.

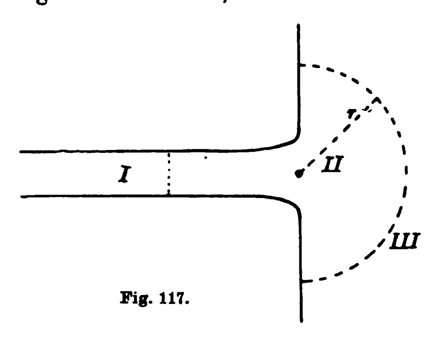


Fig. 117.

Helmholtz[1]) hat das Problem streng behandelt unter der Annahme, daß die Pfeife in der Ebene ihrer Mündung durch ein unendlich ausgedehntes Brett (vgl. Fig. 117) begrenzt ist, im allgemeinen zylindrische Form hat, von der sie nur in der Nähe der Mündung abweichen darf.

Man kann dann den ganzen Raum in drei Teile zerlegen, den Raum I, in welchem die Wellen noch eben sind, und Ψ der Gleichung

$$\Psi_{\mathrm{I}} = A \cos kz + B \sin kz \tag{1}$$

genügt, wenn etwa $z = 0$ die Grenzebene zwischen den Räumen I und II darstellt, wo der Abstand dieser Grenzebene von der Pfeifenmündung unendlich groß gegen die Querschnittsdimensionen der Pfeife, aber klein gegen die Wellenlänge ist.

Im Raume III werden die Wellen kugelförmig sein, wenn der Halbkreis, der II und III trennt, einen Radius hat, der groß gegen die Querschnittsdimensionen der Pfeife, aber klein gegen die Wellenlänge ist. In III wird die Funktion Ψ somit die Gestalt (vgl. Nr. 171) des reellen Teils von

$$\Psi_{\mathrm{III}} = C\frac{e^{-ikr}}{r} \tag{2}$$

besitzen.

Die Dimensionen des ganzen Raumes II werden nach den soeben angeführten Bestimmungen über seine Begrenzung klein gegen

1) H. v. Helmholtz, *Crelles Journal* **57**, 1860, S. 1 = Ostwalds Klassiker Nr. 80 = *Wissensch. Abh.* **1**, S. 303; siehe auch „Vorlesungen über die mathem. Prinzipien der Akustik". Leipzig 1898, S. 209. Man vgl. auch G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mechanik*. 4. Aufl. Leipzig 1897, S. 327ff. und Lord Rayleigh, *Theorie des Schalls*, deutsch v. Fr. Neesen **2**, § 313, Braunschweig 1880.

die Wellenlänge sein, so daß Ψ dort genähert der Gleichung

$$\Delta \Psi_{II} = 0 \tag{3}$$

zu genügen hat.

Man hat also eine Funktion Ψ_{II} zu finden, welche die Gleichung (3) erfüllt, mit ihren ersten Differentialquotienten stetig an den Grenzen in die Funktionen Ψ_{I} resp. Ψ_{III} übergeht, und deren Differentialquotient nach der Normalen an den Wandungen der Pfeife und des äußeren Begrenzungsbrettes gleich Null ist.

Diese Funktion ist dieselbe, als wenn es sich um die wirbellose Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit resp. eines elektrischen Stroms in dem betrachteten Raum handelte, die Aufgabe ist also identisch mit dem Problem des Ausbreitungswiderstandes des elektrischen Stroms durch einen zylindrischen Draht beim Eintritt in eine große leitende, von einer Ebene begrenzte Masse.

Die Strom- und Äquipotentiallinien sind in Fig. 118 genähert gezeichnet für den Fall, daß die Pfeife, vollkommen zylindrisch ist und eine kreisförmige Öffnung hat.

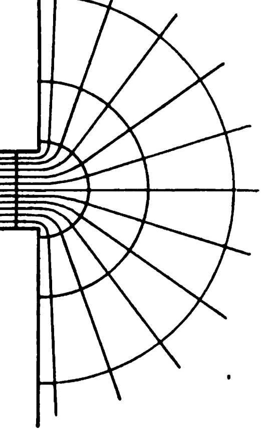


Fig. 118.

Helmholtz findet als reduzierte Länge einer offenen Pfeife der Länge l und des Radius a den Wert $l + \frac{\pi}{4} a$, muß allerdings die Form der Röhrenwand in der Nähe der Mündung besonders bestimmen — nämlich so, daß sie sich den Stromlinien anpaßt — wobei sich freilich zeigt, daß die Röhre auch an der Mündung fast exakt zylindrisch ist. Dagegen nimmt Lord Rayleigh[1]) die Röhre als zylindrisch an und schließt die reduzierte Länge in zwei Grenzen ein; er findet, daß sie zwischen $l + \frac{\pi}{4} a$ und $l + \frac{8}{3\pi} a$, d. h. zwischen $l + 0{,}785\, a$ und $l + 0{,}849\, a$ liegt.[2])

Dieselbe mathematische Methode läßt sich auf die Bestimmung der Tonhöhe von Resonatoren anwenden, wenn man unter einem

1) Lord Rayleigh, *Phil. Trans.* **161**, 1870, S. 77; *Lond. Math. Soc. Proc.* **7**, 1876, S. 70.

2) Wegen der Berechnung der Korrektion vgl. auch P. Debye, Stationäre und quasistationäre Felder. *Enc. d. math. Wiss.* **5**, Art. 17, S. 418.

Resonator (nach Kirchhoff: „cubische Pfeife") ein Gefäß versteht, dessen sämtliche Dimensionen klein gegen die die Schwingungen erregenden Wellenlängen sind.

Das Gefäß vom Volumen T habe eine kleine Öffnung vom Radius R oder der Fläche $S = R^2\pi$. Dann ergibt sich als Eigenschwingungszahl

$$n = \frac{c}{\sqrt[4]{4\pi^5}} \frac{\sqrt[4]{S}}{\sqrt{T}}, \tag{4}$$

wo c die Schallgeschwindigkeit bedeutet; also für $c = 332 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$

$$n = 56{,}2 \frac{\sqrt[4]{S}}{\sqrt{T}}, \tag{5}$$

was mit früher angestellten Beobachtungen von Sondhauss[1]) gut übereinstimmt, die zu der Formel

$$n = 52{,}4 \frac{\sqrt[4]{S}}{\sqrt{T}} \tag{5'}$$

geführt haben.

174. Das Dopplersche Prinzip. Um die Veränderungen zu studieren, die eine Bewegung des Beobachters oder der Schallquelle auf die Wahrnehmung der Schwingungen hat, wollen wir annehmen, daß der tönende Körper sich in großer Entfernung vom Beobachter auf der negativen z-Achse befinde, so daß die ausgesandte Welle in der Nähe des Beobachters, der sich auch auf der z-Achse befindet, als eben betrachtet werden kann.

1. Ruhende Schallquelle, bewegter Beobachter. Ruht die Schallquelle, so ist das Potential, bezogen auf ein ruhendes Bezugssystem

$$\Phi = A e^{2\pi i n\left(t - \frac{z}{c}\right)}. \tag{1}$$

Hat der Beobachter die Geschwindigkeit[2]) v, und seien die Koordinaten eines Raumpunktes im ruhenden Bezugssystem S x, y, z, in einem mit dem Beobachter mitbewegtem System S' x', y', z', so bestehen die Beziehungen

$$x' = x; \; y' = y; \; z' = z - vt, \tag{2}$$

wenn S und S' zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen.

1) Sondhauss, *Pogg. Ann.* **81**, S. 235 u. 347; vgl. auch die Messungen von Wertheim, *Ann. Chim. et de phys.* (3) **31**, S. 428.

2) Wir wollen uns auf den Fall $v < c$ beschränken.

In den Koordinaten des bewegten Systems lautet Φ somit

$$\Phi = Ae^{2\pi i n\left(t-\frac{z'+vt}{c}\right)} = Ae^{2\pi i n'\left(t-\frac{z'}{c'}\right)}. \tag{3}$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} n' &= n\left(1 - \frac{v}{c}\right) \\ c' &= c - v, \end{aligned} \tag{4}$$

d. h. an das Ohr des Beobachters gelangen n' Schwingungen pro Sekunde, der Ton erscheint ihm also tiefer, wenn er sich von der Tonquelle fortbewegt, höher, wenn er sich derselben nähert.

2. Bewegte Schallquelle, ruhender Beobachter. Bewegt sich die Schallquelle mit der Geschwindigkeit v_1 in Richtung der z-Achse, so führe man in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \tag{5}$$

die Koordinaten x_1, y_1, z_1 eines mitbewegten Kordinatensystems ein, so daß $x = x_1$; $y = y_1$; $z = z_1 + v_1 t$ wird.

$\partial/\partial t$ bezeichne die Differentiation nach der Zeit bei konstanten x, y, z, während d/dt die Differentiation bei konstanten x_1, y_1, z_1 bedeute. Dann ist

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial z}; \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial z}, \tag{6}$$

so daß (5) in

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} - 2v_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1\, dt} = (c^2 - v_1^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1^2} \tag{7}$$

übergeht.

Setzen wir ein Integral in der Form

$$\Phi = e^{2\pi i n\left(t - \frac{z_1}{\alpha}\right)}$$

an, so bestimmt sich α aus der Gleichung

$$\alpha^2 + 2v_1\alpha = c^2 - v_1^2, \tag{8}$$

welche die Lösungen

$$\alpha = \pm c - v_1 \tag{9}$$

hat, von denen uns aber nur die mit dem oberen Zeichen interessiert, da wir eine Schwingung behandeln wollen, die sich in Richtung von $+z$ fortpflanzt.

Somit wird

$$\Phi = e^{2\pi i n\left(t - \frac{z_1}{c - v_1}\right)} = e^{2\pi i n\left(t - \frac{z - v_1 t}{c - v_1}\right)} = e^{2\pi i n_1\left(t - \frac{z}{c_1}\right)}, \tag{10}$$

wo

$$n_1 = \frac{n}{1 - \frac{v_1}{c}}; \quad c_1 = c \tag{11}$$

ist. Hier bedeutet n_1 die vom ruhenden Beobachter bestimmte Schwingungszahl, während n die Schwingungszahl des von der Schallquelle erregten Tones ist.

3. Bewegte Schallquelle, bewegter Beobachter. Hat der tönende Körper die Geschwindigkeit v_1, der Beobachter die Geschwindigkeit v, so erhält man die wahrgenommene Schwingungszahl N durch die Kombination von (4) und (11) als

$$N = n\,\frac{1 - v/c}{1 - v_1/c}. \tag{12}$$

Bei der Ableitung, die keineswegs als streng gelten kann, ist auf das Strömungsfeld, welches schon durch die Bewegung der nicht tönenden Schallquelle resp. des Beobachters hervorgerufen wird, keine Rücksicht genommen worden.

Auf die Resultate dieser Überlegungen hat zuerst Doppler[1]) aufmerksam gemacht; man hat sie durch Beobachtungen auf Eisenbahnen experimentell bestätigt[2]), Mach[3]) hat auch einen Laboratoriumsapparat zur Demonstration des Dopplerschen Phänomens angegeben.

Kapitel VII.

Flüssigkeitsreibung.

175. Die Bewegungsgleichungen. Wenn die Deformationsgrößen sich nicht mit der Zeit verändern, also im Gleichgewichtszustande, ist an jedem Orte einer Flüssigkeit ein Druck Π vorhanden, der auf ein irgendwie orientiertes Flächenelement normal wirkt.

Ändern sich aber die Deformationsgrößen mit der Zeit, so ist die einfachste Annahme die, daß die Abweichungen der Druckkräfte von diesem allseitig konstanten Druck lineare Funktionen der Änderungsgeschwindigkeit der Deformationsgrößen sind.

---

1) Doppler, Das farbige Licht der Doppelsterne. Prag 1842.
2) Buys Ballot, *Pogg. Ann.* **66**, 1845; Vogel, *Pogg. Ann.* **158**, S. 287; Mach, *Wien. Ber.* **127**.
3) E. Mach, *Wien. Ber.* **41**, 1860; **77**, 1878.

Es muß also, wenn wir noch die vollkommene Isotropie einer Flüssigkeit berücksichtigen (vgl. Nr. 103 (16))

$$\begin{aligned}
\Pi_{xx} &= \Pi + 2\lambda \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x} - \mu \operatorname{div} \mathfrak{u}, & \Pi_{yz} &= \Pi_{zy} = \lambda \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial z} \right) \\
\Pi_{yy} &= \Pi + 2\lambda \frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial y} - \mu \operatorname{div} \mathfrak{u}, & \Pi_{zx} &= \Pi_{xz} = \lambda \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial x} \right) \qquad (1) \\
\Pi_{zz} &= \Pi + 2\lambda \frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial z} - \mu \operatorname{div} \mathfrak{u}, & \Pi_{xy} &= \Pi_{yx} = \lambda \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

gelten.

Für inkompressible Flüssigkeiten ist der Druck Π das Mittel aus den Normaldrucken, d. h.

$$\Pi = \tfrac{1}{3} (\Pi_{xx} + \Pi_{yy} + \Pi_{zz}).$$

Man wird nun den beobachteten Erscheinungen gerecht, wenn man annimmt, daß diese Beziehung auch für kompressible Flüssigkeiten gilt, daß also $2\lambda = 3\mu$ ist, so daß

$$\Pi_{xx} = \Pi + 2\lambda \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x} - \frac{2\lambda}{3} \operatorname{div} \mathfrak{u} \qquad (1')$$

usw.

wird.

Dann lauten, wenn $\mathfrak{f}$ die äußere Kraft bezeichnet, die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\varrho \frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} &= \mathfrak{f}_x + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zx}}{\partial z} = \mathfrak{f}_x + \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \lambda \Delta \mathfrak{u}_x + \frac{\lambda}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathfrak{u} \\
\varrho \frac{d\mathfrak{u}_y}{dt} &= \mathfrak{f}_y + \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \lambda \Delta \mathfrak{u}_y + \frac{\lambda}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathfrak{u} \qquad (2) \\
\varrho \frac{d\mathfrak{u}_z}{dt} &= \mathfrak{f}_z + \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \lambda \Delta \mathfrak{u}_z + \frac{\lambda}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathfrak{u}.
\end{aligned}$$

λ heißt der *Reibungskoeffizient.*

Seine Bedeutung wird klar, wenn wir eine Flüssigkeitsbewegung betrachten, bei der nur $\mathfrak{u}_x$ existiert, während $\mathfrak{u}_y = \mathfrak{u}_z = 0$ ist, und zwar soll $\mathfrak{u}_x$ nur von y abhängen. Dann folgt aus (1)

$$\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = \Pi_{zz} = \Pi$$

$$\Pi_{xy} = \Pi_{yx} = \lambda \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial y},$$

d. h. es wirkt eine tangentiale Spannung, die dem Gefälle der Geschwindigkeit proportional ist.

Grenzt die Flüssigkeit an einen festen Körper, so lautet die Bedingung an seiner Oberfläche, daß hier keine Relativbewegung der Flüssigkeit gegen den Körper stattfindet.

176. Die Energieumsetzungen. Um die Energiegleichung zu bilden, multiplizieren wir Nr. 174 (2) skalar mit $\mathfrak{u}\,dS$ und integrieren über den unendlichen Raum, an dessen Oberfläche $\mathfrak{u} = 0$ sein möge.

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\int\frac{\varrho}{2}\,\mathfrak{u}^2 dS = \int(\mathfrak{f},\mathfrak{u})\,dS - \int\Big[\Pi_{xx}\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x} + \Pi_{yy}\frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial y} + \Pi_{zz}\frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial z}$$
$$+ \Pi_{yz}\left(\frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial z}\right) + \Pi_{zx}\left(\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial x}\right) \tag{1}$$
$$+ \Pi_{xy}\left(\frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial y}\right)\Big]dS.$$

Beschränken wir uns auf inkompressible Flüssigkeiten, so wird

$$\frac{dT}{dt} + Q = \frac{d'A}{dt}. \tag{2}$$

Hier bedeutet T die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\int \varrho\,\mathfrak{u}^2 dS. \tag{3}$$

Q ist, wie wir durch Substitution von Nr. 174 (1') in Gleichung (1) dieser Nummer erkennen[1],

$$Q = 2\lambda\int \operatorname{def}^2\mathfrak{u}\cdot dS$$
$$= 2\lambda\int\left\{\left(\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x}\right)^2 + \cdots + 2\left(\frac{\frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial y}}{2}\right)^2 + \cdots\right\}dS, \tag{4}$$

bedeutet also die in der Zeiteinheit durch Reibung entwickelte Wärme

$$\frac{d'A}{dt} = \int(\mathfrak{f},\mathfrak{u})\,dS \tag{5}$$

die von den äußeren Kräften in der Zeiteinheit geleistete Arbeit.

177. Minimalprobleme der Reibungswärme. Ist die Flüssigkeitsbewegung stationär und so langsam, daß die die Quadrate der

1) Wegen der Tensorenbezeichnung vgl. man z. B. R. Gans, *Einführung in die Vektoranalysis.* 3. Aufl. Leipzig u Berlin 1913, S. 84.

Geschwindigkeiten enthaltenden Glieder der Bewegungsgleichungen vernachlässigt werden können, und leiten sich die äußeren Kräfte aus einem eindeutigen Potential ab, so gilt der Satz[1]): *Bei der stationären Bewegung ist die Reibungswärme geringer als bei irgend einer anderen Bewegung mit denselben Grenzbedingungen.*

Für die stationäre Bewegung mögen die Bezeichnungen $\mathfrak{u}_1, \Pi_1$, für die variierte Bewegung $\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ gelten. Dann ist bei der variierten Bewegung

$$Q = \int \{(\Pi_1 + \Pi_2) \operatorname{def}(\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2)\} dS = \int (\Pi_1, \operatorname{def} \mathfrak{u}_1) dS \\ + \int (\Pi_2, \operatorname{def} \mathfrak{u}_2) dS + \int \{(\Pi_1, \operatorname{def} \mathfrak{u}_2) + (\Pi_2, \operatorname{def} \mathfrak{u}_1)\} dS. \tag{1}$$

Nun ist aber

$$(\Pi_1, \operatorname{def} \mathfrak{u}_2) = (\Pi_2, \operatorname{def} \mathfrak{u}_1), \tag{2}$$

wie sich sofort durch Berücksichtigung von Nr. 174 (1′) ergibt; also ist der letzte Integrand in (1) $2\int (\Pi_1, \operatorname{def} \mathfrak{u}_2) dS$. Dieser Term läßt sich durch partielle Integration umformen, und man erhält, wenn man bedenkt, daß $\mathfrak{u}_2$ an der Oberfläche verschwindet,

$$\int (\Pi_1, \operatorname{def} \mathfrak{u}_2) dS = -\int (\operatorname{div} \Pi_1, \mathfrak{u}_2) dS \tag{3}$$

oder mit Substitution der Bewegungsgleichungen für den stationären Fall $= \int (\mathfrak{f}, \mathfrak{u}_2) dS$.

Da aber $\mathfrak{f} = -\operatorname{grad} \Phi$ sein soll, so ergibt sich durch partielle Integration

$$\int (\mathfrak{f}, \mathfrak{u}_2) dS = -\int (\operatorname{grad} \Phi, \mathfrak{u}_2) dS = \int \Phi \operatorname{div} \mathfrak{u}_2 \, dS = 0,$$

da die Flüssigkeit inkompressibel ist.

Somit lautet (1)

$$Q = Q_1 + Q_2. \tag{4}$$

Da aber Q, Q_1, Q_2 wesentlich positive Größen sind (vgl. 175 (4)), so ist hiermit der behauptete Satz bewiesen.

Aus demselben folgt die Eindeutigkeit der Lösung bei gegebenen Grenzbedingungen.[2])

Unter denselben Bedingungen läßt sich zeigen, daß eine be-

---

1) H. v. Helmholtz, *Wiss. Abh.* 1, S. 223.
2) Vgl. Helmholtz, l. c.

liebige Bewegung bei konstant gehaltenen Geschwindigkeiten an der Grenzfläche schließlich dem stationären Zustande zustrebt.

Es ist nämlich nach Nr. 175 (4)

$$\frac{1}{2}\dot{Q} = 2\lambda\int(\operatorname{def}\mathfrak{u}, \operatorname{def}\dot{\mathfrak{u}})dS = \int(\Pi, \operatorname{def}\dot{\mathfrak{u}})dS,$$

oder durch partielle Integration und Benutzung der Bewegungsgleichungen

$$\frac{1}{2}\dot{Q} = -\int(\operatorname{div}\Pi, \dot{\mathfrak{u}})dS = -\int((\varrho\dot{\mathfrak{u}} - \mathfrak{f})\dot{\mathfrak{u}})dS \tag{5}$$

Bei konservativen Kräften ist aber wie oben $\int(\mathfrak{f}, \dot{\mathfrak{u}})\,dS = 0$, also

$$\frac{1}{2}\dot{Q} = -\int\varrho\dot{\mathfrak{u}}^2 dS, \tag{6}$$

d. h. Q nimmt beständig ab, da die rechte Seite von (6) wesentlich negativ ist. Das hört auf, wenn $\mathfrak{u}$ sich nicht mehr verändert, also $\dot{\mathfrak{u}} = 0$, d. h. der Zustand stationär geworden ist.[1])

178. Strömung zwischen zwei parallelen Ebenen. Die Flüssigkeit bewege sich stationär in Richtung der x-Achse; der Vorgang sei von y unabhängig, die Ebenen $z = \pm h$ seien feste Wände, d. h.

$$\mathfrak{u}_x = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm h.$$

Dann folgt aus der Inkompressibilitätsbedingung $\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x} = 0$ und aus den Bewegungsgleichungen Nr. 174 (2)

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \lambda\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_x}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Π kann also nur Funktion von x, $\mathfrak{u}_x$ nur Funktion von z sein. Dann folgt aus der ersten Gleichung (1), daß

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\lambda\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_x}{\partial z^2} = C \tag{2}$$

sein muß, wo C konstant ist. Also wird

$$\mathfrak{u}_x = -\frac{C}{2\lambda}z^2 + Az + B$$

1) Korteweg, *Phil. Mag.* (5) **16**, 1883, p. 112.

und mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen

$$\mathfrak{u}_x = \frac{C}{2\lambda}(h^2 - z^2) = \frac{\frac{\partial \Pi}{\partial x}}{2\lambda}(h^2 - z^2), \tag{3}$$

und der Gesamtfluß durch einen Querschnitt der Höhe $2h$ und der Breite 1

$$\int_{-h}^{+h} \mathfrak{u}_x \, dz = \frac{2}{3} \frac{\frac{\partial \Pi}{\partial x}}{\lambda} h^3. \tag{4}$$

179. Durchfluß durch Kapillaren (Transpirationsmethode). Die meisten Bestimmungen des Reibungskoeffizienten von Flüssigkeiten sind dadurch gemacht worden, daß man die Ausflußgeschwindigkeit aus Kapillaren gemessen hat.

Die Kapillare habe kreisförmigen Querschnitt, ihre Achse sei die z-Richtung. Dann wird im stationären Zustande $\mathfrak{u}_z$ von z unabhängig sein; ferner wollen wir $\mathfrak{u}_x = \mathfrak{u}_y = 0$ annehmen, was außer an den Enden der Röhre zutreffen wird.

Dann folgt aus den Bewegungsgleichungen, wenn die Schwere wirkt und die z-Achse vertikal nach unten angenommen ist,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\varrho g + \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_z}{\partial y^2} \right) = 0. \tag{2}$$

Es muß also

$$\varrho g + \frac{\partial \Pi}{\partial z} = C \tag{3}$$

sein, und (2) geht, wenn wir statt x und y ebene Polarkoordinaten r, φ einführen und berücksichtigen, daß $\mathfrak{u}_z$ aus Symmetriegründen von dem Azimut φ unabhängig ist, in

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\mathfrak{u}_z}{dr} = -\frac{C}{\lambda} \tag{4}$$

über. Durch Integration ergibt sich

$$\mathfrak{u}_z = -\frac{Cr^2}{4\lambda} + A \log r + B, \tag{5}$$

wo A und B Integrationskonstanten sind.

A muß Null sein, da $\mathfrak{u}_z$ für $r = 0$ endlich bleiben muß, und B bestimmt sich aus der am Rande der Kapillaren gültigen

Grenzbedingung, daß für $r = a$ $u_z = 0$ sein muß. Also wird

$$u_z = \frac{C}{4\lambda}(a^2 - r^2). \tag{6}$$

Hier ist nach (3) $C = g\varrho + \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{l}$, wenn Π_1 und Π_2 die Drucke sind, die am unteren bzw. oberen Ende der Kapillaren der Länge l von außen auf die Flüssigkeit wirken, also

$$u_z = \left(\varrho g + \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{l}\right)\frac{a^2 - r^2}{4\lambda} \tag{6'}$$

und der Gesamtfluß

$$Q = \int_0^a u_z 2\pi r\, dr = \left(\varrho g + \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{l}\right)\frac{\pi a^4}{8\lambda}. \tag{7}$$

Dieses Gesetz über das Strömen von Flüssigkeit durch Kapillaren wurde von Poiseuille[1]) experimentell gefunden.

Falls ein Gleiten der Flüssigkeit an der Wand vorhanden wäre, müßte die Grenzbedingung anstatt $u_z = 0$ lauten

$$-\lambda \frac{\partial u_z}{\partial r} = \alpha u_z. \tag{8}$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die Relativgeschwindigkeit zwischen Wand und Flüssigkeit proportional der tangentialen Spannung $-\lambda \frac{\partial u_z}{\partial r}$ ist (vgl. den Schluß von Nr. 174). α heißt der *Gleitungskoeffizient*, und das Integral lautet unter dieser Bedingung

$$u_z = \left(\varrho g + \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{l}\right)\frac{a^2 - r^2 + 2a\frac{\lambda}{\alpha}}{4\lambda} \tag{6''}$$

$$Q = \left(\varrho g + \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{l}\right)\frac{\pi a^4}{8\lambda}\left(1 + \frac{4\lambda}{\alpha a}\right). \tag{7'}$$

Die Experimente ergeben nun, daß $\frac{\lambda}{\alpha} = 0$ ist, so daß (8) in $u_z = 0$ übergeht. Es findet also kein Gleiten an den Wandungen statt im Gegensatz zu den Resultaten von Helmholtz und Piotrowski[2]), die durch Torsionsschwingungen einer mit Wasser gefüllten, innen vergoldeten Metallkugel für λ/α den Wert 0,235 cm

1) J. L. M. Poiseuille, *C. R.* **11** und **12**, 1840—1841; **15**, 1167, 1842; *Mém. des Sav. Étrangers* **9**, 1846.

2) H. v. Helmholtz u. Piotrowski, *Wien. Ber.* **50** (2), S. 607, 1860 = H. v. Helmholtz, *Wiss. Abh.* **1**, S. 172.

gefunden haben. Diese Versuche wurden von Wetham[1]) durch Messung der Durchflußzeiten durch versilberte und nicht versilberte Glaskapillaren nachgeprüft, konnten aber nicht bestätigt werden. Neuerdings hat Ladenburg[2]) durch Wiederholung der Piotrowskischen Messungen abermals gezeigt, daß $\lambda/\alpha = 0$ ist. Es hat sich durch Messungen von Warburg[3]) sogar ergeben, daß auch bei Quecksilber, welches doch nicht benetzt, ein Gleiten an den Wandungen nicht stattfindet.

Vergleichende Messungen an verschiedenen Substanzen lassen sich durch Bestimmung der Ausflußzeiten T zwischen zwei Marken M_1 und M_2 etwa mit dem Ostwaldschen Viskosimeter anstellen. Bei diesem ist $\Pi_1 = \Pi_2$ gleich dem Atmosphärendruck, so daß der Druck ϱg, der die Flüssigkeiten zum Fließen bringt, dem spezifischen Gewicht ϱ proportional ist, und man hat nach (7)

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\varrho_1 T_1}{\varrho_2 T_2}.$$

Liegt dagegen die Kapillare horizontal, und erzeugt man die Druckdifferenz $\Pi_2 - \Pi_1$ künstlich durch Überdruck oder Vakuum, so fällt das Glied ϱg in (7) fort, und es bleibt

$$Q = \frac{(\Pi_2 - \Pi_1)\pi a^4}{8 l \lambda}. \tag{7''}$$

Ganz anders sind die Erscheinungen, die bei schnellem Fließen eintreten. Hierauf werden wir noch zurückkommen, wenn wir die Turbulenz behandeln.

Über die Grenzen der Gültigkeit der Poiseuilleschen Formel liegt eine Untersuchung von Grüneisen[4]) vor.

Eine weitere Methode der Bestimmung von Reibungskoeffizienten besteht in der Beobachtung von Schwingungsdauer und logarithmischem Dekrement von Scheiben und Kugeln, die in der Flüssigkeit schwingen. Diese Methode stammt von Coulomb[5]) und wurde von O. E. Meyer[6]) und W. König[7]) weiter ausgearbeitet.

In folgender Tabelle finden sich einige Angaben über Reibungskoeffizienten λ von Flüssigkeiten im C.G.S.-System bei einer Tem-

1) W. C. D. Wetham, *Phil. Trans. A.* **181**, 1890, S. 559.
2) R. Ladenburg, *Ann. Phys.* (4) **27**, 1908, S. 157.
3) E. Warburg, *Pogg. Ann.* **140**, 367, 1870.
4) E. Grüneisen, *Wiss. Abh. d. Phys.-techn. Reichsanst.* **4**, 153, 1905.
5) C. A. Coulomb, *Mém. d. l'Inst.* **3**, 261, 1798.
6) O. E. Meyer, *Crelles Journ.* **59**, 229, 1861; *Pogg. Ann.* **113**, 85, 1861; *Wied. Ann.* **32**, 642, 1887.
7) W König, *Wied. Ann.* **25**, 618, 1885; **32**, 194, 1887.

peratur von 18°, die wir Kohlrauschs Lehrbuch der praktischen Physik entnehmen.

	λ in $\frac{\text{dyn. sec}}{\text{cm}^2}$		λ in $\frac{\text{dyn. sec}}{\text{cm}^2}$
Wasser	0,0106	Äther	0,0026
Methylalkohol .	0,0064	Benzol	0,0066
Äthylalkohol .	0,0130	Quecksilber .	0,0159

Die starke Abhängigkeit der Reibungskonstanten zeigt an dem Beispiel des Wassers die folgende Tabelle.

t	λ	t	λ
0°	0,01797	80°	0,00357
20°	0,01004	100°	0,00284
40°	0,00655	160°	0,00174
60°	0,00470		

180. Das Fallen einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit; die Formel von Stokes. Wir wollen zunächst einen kugelförmigen festen Körper in einem konstanten Flüssigkeitsstrom ruhend voraussetzen. Die so erhaltenen Resultate sind dann leicht auf den Fall anzuwenden, daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruht, aber die Kugel sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Ferner soll die Flüssigkeitsbewegung als so langsam vorausgesetzt werden, daß die Glieder $\mathfrak{u}\,\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial l}$ (l irgend eine der Koordinaten) vernachlässigt werden können. Dann darf anstatt $\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$ auf der linken Seite der Bewegungsgleichungen $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}$ geschrieben werden, und ist der Zustand stationär, so wird die linke Seite überhaupt Null, es ist somit der ganze Einfluß der Trägheit zu vernachlässigen.

Unter diesen Bedingungen lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \lambda \Delta \mathfrak{u}_x &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \lambda \Delta \mathfrak{u}_y &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \lambda \Delta \mathfrak{u}_z &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{u} = 0. \tag{2}$$

Ferner muß

$$\text{für } r = a \qquad \mathfrak{u}_x = \mathfrak{u}_y = \mathfrak{u}_z = 0 \tag{3a}$$

sein und

$$\text{für } r = \infty \qquad \mathfrak{u}_x = \mathfrak{u}_y = 0, \;\; \mathfrak{u}_z = U. \tag{3b}$$

Differentiieren wir die Gleichungen (1) nach x resp. y resp. z, addieren sie dann und berücksichtigen (2), so folgt

$$\Delta \Pi = 0. \tag{4}$$

Die Integration werden wir am besten durchführen, indem wir räumliche Polarkoordinaten r, ϑ, φ einführen und beachten, daß aus Symmetriegründen $\mathfrak{u}_\varphi = 0$ und $\partial/\partial\varphi = 0$ ist.

In Vektorschreibweise lautet (1)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{u} = \operatorname{grad}\frac{\Pi}{\lambda}. \tag{1'}$$

Die r-Komponente von (1') wird ausgeschrieben

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r^2 \mathfrak{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\,\frac{\partial r\mathfrak{u}_r}{\partial\vartheta} = -r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Pi}{\lambda}\right). \tag{5}$$

Nach (4) muß Π/λ die Form haben

$$\frac{\Pi}{\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu P_\nu(\cos\vartheta)\, \frac{1}{r^{\nu+1}}, \tag{6}$$

wo P_ν eine einfache Kugelfunktion νter Ordnung bedeutet.

Da aber (3b) lautet

$$\text{für } r = \infty \text{ ist} \qquad \mathfrak{u}_r = U\cos\vartheta, \tag{7}$$

so wird sich die Summe (6) auf das Glied mit dem Index $\nu = 1$ beschränken, also

$$\frac{\Pi}{\lambda} = \frac{C\cos\vartheta}{r^2} \tag{8}$$

sein.

Dann folgt aus (5), wenn wir $r\mathfrak{u}_r = R(r)\cos\vartheta$ setzen,

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} rR - \frac{2R}{r^2} = \frac{2C}{r^2}, \tag{9}$$

die das Integral

$$R = -C + \frac{A}{r^2} + Br \tag{10}$$

hat.

Somit wird $\mathfrak{u}_r$ unter Berücksichtigung von (3b)

$$\mathfrak{u}_r = \left(-\frac{C}{r} + \frac{A}{r^3} + U\right) \cos\vartheta . \tag{11}$$

$\mathfrak{u}_\vartheta$ ergibt sich am besten aus (2), d. h. aus

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \mathfrak{u}_r + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta} \sin\vartheta\, \mathfrak{u}_\vartheta = 0 \tag{12}$$

zu

$$\mathfrak{u}_\vartheta = \left(\frac{C}{2r} + \frac{A}{2r^3} - U\right) \sin\vartheta . \tag{13}$$

Die Konstanten A und C bestimmen sich aus (3a), so daß schließlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_r &= U \cos\vartheta \left\{1 - \frac{3}{2}\frac{a}{r} + \frac{a^3}{2r^3}\right\} \\ \mathfrak{u}_\vartheta &= -U \sin\vartheta \left\{1 - \frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{a^3}{4r^3}\right\} \\ \mathfrak{u}_\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

und aus (8)

$$\Pi = +\lambda \frac{3a}{2} U \frac{\cos\vartheta}{r^2} \tag{15}$$

folgt.

Die z-Komponente der Kraft, welche die strömende Flüssigkeit auf die ruhende Kugel ausübt[1]), ist

$$\mathfrak{F}_z = \iint (\Pi_{rr} \cos\vartheta - \Pi_{\vartheta r} \sin\vartheta)\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi . \tag{16}$$

Anstatt die Integration über eine Kugelfläche zu erstrecken, welche den festen Körper unmittelbar umgibt, kann man über eine Kugelfläche mit unendlich großem Radius integrieren. Dort kann man aber die letzten Terme in den Klammern von (14) vernachlässigen und erhält die Spannungen nach Nr. 175 (1′)

$$\begin{aligned} \Pi_{rr} &= \Pi + 2\lambda \dot{r}_r \\ \Pi_{\vartheta r} &= 2\lambda \dot{\vartheta}_r , \end{aligned} \tag{17}$$

wo $\dot{r}_r$ und $\dot{\vartheta}_r$ die Änderungsgeschwindigkeiten der Dehnungen und Gleitungen (vgl. Nr. 105 (7)) bedeuten, d. h. es ist

$$\dot{r}_r = \frac{\partial \mathfrak{u}_r}{\partial r}, \quad \dot{\vartheta}_r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{u}_r}{\partial\vartheta} + r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathfrak{u}_\vartheta}{r}\right).$$

1) Stokes, *Cambr. Trans.* 9, 1851; *Sc. papers* 3, p. 1.

Also ist

$$\Pi_{rr} = +\frac{3}{2}\lambda a U\frac{\cos\vartheta}{r^2} + 3\lambda a U\frac{\cos\vartheta}{r^2} = +\frac{9}{2}\lambda a U\frac{\cos\vartheta}{r^2}$$

$$\Pi_{r\vartheta} = 0$$

und

$$\mathfrak{F}_z = +6\pi\lambda a U. \tag{18}$$

Addiert man zu dem Lösungssystem (14) die konstante Geschwindigkeit $\mathfrak{u}_x' = 0$, $\mathfrak{u}_y' = 0$, $\mathfrak{u}_z' = -U$, so erhält man die Lösung für den Fall, daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruht, die Kugel aber mit der konstanten Geschwindigkeit $-U$ sich in der z-Richtung bewegt. (18) gibt dann die Kraft an, die auf die Kugel wirken muß, damit sie die Geschwindigkeit U erhält.

Diese stationäre Endgeschwindigkeit U ist dadurch charakterisiert, daß die von der wirkenden Kraft geleistete Arbeit gleich der entwickelten Reibungswärme ist, diese muß also

$$\mathfrak{F}_z \cdot U = 6\pi\lambda a U^2 = \frac{\mathfrak{F}_z^2}{6\pi\lambda a} \tag{19}$$

sein.

$\frac{1}{6\pi\lambda a}$, d. h. die Geschwindigkeit, die durch die Kraft Eins hervorgerufen wird, kann man auch als *Beweglichkeit* der Kugel in der betreffenden Flüssigkeit bezeichnen.

Ist $\mathfrak{F}$ die Schwere, so ist nach (18)

$$\frac{4\pi}{3} a^3 g(\varrho' - \varrho) = 6\pi\lambda a U, \tag{20}$$

wenn ϱ' die Dichte der Kugel, ϱ die der Flüssigkeit bedeutet.

Nach dieser Formel kann man den Radius des Teilchens aus seiner Fallgeschwindigkeit bestimmen, denn es ist

$$a = 3\sqrt{\frac{\lambda U}{2g(\varrho' - \varrho)}}. \tag{21}$$

Die Gültigkeit der abgeleiteten Formeln ist auf den Fall beschränkt, daß die Trägheitsglieder vernachlässigt werden können, daß also überall $\varrho\mathfrak{u}\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial l}$ klein gegen $\frac{\partial\Pi}{\partial l}$ ist, wenn l eine beliebige Richtung bedeutet. Es muß also $\frac{\varrho U a}{\lambda}$ klein sein; sonst gelten andere Formeln.[1])

---

1) Allen, *Phil. Mag.* (5) **50**, p. 323 u. 519, 1900 untersucht das Bewegungsgesetz experimentell, falls die obige Beschränkung nicht gilt; Fr. Noether, *Über den Gültigkeitsbereich der Stockesschen Wider-*

Hat das Teilchen die Gestalt eines Ellipsoids, so sind die von Oberbeck[1]) abgeleiteten Formeln für die Fallgeschwindigkeit zu verwenden, aus denen sich die Bewegung von Stäbchen und Platten ergibt.[2])

181. Turbulenz, Erfahrungstatsachen. Hagen[3]) hat zuerst beobachtet, daß, trotzdem bei kleinen Drucken resp. Geschwindigkeiten der Reibungskoeffizient dauernd mit der Temperatur abnimmt, der Fluß Q, d. h. das in der Zeiteinheit durch den Rohrquerschnitt tretende Flüssigkeitsvolumen bei konstantem Triebdruck nicht mit wachsender Temperatur größer wird, sondern ein Maximum hat, darauf bis zu einem Minimum sinkt, um sodann wieder anzusteigen (vgl. Fig. 119).

Fig. 119.

Ist die Temperatur niedriger als ϑ_1, so ergibt sich aus den Beobachtungen, die Reynolds[4]) und Couette[5]) wiederholt haben, daß die Oberfläche des austretenden Strahls glatt ist, und daß die Strömungslinien parallel der Kapillarachse verlaufen, wie es die bisher gefundenen Integrale verlangen. Dieses Stadium heißt die Poiseuillesche Strömung.

Ist die Temperatur größer als ϑ_2, so ist die Oberfläche des austretenden Strahls gekräuselt, und mit Hilfe von gefärbten Flüssigkeitsfäden, die man in das Rohr mit eintreten läßt, erkennt man, daß die Flüssigkeitsteilchen sich in wirbelnder Bewegung befinden und nicht mehr parallel der Achse fortschreiten. Dieses Stadium heißt das der *Turbulenz* oder der *hydraulische Zustand*, da Wasser in Leitungen bei höherem Druck sich in der geschilderten Weise bewegt.

Zwischen ϑ_1 und ϑ_2 ist die Bewegung unregelmäßig und springt abwechselnd in den Poiseuilleschen oder den hydraulischen Zustand über, wie man an der bald größeren, bald kleineren Weite des ausfließenden Strahls ersehen kann.

standsformeln, Leipzig 1912 entwickelt die Formeln für das Strömungsfeld nach Potenzen der Reynoldsschen Zahl R und fügt der Stokesschen Lösung ($\lim R = 0$) das nächste Glied der Reihe hinzu. Bis zu diesem Grade der Approximation bleibt jedoch die Formel (18) für die Kraft unverändert.

1) Oberbeck, *Crelles Journ.* **81**, 1876, p. 62.
2) R. Gans, *Münch. Sitzungsber.* 1911, S. 191.
3) Hagen, *Berl. Ak. d. Wiss.* 1854.
4) Osborne Reynolds, *Phil. Trans.* **174**, S. 935, 1883 = *Sc. Papers* **2**, S. 51.
5) M. Couette, *Ann. de chim. et phys.* **21**, 1890, S. 433.

Beobachtungen von Reynolds über den Fluß Q als Funktion des Triebdrucks p bei konstanter Temperatur liefern ein Diagramm von der Form der Fig. 120 und lassen sich durch die Funktion

$$p = DQ^n \qquad (1)$$

beschreiben, wo auf der Geraden OA, dem Poiseuilleschen Stadium, n den Wert 1 hat, während auf der Kurve AB nach Reynolds $n = 1{,}722$, nach Hagen $n = 1{,}75$ ist.

Fig. 120.

Dabei ist zu erwähnen, daß, sobald bei A der Poiseuillesche Zustand aufgehört hat, zunächst die Bewegung unregelmäßig ist, so daß das Manometer dauernd schwankt, und erst bei größeren Drucken wieder eine konstante Einstellung zeigt, wenn sich der regelmäßige turbulente Zustand ausgebildet hat.

Führt man in (1) anstatt Q die Ausflußzeit Z eines gegebenen Volumens ein, so daß Z proportional $1/Q$ ist, so wird

$$p^{\frac{1}{n}} Z = C. \qquad (1')$$

Die Form des Gesetzes (1) legt eine zweckmäßigere graphische Darstellung der Beobachtungen nahe. Man trage als Abszisse $\lg p$, als Ordinate $\lg Q$ auf, dann erhält man (vgl. Fig. 121) zwei Geraden AB und CD, von denen die erste unter 45^0 gegen die Abszissenachse geneigt ist und den Poiseuilleschen Zustand ($n = 1$) repräsentiert, während die zweite CD dem turbulenten Stadium entspricht. Ihre Neigung gibt den Exponenten n. Die Kurve BC stellt das labile Übergangsgebiet dar.[1]

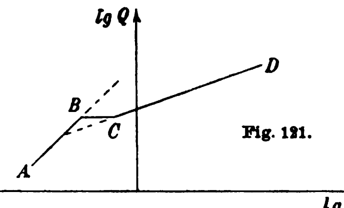


Fig. 121.

Weiteres Zahlenmaterial lieferte neuerdings Sorkau[2]) in ausgedehnten sorgfältigen Messungen an organischen Substanzen und Wasser. Er zeigte vor Allem, daß bei weiterer Steigerung

1) Daß bei Gasen entsprechende Unstetigkeiten auftreten, zeigte W. Ruckes, *Ann. Phys.* **25**, 1908, S. 983 (auch Diss. Würzburg). Die Strömung zwischen zwei konzentrischen Zylindern untersuchte Couette, l. c., Die freie Flußströmung L. Hopf, *Ann. Phys.* **32**, 1910, S. 777 (vgl. auch Diss. München 1909). Beide konnten die beiden Strömungsarten und den kritischen Wert der Geschwindigkeit (s. unten) beobachten.

2) W. Sorkau, Diss. Greifswald 1912; *Phys. Zs.* **12**, 1911, S. 582, **13**, 1912, S. 805; **14**, 1913, S. 147; **14**, 1913, S. 759.

des Drucks der soeben erwähnte turbulente Zustand, den er die „Turbulenz I" nennt, in einen anderen Zustand, die von ihm sogenannte Turbulenz II und schließlich in einen dritten Zustand, die Turbulenz III übergeht.

Alle Stadien gehorchen nach seinen Versuchen, die übrigens von Cl. Schaefer und Frankenberg[1]) im wesentlichen in noch nicht publizierten Beobachtungen bestätigt worden sind, der Gleichung (1′), nur hat n in den verschiedenen Gebieten verschiedene Werte, nämlich

$$n_1 = 1{,}5186; \quad n_2 = 2{,}3321; \quad n_3 = 2{,}1611.$$

182. Dimensionsbetrachtungen, die Reynoldsche Zahl. Auf Grund der in der vorigen Nummer angegebenen Beobachtungen wirft sich die Frage auf, ob im Gebiete der turbulenten Strömung die Bewegungsgleichungen in derselben Form gelten wie im Poiseuilleschen Stadium, d. h. ob die Reibungskraft in derselben Weise von der Poiseuilleschen Reibungskonstante λ und dem Gefälle der Geschwindigkeitskomponenten abhängt, wie im nichtturbulenten Gebiet.

Ferner ist es von Interesse, die kritische Geschwindigkeit anzugeben, bei der die Poiseuillesche Strömung aufhört existenzfähig zu sein.

Reynolds hat den Weg gewiesen, wie diese Probleme angegriffen werden können. Er nimmt die Gültigkeit der Bewegungsgleichungen in der Form Nr. **175** (2) an, und setzt voraus, daß im turbulenten Gebiete verschiedene Flüssigkeiten in verschiedenen Röhren sich mechanisch ähnlich bewegen.

Dann läßt sich durch folgende einfache Dimensionsbetrachtungen die kritische Geschwindigkeit für alle Flüssigkeiten ermitteln, wenn sie für eine bekannt ist.

Die mittlere Geschwindigkeit U im Rohr, der Triebdruck p, die Dichte ϱ, der Reibungskoeffizient λ und der Kapillarenradius a haben die Dimensionen

$$\begin{aligned} [U] &= [LT^{-1}] \\ [p] &= [ML^{-1}T^{-2}] \\ [\varrho] &= [ML^{-3}] \\ [\lambda] &= [ML^{-1}T^{-1}] \\ [a] &= [L]. \end{aligned} \tag{1}$$

1) Cl. Schaefer u. G. Frankenberg, *Phys. Zs.* **14**, **1913**, S. 89.

Man kann aus den beiden Bewegungsgleichungen Nr. 175 (2)

$$\varrho \frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \lambda \Delta \mathfrak{u}_x$$
$$\varrho \frac{d\mathfrak{u}_y}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \lambda \Delta \mathfrak{u}_y \qquad (2)$$

den Druck Π eliminieren, indem man die erste nach y, die zweite nach x differentiiert und die eine dann von der anderen subtrahiert. Daraus folgt, daß die kritische mittlere Geschwindigkeit U_c nur von der Dichte ϱ, der Reibungskonstanten λ und einer Lineardimension des Rohrs, etwa dem Radius, abhängen kann, so daß

$$[U_c] = [\varrho^x \lambda^y a^z] \qquad (3)$$

sein muß. (Die Exponenten x, y, z haben natürlich nichts mit den Raumkoordinaten zu tun.)

Durch Vergleich der Dimensionen rechts und links folgt $x = -1$; $y = 1$; $z = -1$, so daß

$$[U_c] = \left[\frac{\lambda}{\varrho a}\right] \qquad (4)$$

wird, also

$$U_c = R \frac{\lambda}{\varrho a}, \qquad (5)$$

wobei R nur eine von der Substanz und vom Rohr unabhängige Konstante sein kann, welche die Dimension einer reinen Zahl hat, die aber insofern von der Temperatur abhängen muß, als der Quotient λ/ϱ dies tut. R nennt man die Reynoldssche Zahl.[1])

Reynolds fand für R ungefähr den Wert

$$R = \frac{U_c \varrho a}{\lambda} = 1000. \qquad (6)$$

Um ferner den Zusammenhang zwischen der Konstanten C in der Gleichung Nr. 181 (1′) und der Reibungskonstanten λ zu suchen, hat v. Kármán[2]) ähnliche Dimensionsbetrachtungen durchgeführt.

Es sei

$$[p] = [\varrho^x \lambda^y a^z U^n]; \qquad (7)$$

dann folgt aus den Dimensionen, daß $x = n - 1$; $y = 2 - n$; $z = n - 2$ sein muß, so daß, wenn wir für die Dimension der

1) O. Reynolds, *Phil. Trans. Loud. R. Soc.* **174**, 1883, S. 935; **186**, 1895, S. 123.

2) Th. v. Kármán, *Phys. Zs.* **12**, 1911, S. 283.

mittleren Geschwindigkeit $[U]$, die der Ausflußzeit Z umgekehrt proportional ist, $[U] = [aZ^{-1}]$ setzen, sich durch Ziehen der n^{ten} Wurzel aus (7) die Beziehung

$$\left[p^{\frac{1}{n}} Z\right] = \left[\varrho^{\frac{n-1}{n}} \lambda^{\frac{2-n}{n}} a^{\frac{2n-2}{n}}\right] \tag{8}$$

und mit Beachtung von Nr. 181 (1′)

$$[C] = \left[\varrho^{\frac{n-1}{n}} \lambda^{\frac{2-n}{n}} a^{\frac{2n-2}{n}}\right] \tag{9}$$

ergibt.

In der Gleichung

$$C = A\varrho^{\frac{n-1}{n}} \lambda^{\frac{2-n}{n}} a^{\frac{2n-2}{n}} \tag{10}$$

muß also A von ϱ und λ unabhängig sein.

Benutzt man für zwei Substanzen dasselbe Rohr und unterscheidet für die Vergleichssubstanz (etwa Wasser) alle Größen durch den Index 0, so ergibt sich

$$\frac{C}{C_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{\frac{2-n}{n}}. \tag{11}$$

Da man n für die verschiedenen Turbulenzzustände kennt, so kann man die relative Zähigkeit im turbulenten Zustande C/C_0 durch die relative Zähigkeit im Poiseuilleschen Stadium λ/λ_0 nach (11) berechnen.

So hat v. Kármán (l. c.) die vermeintlichen von Bose[1]) beobachteten Anomalien der Reibung im turbulenten Zustande (die Substanzen hatten in diesem nicht dieselbe Reihenfolge der Zähigkeit wie im Poiseuilleschen) zwangslos durch obige Betrachtung der mechanischen Ähnlichkeit bei den verschiedenen Bewegungen erklärt.

Ebenso haben Schaefer und Frankenberg[2]) nach (10) die Temperaturabhängigkeit von C bestimmt. Da der Radius a sich nur sehr unbedeutend mit der Temperatur verändert im Vergleich mit der Abhängigkeit der Dichte und besonders der Zähigkeit von der Temperatur, so muß C von der Temperatur wie $\varrho^{\frac{n-1}{n}}$

---

1) E. Bose und D. Rauert, *Phys. Zs.* **10**, 1909, S. 406; E. und M. Bose, *Phys. Zs.* **12**, 1911, S. 126.

2) Cl. Schaefer u. G. Frankenberg, *Phys. Zs.* **14**, 1913, S. 89.

$\lambda^{\frac{2-n}{n}}$ abhängen, was sich aus Sorkaus Zahlenmaterial auch in allen drei Turbulenzzuständen ergibt.

Aus allen diesen Betrachtungen geht die Gültigkeit der Bewegungsgleichungen in der Form Nr. 175 (2) wohl mit Sicherheit hervor.

Ist $n = 2$, wie das bei den schnellsten Strömungen Sorkaus der Fall war, so ist C von der Zähigkeit ganz unabhängig und von der Temperatur nur wie $\varrho^{\frac{1}{2}}$; dann gilt nach Mie[1]) die Formel für reibungslosen Ausfluß $p = \frac{1}{2}\varrho\, U^2$. Allerdings zeigt sich durch Messung des Rohrdurchmessers und der Ausflußmenge, daß nicht der ganze Querschnitt in Bewegung ist, sondern daß im Rohrinnern ein Flüssigkeitsfaden wie ein starrer Körper reibungslos durch den an der Flüssigkeitswand ruhenden Hohlzylinder von Flüssigkeit hindurchschießt. Ein ähnliches Verhalten hatte bereits früher Darcy[2]) experimentell festgestellt.

183. Die Stabilität der Strömungen. Die experimentellen Untersuchungen Reynolds' wiesen darauf hin, daß oberhalb einer gewissen mittleren Geschwindigkeit eine laminare Strömung zwar theoretisch möglich aber labil sein wird. Um auch theoretisch die Frage zu übersehen, stellte er die folgende energetische Untersuchung an.[3])

Mit ihm führen wir die zeitlichen Mittelwerte $\bar{\mathfrak{u}}$ der Geschwindigkeit über eine Zeit τ ein, also

$$\bar{\mathfrak{u}}_x = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \mathfrak{u}_x\, d\tau \quad \text{usw.} \tag{1}$$

und setzen die wirklichen Geschwindigkeiten

$$\mathfrak{u} = \bar{\mathfrak{u}} + \mathfrak{u}', \tag{2}$$

wo $\mathfrak{u}'$ die Störung der Geschwindigkeit oder die Geschwindigkeit der turbulenten Bewegung heißen möge.

1) G. Mie, *Phys. Zs.*, **14**, 1913, S. 93.

2) Darcy, *Recherches expérimentales rélatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux.* Paris 1855.

3) O. Reynolds, *Phil. Trans.* A **174**, 1882, S. 835; **186**, 1894, S. 123; *Sc. Papers* **2**, S. 51. 535; vgl. auch H. Lamb, *Lehrb. d. Hydrodynamik*, deutsch von J. Friedel, Leipzig u. Berlin 1907, S. 743.

Dann ist nach der Definition

$$\overline{\mathfrak{u}'} = 0. \tag{3}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \varrho\left(\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial t} + \mathfrak{u}_x \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x} + \mathfrak{u}_y \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial y} + \mathfrak{u}_z \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial z}\right) \\ = \varrho \mathfrak{f}_x + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zx}}{\partial z}; \end{aligned} \tag{4}$$

sie können wegen der Inkompressibilitätsbedingung

$$\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

in die Form gebracht werden

$$\begin{aligned} \varrho \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial t} = \varrho \mathfrak{f}_x + \frac{\partial}{\partial x}(\Pi_{xx} - \varrho \mathfrak{u}_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\Pi_{yx} - \varrho \mathfrak{u}_x \mathfrak{u}_y) \\ + \frac{\partial}{\partial z}(\Pi_{zx} - \varrho \mathfrak{u}_x \mathfrak{u}_z). \end{aligned} \tag{6}$$

Kommen in der Zeit τ häufig genug Schwankungen um den Mittelwert vor, so werden

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \bar{\mathfrak{u}}_x d\tau = \bar{\mathfrak{u}}_x, \qquad \frac{1}{\tau}\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \bar{\mathfrak{u}}_x \mathfrak{u}_x' d\tau = 0, \\ \frac{1}{\tau}\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \bar{\mathfrak{u}}_x \mathfrak{u}_y' d\tau = 0, \qquad \frac{1}{\tau}\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \bar{\mathfrak{u}}_x \mathfrak{u}_z' d\tau = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

sein, also nach (2) und (7)

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{u}_x^2} &= (\overline{\mathfrak{u}_x})^2 + \overline{\mathfrak{u}_x'^2} \\ \overline{\mathfrak{u}_x \mathfrak{u}_y} &= \overline{\mathfrak{u}_x} \cdot \overline{\mathfrak{u}_y} + \overline{\mathfrak{u}_x' \mathfrak{u}_y'} \\ \overline{\mathfrak{u}_x \mathfrak{u}_z} &= \overline{\mathfrak{u}_x} \cdot \overline{\mathfrak{u}_z} + \overline{\mathfrak{u}_x' \mathfrak{u}_z'}. \end{aligned} \tag{8}$$

Mit Benutzung dieser Gleichungen ergibt sich aus (6)

$$\varrho \frac{\partial \bar{\mathfrak{u}}_x}{\partial t} = \varrho \mathfrak{f}_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\Pi_{xx}} - \varrho \bar{\mathfrak{u}}_x^2 - \varrho \overline{\mathfrak{u}_x'^2}\right) + \cdots \tag{9}$$

und aus (5)

$$\operatorname{div}\bar{\mathfrak{u}} = 0 \tag{10}$$

oder

$$\varrho \frac{d\bar{\mathfrak{u}}_x}{dt} = \varrho \mathfrak{f}_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} \tag{11}$$

usw.,

wenn

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathfrak{u}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{\mathfrak{u}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{\mathfrak{u}}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

und

$$P_{xx} = \overline{\Pi}_{xx} - \varrho \overline{\mathfrak{u}_x'^2},\ P_{xy} = \overline{\Pi}_{xy} - \varrho \overline{\mathfrak{u}_x' \mathfrak{u}_y'},\ P_{xz} = \overline{\Pi}_{xz} - \varrho \overline{\mathfrak{u}_x' \mathfrak{u}_z'} \tag{12}$$

bedeuten.

In (11) finden wir formal die gewöhnliche Gestalt der Bewegungsgleichungen wieder.

Wir bilden das Energieintegral, indem wir die Gleichungen (11) resp. mit $\bar{\mathfrak{u}}_x$, $\bar{\mathfrak{u}}_y$, $\bar{\mathfrak{u}}_z$ multiplizieren und addieren, und erhalten

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \varrho \overline{\mathfrak{u}'^2} = \varrho(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{u}}) + (\bar{\mathfrak{u}}, \operatorname{div} P). \tag{13}$$

Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf ein Gebiet, in dem keine äußeren Kräfte wirken, also $\mathfrak{f} = 0$ ist, und an dessen Grenzen $\mathfrak{u} = 0$, also auch $\bar{\mathfrak{u}} = 0$ ist.

Dann wird durch Integration von (13) über diesen Raum und Anwendung von partieller Integration rechts

$$\frac{dT_0}{dt} = -Q_0 + W, \tag{14}$$

wenn

$$T_0 = \int \frac{\varrho}{2} \bar{\mathfrak{u}}^2 dS \tag{15}$$

und

$$Q_0 = 2\lambda \int \operatorname{def}^2 \bar{\mathfrak{u}}\, dS \tag{16}$$

die kinetische Energie resp. pro Zeiteinheit entwickelte Reibungswärme, die der Mittelbewegung allein zukommen, und

$$W = \int \varrho \left\{ \overline{\mathfrak{u}_x' \cdot \mathfrak{u}_x'} \frac{\partial \bar{\mathfrak{u}}}{\partial x} + \cdots \right\} dS \tag{17}$$

bedeuten.

Die wirkliche kinetische Energie sei T; dann ist

$$\overline{T} = T_0 + \overline{T'},$$

wenn

$$T' = \frac{\varrho}{2}\int \mathfrak{u}'^2 dS \tag{18}$$

die kinetische Energie der turbulenten Bewegung bedeutet.

Nun hatten wir in Nr. 177 (4) gezeigt, daß die Wärmeentwicklung, die bei der Überlagerung zweier Bewegungen stattfindet, gleich der Summe der Wärmeentwicklungen ist, die den Teilbewegungen entsprechen. Analoges gilt hier, also ist

$$\frac{d\overline{T}}{dt} = -Q_0 - Q', \tag{19}$$

wenn

$$Q' = 2\lambda \int \overline{\mathrm{def}^2 \mathfrak{u}'} dS \tag{20}$$

die Wärmeentwicklung der turbulenten Bewegung für sich bedeutet.

Durch Subtraktion von (14) und (19) folgt somit

$$\frac{d\overline{T'}}{dt} = -Q' - W. \tag{21}$$

Die kinetische Energie der turbulenten Bewegung nimmt also zu oder ab, je nachdem die rechte Seite von (21) positiv oder negativ ist. Im ersteren Falle ist die Mittelbewegung labil, im letzteren stabil.

$-Q'$ ist nach (20) wesentlich negativ; W ist der Dichte proportional und kann positiv oder negativ sein.

Das Vorzeichen der rechten Seite von (21) bleibt unverändert, wenn $\mathfrak{u}'$ sein Zeichen ändert und auch, wenn $\mathfrak{u}'$ mit einem konstanten Faktor multipliziert wird, d. h. die Stärke der Störung ist auf die Stabilität nicht von Einfluß.

Wächst aber der absolute Wert der mittleren Geschwindigkeit $\overline{\mathfrak{u}}$, so wird auch W dem absoluten Wert nach größer, und wenn W negativ ist, so wird bei einer bestimmten mittleren Geschwindigkeit, der sogenannten „kritischen Geschwindigkeit", die durch

$$Q' = -W \tag{22}$$

definiert ist, der stabile Zustand in einen labilen umschlagen.

Bei dem Fließen durch eine Röhre vom Radius a z. B. wird $\mathrm{def}\,\overline{\mathfrak{u}}$ der Größenordnung nach durch $\frac{\overline{\mathfrak{u}}}{a}$ zu ersetzen sein, und es folgt aus (22) im Vergleich mit (17) und (20), daß die kritische Geschwindigkeit U_c der Größe $\frac{\lambda}{a\varrho}$ proportional ist.

Reynolds hat in der Tat gefunden, daß diese Größe für die Stabilität maßgebend ist, und daß U_c den Wert

$$1000 \frac{\lambda}{a\varrho} \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right] \text{ hat.}$$

Diese energetischen Untersuchungen wurden von Lorentz[1]) vereinfacht und ausgedehnt; später hat Sommerfeld[2]) nach der Methode der kleinen Schwingungen (Nr. 89) die Frage angegriffen, jedoch wurde von Mises[3]) gezeigt, daß jedes einzelne der von Sommerfeld angegebenen unendlich vielen Störungsfelder für jeden Wert der Geschwindigkeit der ungestörten Bewegung stabil ist, also nicht zur Ermittlung einer Stabilitätsgrenze führen kann.

Kapitel VIII.

Ebbe und Flut.[4])

184. Gleichgewichtstheorie. Unter Ebbe und Flut versteht man die Flüssigkeitsbewegungen auf der Erde unter dem Einfluß störender Himmelskörper, besonders des Mondes und der Sonne.

Zunächst möge die Gleichgewichtstheorie gegeben werden, d. h. es soll die Erhebung der Wasseroberfläche über das ungestörte Niveau ermittelt werden unter der Annahme, daß in jedem Moment die Form der freien Oberfläche vorhanden ist, die sich einstellen würde, wenn der störende Körper seine Lage relativ zur Erde nicht ändern würde. Befindet sich der störende Körper der Masse m im Punkte m (Fig. 122), so übt er auf einen Massenpunkt in P eine Beschleunigung aus, die sich aus dem Potential

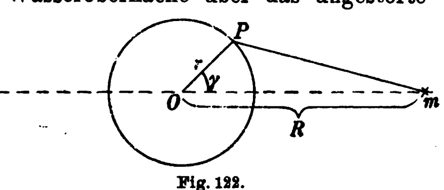


Fig. 122.

$$\Phi_1 = -\frac{km}{\sqrt{R^2 - 2rR\cos\gamma + r^2}} \tag{1}$$

berechnet, wenn k die Gravitationskonstante, r den Abstand des

1) H. A. Lorentz, *Abh. über theor. Physik* S. 43, Leipzig und Berlin 1907.

2) A. Sommerfeld, *Atti del IV congresso internazionale dei matematici*, Roma 1908, 3, S. 116.

3) R. v. Mises, *H. Weber-Festschrift*, Leipzig 1912, S. 252.

4) Sehr zu empfehlen ist das Buch von G. H. Darwin, *Ebbe u. Flut*, deutsch von A. Pockels, Leipzig 1902.

Punktes P, R den des störenden Körpers m vom Erdmittelpunkte und γ den Winkel POm bedeutet.

Das Potential der gleichförmigen Beschleunigung $\frac{km}{R^2}$ in Richtung von $\overline{Om}$, welche die Erde vom störenden Körper erfährt, beträgt im Punkte P

$$\Phi_2 = -\frac{km}{R^2} r \cos\gamma, \tag{2}$$

so daß das Potential der relativen Beschleunigung bezüglich der Erde $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$, wenn wir uns auf das Glied niedrigster Ordnung in r/R beschränken,

$$\Phi = \frac{kmr^2}{2R^3}(1 - 3\cos^2\gamma) \tag{3}$$

beträgt.

In dieser Annäherung ist Φ das Potential des „Mondes" m und des „Gegenmondes" m', der sich auf der Verlängerung von Om über O hinaus um die Strecke $Om' = Om$ befindet, und von denen jeder die halbe Masse des wirklichen störenden Körpers hat, wie sich aus der Entwicklung der Größe

$$\Phi = -\frac{k\frac{m}{2}}{\sqrt{R^2 - 2rR\cos\gamma + r^2}} - \frac{k\frac{m}{2}}{\sqrt{R^2 + 2rR\cos\gamma + r^2}} \tag{4}$$

ergibt.

Das Potential, welches die kugelförmig gedachte Erde der Masse M selbst im Punkte P erzeugt, ist

$$\Phi' = -\frac{kM}{r}. \tag{5}$$

Im Gleichgewicht muß also auf der Oberfläche, d. h. für $r = a$

$$\Phi + \Phi' = \text{konst.} \tag{6}$$

sein, oder wenn wir die Erhebung über das ungestörte Niveau $r = a$ mit ζ bezeichnen, da genähert

$$\Phi'(a + \zeta) = -\frac{kM}{(a+\zeta)} = -\frac{kM}{a} + \frac{kM}{a^2}\zeta = \text{konst.} + \frac{kM}{a^2}\zeta \tag{7}$$

ist,

$$\frac{kM}{a^2}\zeta = \frac{kma^2}{2R^3}(3\cos^2\gamma - 1) \tag{8}$$

oder

$$\zeta = \frac{3m}{2M}\left(\frac{a}{R}\right)^3 a\left(\cos^2\gamma - \frac{1}{3}\right) + C = A\left(\cos^2\gamma - \frac{1}{3}\right) + C. \tag{9}$$

Da $\cos^2\gamma$ zwischen 0 und 1 schwankt, bedeutet A die maximalen Niveaudifferenzen auf der Erde.

Bei dieser Ableitung haben wir die Erde als kugelförmig aufgefaßt und von der Zentrifugalkraft abgesehen. Der Ausdruck (9) bleibt aber auch noch richtig, wenn man $\frac{kM}{a^2}$ durch g ersetzt und unter g die Erdbeschleunigung unter Berücksichtigung der Zentrifugalkraft im betrachteten Punkte versteht.

Die Konstante C in (9) ergibt sich aus der Beziehung $\int \zeta d\sigma = 0$, wenn die Integration sich über die Oberfläche der ganzen Flüssigkeit erstreckt, einer Gleichung, die eine unmittelbare Folge der Inkompressibilität des Wassers ist. Bedeckt das Meer die ganze Erde, so läßt sich die Integration ohne weiteres ausführen und ergibt $C = 0$.

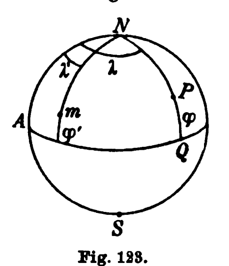


Fig. 123.

γ soll jetzt durch die geozentrischen Koordinaten von P und m bestimmt werden. Es seien (Fig. 123) die geographische Länge und Breite des Punktes P $\lambda = \sphericalangle ANQ$ und $\varphi = PQ$ und die des störenden Körpers λ', φ'. Dann ist

$$\cos\gamma = \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda - \lambda'), \tag{10}$$

also nach Gleichung (9)

$$\zeta = \frac{3}{2} A\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} A \sin 2\varphi \sin 2\varphi' \cos(\lambda - \lambda')$$
$$+ \frac{1}{2} A \cos^2\varphi \cos^2\varphi' \cos 2(\lambda - \lambda') + C. \tag{11}$$

Ist der Mond der störende Körper, so hat das erste Glied, da φ' nach vier Wochen wieder denselben Wert annimmt, eine 14tägige Periode. Im zweiten und dritten Glied darf man in erster Näherung φ' innerhalb eines Tages als konstant ansehen, und da infolge der Rotation der Erde der Stundenwinkel λ' des Mondes eine Periode von Tagesdauer hat, so stellt das zweite Glied die ganztägigen, das dritte die halbtägigen Fluten dar.

185. Dynamische Theorie. Durch die Gleichgewichtstheorie der Gezeiten werden die wirklichen Verhältnisse deshalb nicht beschrieben, weil bei jener die Trägheit des Wassers ganz außer Acht gelassen ist, welche bewirkt, daß die Phase der Bewegung nicht mit der Phase der Kraft übereinstimmt.

Wir gehen deshalb dazu über, die dynamische Theorie der Ebbe und Flut zu entwickeln.

Kanaltheorie. Um zunächst ganz einfache Verhältnisse zu haben, nehmen wir einen Kanal der Breite b und Höhe h an, in dessen Längsrichtung wir die x-Achse legen, während die y-Achse vertikal nach oben und der Nullpunkt auf dem Boden des Kanals sich befinden möge.

Wir nennen die Verschiebungskomponenten eines Wasserteilchens in Richtung der Koordinatenachsen zur Zeit t ξ und η und nehmen die Geschwindigkeiten als unendlich klein an.

Dann gilt die Bewegungsgleichung

$$\varrho \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mathfrak{f}_x, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{u}_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ ist.

Ferner ist der Druck p an irgend einer Stelle gegeben durch

$$p - p_0 = (\varrho g - \mathfrak{f}_y)(h + \eta - y), \tag{2}$$

wenn p_0 den Atmosphärendruck bedeutet.

Differentiieren wir (2) nach x, so erhalten wir

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (\varrho g - \mathfrak{f}_y) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{f}_y}{\partial x}(h + \eta - y). \tag{3}$$

Nehmen wir an, daß $\mathfrak{f}_y$ sich auf horizontalen Strecken, die mit der Tiefe des Kanals vergleichbar sind, nicht merklich verändert, so können wir das zweite Glied in (3) fortlassen, und nehmen wir die Kraft $\mathfrak{f}$ als unendlich klein an, so ist $\mathfrak{f}_y \frac{\partial \eta}{\partial x}$ als Größe zweiter Ordnung zu vernachlässigen, und es bleibt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varrho g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{3'}$$

wodurch (1) die Form

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \varrho g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathfrak{f}_x \tag{4}$$

annimmt.

Ferner ergibt die Kontinuitätsgleichung, angewandt auf den Raum zwischen zwei im Abstande dx voneinander befindlichen Kanalquerschnitten,

$$- \frac{\partial}{\partial x}(\xi h b) dx = \eta b dx$$

oder

$$- h \frac{\partial \xi}{\partial x} = \eta. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt durch Elimination von η

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\mathfrak{f}_x}{\varrho} \tag{6}$$

und durch Differentiation von (4) nach x und Benutzung von (5)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Hierbei ist berücksichtigt worden, daß $h \frac{\partial \mathfrak{f}_x}{\partial x}$ als unendlich kleine Größe vernachlässigt werden darf.

Die Gleichungen (6) und (7) sind die der schwingenden Saite. Erstere gibt die Longitudinalbewegungen unter Einwirkung einer äußeren Kraft in Richtung der Saite, letztere die Transversalbewegungen.

Eine Störung pflanzt sich, wie aus der Theorie der schwingenden Saite bekannt ist, mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{gh} \tag{8}$$

fort.

Ist der Kanal an den Enden $x = 0$ und $x = l$ durch vertikale Wände begrenzt, so muß an diesen $\xi = 0$ sein.

Dann ist unter der Annahme, daß keine äußeren Kräfte wirken, daß also

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

ist, das allgemeinste Integral

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k \pi x}{l} \left(J_k \cos \frac{2 \pi t}{T_k} + J_k' \sin \frac{2 \pi t}{T_k} \right), \tag{9}$$

wenn

$$T_k = \frac{2 l}{k c} \tag{10}$$

ist.

Ist die Ausdehnung des Kanals klein, so wird die störende Kraft auf alle Wasserteilchen dieselbe sein, also können wir

$$\frac{\mathfrak{f}_x}{\varrho} = C \cos(\nu t + \beta) \tag{11}$$

ansetzen. Dann wird auch

$$\xi = \xi_0 \cos(\nu t + \beta) \tag{12}$$

sein, und ξ_0 genügt der Gleichung

$$\frac{d^2\xi_0}{dx^2} + \frac{\nu^2}{c^2}\xi_0 + \frac{C}{c^2} = 0, \tag{13}$$

die das Integral hat

$$\xi_0 = -\frac{C}{\nu^2} + G\cos\frac{\nu}{c}x + H\sin\frac{\nu}{c}x, \tag{14}$$

wo G und H Integrationskonstanten sind.

Wegen der Grenzbedingungen muß aber

$$G = \frac{C}{\nu^2} \quad \text{und} \quad H\sin\frac{\nu l}{c} = \frac{C}{\nu^2}\left(1 - \cos\frac{\nu l}{c}\right),$$

d. h.

$$H = \frac{C}{\nu^2}\operatorname{tg}\frac{\nu l}{2c}$$

sein, so daß

$$\xi = \frac{2C}{\nu^2}\frac{\sin\frac{\nu x}{2c}}{\cos\frac{\nu l}{2c}}\sin\frac{\nu(l-x)}{2c}\cos(\nu t + \beta) \tag{15}$$

und nach (5)

$$\eta = \frac{hC}{\nu c\cos\frac{\nu l}{2c}}\sin\frac{\nu}{c}\left(x - \frac{l}{2}\right)\cos(\nu t + \beta) \tag{16}$$

wird.

Ist die Periode der Störungskraft groß gegen die der freien Grundschwingung $T_1 = \frac{2l}{c}$, so daß $\frac{\nu l}{c}$ eine kleine Zahl ist, so wird mit Benutzung von (8)

$$\eta = \frac{C}{g}\left(x - \frac{l}{2}\right)\cos(\nu t + \beta), \tag{17}$$

d. h. die Oberfläche ist eben, und diese Ebene steht senkrecht auf der Resultanten aus der Schwerkraft und der Störungskraft, gerade so, als wenn das Wasser keine Trägheit hätte.

Die horizontale Verschiebung ξ hat dieselbe Phase wie die Kraft, wenn $\frac{\nu l}{2c} < \pi/2$, entgegengesetzte, wenn $\frac{\nu l}{2c} > \pi/2$ ist, d. h. je nachdem die Periode der Störungskraft größer oder kleiner als die Grundperiode der freien Schwingung ist.

Fallen diese beiden Perioden zusammen, so werden ξ und η unendlich groß. Dann ist Resonanz vorhanden, und unsere Lösungen sind ungültig, da die Reibung nicht berücksichtigt ist.

Die Verschiedenheit in der Phase bewirkt, daß die Flut eine direkte oder inverse ist, je nachdem die Störungskraft eine größere oder kleinere Periode als die freie Grundschwingung hat. Das ist eine allgemeine Eigenschaft erzwungener Schwingungen (vgl. Nr. 96 S. 201).

In praktischen Fällen ist $c = \sqrt{gh}$ immer so klein, daß die täglichen Fluten invers sind.

Des weiteren betrachten wir einen Kanal, der parallel dem Äquator die Erde umgibt. Ein Punkt P dieses Kanals habe die Koordinaten (geogr. Breite und Länge) φ, λ, während der Mond die Koordinaten φ', λ' habe. Dann ist der Winkel γ durch Nr. **184** (10) gegeben, wo $\lambda' = -\varepsilon - nt$ und n die Winkelgeschwindigkeit des Mondes relativ zur Erde, ε die Epoche bedeutet.

Aus dem in Nr. **184** (3) gegebenen Potential Φ folgt somit die Kraftkomponente in Richtung des Kanals

$$\mathfrak{F}_\lambda = -\frac{\partial \Phi}{a \cos\varphi\, \partial \lambda} = -\frac{2Ag}{a} \cos\gamma \cos\varphi' \sin(nt + \lambda + \varepsilon), \qquad (18)$$

wenn A dieselbe Bedeutung hat wie in Nr. **184** (9), oder durch Substitution von $\cos\gamma$ nach Nr. **184** (10)

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\lambda = &-\frac{Ag}{a} \sin\varphi \sin 2\varphi' \sin(nt + \lambda + \varepsilon) \\ &-\frac{Ag}{a} \cos^2\varphi' \cos\varphi \sin 2(nt + \lambda + \varepsilon). \end{aligned} \qquad (19)$$

In der Bewegungsgleichung (6) ist dx durch $a \cos\varphi\, d\lambda$ zu ersetzen, sie lautet also

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{a^2 \cos^2\varphi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \lambda^2} + \mathfrak{F}_x, \qquad (20)$$

wo $\mathfrak{F}_x = \mathfrak{F}_\lambda$ und somit auch ξ nach (19) in zwei Summanden $\mathfrak{F}_{x1}$ und $\mathfrak{F}_{x2}$ zerfällt.

ξ_1 genügt der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \frac{c^2}{a^2 \cos^2\varphi} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \lambda^2} - G_1 \sin(nt + \lambda + \varepsilon), \qquad (21)$$

deren Integral

$$\xi_1 = \frac{G_1}{n^2 - \frac{c^2}{a^2 \cos^2\varphi}} \sin(nt + \lambda + \varepsilon) \qquad (22)$$

ist. Ebenso findet man

$$\xi_2 = \frac{G_2}{4\left(n^2 - \frac{c^2}{a^2 \cos^2\varphi}\right)} \sin 2(nt + \lambda + \varepsilon),$$

so daß

$$\xi = \frac{Ag}{a} \frac{\sin\varphi \sin 2\varphi'}{n^2 - \frac{c^2}{a^2\cos^2\varphi}} \sin(nt + \lambda + \varepsilon) + \frac{Ag}{4a} \frac{\cos^2\varphi' \cos\varphi}{n^2 - \frac{c^2}{a^2\cos^2\varphi}} \sin 2(nt + \lambda + \varepsilon) \tag{23}$$

und wegen (5)

$$\eta = \frac{Ac^2}{2} \frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{(c^2 - n^2a^2\cos^2\varphi)} \cos(nt + \lambda + \varepsilon) + \frac{Ac^2 \cos^2\varphi \cos^2\varphi'}{2(c^2 - n^2a^2\cos^2\varphi)} \cos 2(nt + \lambda + \varepsilon) \tag{24}$$

wird.

Die beiden Terme in (24) stellen eine ganz- und eine halbtägige Flut dar, die je nach dem Vorzeichen von $c^2 - n^2a^2\cos^2\varphi$ direkt oder invers sind; das Verhalten hängt also von der geographischen Breite des Kanals ab. Ferner ändert der erste Term für $\varphi' = 0$, d. h. beim Durchgang des Mondes durch den Äquator, also zweimal im Monat, sein Vorzeichen.

Gezeiten des Weltmeeres. Ein Meer der konstanten Tiefe h möge die ganze Erde bedecken, die wir als Kugel vom Radius a auffassen wollen.

Ist wieder ζ die Erhebung über das ungestörte Niveau, so ergibt die Kontinuitätsbedingung, angewandt auf ein Parallelepiped der Höhe h und der Kanten $a\,d\vartheta$ resp. $a\sin\vartheta\,d\varphi$,

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\mathfrak{u}_\vartheta h a \sin\vartheta\, d\varphi)\,d\vartheta + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathfrak{u}_\varphi h a\, d\vartheta)\,d\varphi = -a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \frac{\partial\zeta}{\partial t},$$

aus der

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial(h\mathfrak{u}_\vartheta \sin\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{\partial h\mathfrak{u}_\varphi}{\partial\varphi}\right\} \tag{25}$$

folgt.

Die Bewegungsgleichungen lauten, wenn $\mathfrak{u}_\vartheta$ und $\mathfrak{u}_\varphi$ unendlich klein sind, da

$$p - p_0 = g\varrho(h + \zeta - r) \tag{26}$$

ist, und Φ das Potential der auf die Volumeinheit bezogenen Störungskraft bedeutet, analog wie in (4)

$$\frac{\partial\mathfrak{u}_\vartheta}{\partial t} = -g\frac{\partial\zeta}{a\partial\vartheta} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi}{a\partial\vartheta}, \qquad \frac{\partial\mathfrak{u}_\varphi}{\partial t} = -g\frac{\partial\zeta}{a\sin\vartheta\,\partial\varphi} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi}{a\sin\vartheta\,\partial\varphi}. \tag{27}$$

Eliminiert man $\mathfrak{u}_\vartheta$ und $\mathfrak{u}_\varphi$ aus (25) mittels (27), so erhält man

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{gh}{a^2}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial\left(\zeta+\frac{\Phi}{\varrho g}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\left(\zeta+\frac{\Phi}{\varrho g}\right)}{\partial\varphi^2}\right\}. \quad (28)$$

Ist keine Störungskraft vorhanden, so erhalten wir für ζ Lösungen der Form

$$\zeta = \sum_n \zeta_n \cos\nu_n t,$$

wo ζ_n der Gleichung

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial\zeta_n}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\zeta_n}{\partial\varphi^2} + \frac{\nu_n{}^2 a^2}{gh}\zeta_n = 0 \quad (29)$$

genügt.

Damit ζ_n auf der ganzen Kugel endlich bleibt, muß, wie in der Theorie der Kugelfunktionen gezeigt wird,

$$\frac{\nu_n{}^2 a^2}{gh} = n(n+1)$$

sein, wo n eine ganze Zahl ist, d. h. die Frequenzen $\nu_n/2\pi$ der freien Schwingungen sind durch

$$\nu_n = \frac{c}{a}\sqrt{n(n+1)} \quad (30)$$

gegeben, und ζ_n ist eine Kugelfunktion der Ordnung n.

Da Φ der Gleichung $\Delta\Phi = 0$ genügt, kann man diese Funktion nach Kugelfunktionen entwickeln und erhält, wenn man die zeitliche Abhängigkeit durch den Faktor $\cos\nu t$ ausdrückt,

$$\Phi = \cos\nu t \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n. \quad (31)$$

Ferner setzen wir ζ in der Form an

$$\zeta = \cos\nu t\sum_{n=1}^{\infty} Y_n, \quad (32)$$

wo Y_n eine Kugelfunktion $n$ter Ordnung bedeutet.

So erhalten wir, da Φ_n und Y_n der Gleichung der Kugelfunktionen genügen,

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial\Phi_n}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)\Phi_n = 0$$

$$Y_n = \frac{\frac{\Phi_n}{\varrho g}}{\frac{\nu^2}{\nu_n{}^2} - 1}, \quad (33)$$

wenn $\nu_n/2\pi$ nach (30) die Frequenz der $n$ten freien Schwingung der Wassermasse bedeutet.

Ist also die Frequenz der äußeren Kraft $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als die der n ten freien Schwingung, so ist die erzwungene $n$te Oberschwingung $\left\{\begin{matrix}\text{direkt}\\\text{invers}\end{matrix}\right\}$.

Bei allen diesen Betrachtungen ist die Coriolische Kraft infolge der Erddrehung außer Acht gelassen worden.

Drittes Buch.

Akustik.

Kapitel I.

Schallausbreitung.

Die physikalische Akustik ist ein Spezialgebiet der allgemeinen Mechanik, nämlich der Lehre von der Ausbreitung von Longitudinalwellen und von den sie erregenden elastischen Schwingungen tönender Körper, soweit sie Schallwellen hervorrufen, die im Ohr Tonempfindungen erregen. Doch läßt sich in keiner Weise eine scharfe Abgrenzung des Gebietes durchführen; insbesondere ist es üblich, auch Schwingungen von weit über die obere Hörgrenze (ca. 20000 v. d.) hinausgehender Schwingungszahl zur Akustik zu rechnen. Es sind naturgemäß in den früheren Abschnitten im wesentlichen die Grundlagen der Akustik bereits enthalten, insbesondere die Theorie der elastischen Schwingungen der tonerregenden Körper. Es sollen daher in diesem Abschnitt nur einige speziellere, im Früheren nicht oder nur kurz behandelte Probleme der Akustik besprochen werden. Im übrigen kann insbesondere auf die Theorie der Schwingungen Buch I Kap. VII und Buch IIB Kap. VI verwiesen werden.

186. Schallausbreitung und Schallgeschwindigkeit für sehr kleine Amplitude. Die allgemeinen Grundgleichungen der Hydrodynamik (Nr. 150 und Nr. 145 (4′)) lauten für kompressible, reibungslose, tropfbare oder gasförmige Flüssigkeiten bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials φ[1]) und Fehlens äußerer Kräfte:

$$P = \int \frac{dp}{\varrho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} \qquad (1)$$

$$0 = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)}{\partial z}. \qquad (2)$$

1) Wir bezeichnen das Potential in diesem Buch mit dem entgegengesetzten Vorzeichen wie früher, so daß jetzt $u_x = \partial\varphi/\partial x$ usw.

Bei den Schallbewegungen können nun im allgemeinen die Geschwindigkeiten sowie die Änderungen des Druckes und der Dichte gegen ihre Normalwerte p_0, ϱ_0 als sehr klein angenommen werden vgl. Nr. **169**. Unter dieser Annahme kann zunächst ϱ als eine lineare Funktion von p angesetzt werden, also

$$dp = a^2 d\varrho, \tag{3}$$

wobei a^2 eine positive Konstante ist, da die Dichte stets mit dem Druck wächst. Es sei ferner die Verdichtung s eingeführt durch die Definition $\varrho = \varrho_0(1 + s)$. Es wird dann:

$$P = \int \frac{dp}{\varrho} = a^2 s.$$

Dies, sowie die Voraussetzung, daß die Geschwindigkeiten sehr klein sind, in (1) und (2) eingeführt, gibt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 s = 0 \tag{4}$$

und

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \Delta\varphi = 0. \tag{5}$$

Differentiation von (4) nach t und Einsetzen in (5) liefert

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta\varphi. \tag{6}$$

Ebene Wellen. Es sei φ nur von z und t, nicht von x und y abhängig, so daß sich (6) reduziert auf

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \tag{7}$$

Die allgemeine Lösung ist $\varphi = F_1(z - at) + F_2(z + at)$, wobei F_1 bzw. F_2 willkürliche Funktionen der Argumente $z - at$ bzw. $z + at$ sind (Nr. **126** (4)).

Sie stellen nach der $+z$- bzw. $-z$-Richtung mit der Geschwindigkeit $a = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}$ fortschreitende Wellen dar (vgl. Nr. **83**). Wir beschränken uns auf die Lösung F_1. Da hier

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_1'(z - at)$$

ist, ferner nach (4) die Verdichtung

$$s = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{a} F_1'(z - at),$$

so geht die Bewegung der Luftteilchen in Richtung der Fortpflanzung vor sich, die Welle ist *longitudinal*, und ferner ist die Verdichtung der jeweiligen Geschwindigkeit proportional.

Kugelwellen (vgl. Nr. **172**). Hängt φ nur vom Abstande r von einem Zentrum ab, das sich im Koordinatenanfangspunkt befinde, so wird aus Gl. (6)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$$

oder

$$r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \left(r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$$

oder

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}.$$

Dies ist die Form der Gleichung (7), aber für $(r\varphi)$ statt für φ. Die Lösung $\varphi = \frac{1}{r} \psi_1(r - at) + \frac{1}{r} \psi_2(r + at)$ stellt die Superposition von zwei Kugelwellen dar, die mit derselben Geschwindigkeit

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} \tag{8}$$

zum Zentrum hin- bzw. von ihm fortschreiten, jedoch wegen des Faktors $\frac{1}{r}$ mit einer mit der Entfernung vom Zentrum abnehmenden Amplitude. Die Geschwindigkeit der Luftteilchen hat wieder die Richtung der Fortpflanzung der Welle; diese ist eine Longitudinalwelle.

187. Schallgeschwindigkeit in Gasen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallwellen $\sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}$ in Luft hat zuerst Newton[1]) berechnet unter der Voraussetzung, daß die Beziehung zwischen Druck und Dichte durch das Boyle-Mariottesche Gesetz $p = \varrho \cdot \text{konst.}$ gegeben sei, daß also die Schallwellen isotherm verlaufende Vorgänge seien. Für solche ist also $dp = d\varrho \cdot \text{konst.}$, $\frac{dp}{p} = \frac{d\varrho}{\varrho}$, also die Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} = \sqrt{\frac{p}{\varrho}}$.

Hierin bedeuten p und ϱ zwei zusammengehörige Werte von Druck und Dichte des betreffenden Gases (bzw. der Flüssigkeit) bei der Temperatur, für welche a berechnet werden soll.

---

1) J. Newton, *Philos. nat. princ. math.,* London 1687 (Tomus II, Sectio VIII, Prop. 48).

Für trockene Luft von Atmosphärendruck bei 0^0 Celsius ist, wenn wir als Masseneinheit das Kilogramm, als Längeneinheit das Meter, als Zeiteinheit die Sekunde nehmen,

$p =$ Gewicht einer Quecksilbersäule von 0,76 m Höhe bei 0^0 und 1 qm Querschnitt = 10 330 kg pro Quadratmeter $\times$ Schwerebeschleunigung $g = 10\,330 \times 9{,}81 \ \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{sec}^2}$.

Ferner ist $\varrho = 1{,}293$ kg pro Kubikmeter, woraus $a = \sqrt{\frac{p}{\varrho}} = 280$ m pro Sekunde.

Die Versuche haben dagegen den Wert 332 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ergeben. Laplace[1]) legte die über ein Jahrhundert vergeblich gesuchte Ursache der Nichtübereinstimmung des Newtonschen Wertes der Schallgeschwindigkeit mit der Beobachtung klar. Sie beruht darin, daß eine Schallwelle nicht, wie Newton annahm, ein isothermer, sondern ein adiabatisch verlaufender Vorgang ist. Die Verdichtungen und Verdünnungen folgen bei Schallwellen so schnell aufeinander, daß die hierbei auftretenden adiabatischen Erwärmungen bzw. Abkühlungen voll zur Geltung kommen und nicht durch Wärmeleitung teilweise oder ganz, wie es bei Newtons Formel vorausgesetzt ist, ausgeglichen werden. Der Zusammenhang zwischen Druck und Dichte ist also derjenige, der für adiabatischen Verlauf gilt, nämlich, wie in der Thermodynamik gezeigt werden wird,

$$\frac{p}{\varrho^{\varkappa}} = \text{konst.}, \tag{1}$$

wo $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ gleich dem Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen ist.

Nach (1) ist

$$\frac{dp}{d\varrho} = \varkappa \frac{p}{\varrho}$$

und folglich

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\varrho}}. \tag{2}$$

Hiernach ist die Schallgeschwindigkeit $\sqrt{\varkappa}$ mal größer als nach der Newtonschen Formel. Für trockene Luft von 0^0 ergibt sich mit $\varkappa = 1{,}405$ die Schallgeschwindigkeit in voller Übereinstimmung mit der Erfahrung zu $a = 332 \ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

---

1) Laplace, *Ann. chim. phys.* t. **20** (1822).

188. Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von Druck und Temperatur. Da für ideale Gase bei konstanter Temperatur die Dichte dem Druck proportional ist, so ist die Schallgeschwindigkeit bei gleichbleibender Temperatur unabhängig vom Druck.

Die Schallgeschwindigkeiten verschiedener Gase verhalten sich, soweit diese als ideale betrachtet werden dürfen, bei derselben Temperatur wie die zugehörigen Werte von $\sqrt{\frac{\varkappa}{\varrho}}$, oder — falls $\varkappa$ denselben Wert hat — umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Dichten.

Nach der allgemeinen Zustandsgleichung der Gase $\frac{p}{\varrho} = RT$ (R = individuelle Gaskonstante, T = absolute Temperatur) läßt sich die Schallgeschwindigkeit schreiben:

$$a = \sqrt{\varkappa R T},$$

ist also proportional der Wurzel aus der absoluten Temperatur. G. Quincke[1]) hat hierauf ein „akustisches Thermometer" gegründet.

189. Schallgeschwindigkeit in nichtidealen Gasen. Bei Herleitung der Gleichung $a = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\varrho}}$ für die Schallgeschwindigkeit in Gasen war die nur für vollkommen ideale Gase geltende adiabatische Beziehung zwischen Druck und Volumen $p v^{\varkappa} =$ konst. benutzt. Für die realen Gase und Dämpfe ist der Wert von $\frac{dp}{d\varrho}$ nicht mehr durch $\varkappa \frac{p}{\varrho}$ gegeben, sondern hängt in komplizierterer Weise von Druck und Dichte ab. Man kann hierzu die von der mechanischen Wärmetheorie gegebenen Formeln benutzen:

$$\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_{\text{adiab}} = \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\vartheta} = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\vartheta} - \frac{\vartheta}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v^2,$$

woraus wegen $\varrho = \frac{1}{v}$

$$a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_{\text{adiab}}} = v\sqrt{-\frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\vartheta}}$$

oder

$$a = v\sqrt{\frac{\vartheta}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\vartheta}}.$$

---

1) G. Quincke, *Wied. Ann.* **63**, 1897, S. 66.

Die Größen v, c_v, $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\vartheta$, $\left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v$ sind aus direkten Messungen bzw. aus einer Zustandsgleichung des Gases, etwa der van der Waalsschen, zu entnehmen. Je weiter das Gas vom idealen Zustand entfernt ist, insbesondere also bei sehr tiefen Temperaturen und sehr großen Drucken, um so weniger sind die für ideale Gase geltenden Gesetzmäßigkeiten erfüllt, daß die Schallgeschwindigkeit vom Druck unabhängig ist und daß sie ferner proportional der Wurzel aus der absoluten Temperatur ist. In extremen Fällen kann es zu sehr großen Abweichungen von diesen Gesetzen kommen.[1]) Da das Verhältnis der spezifischen Wärmen einer genauen direkten Messung schwer zugängig ist, wird die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit oft zur Ermittelung von $\varkappa$ benutzt. Aus dem Wert von $\varkappa$ wiederum kann, wie in der kinetischen Gastheorie gezeigt werden wird, auf die Anzahl der Atome im Molekül geschlossen werden.

190. Einfluß von Reibung und Wärmeleitung. Geht die Schallbewegung streng adiabatisch in einem Medium ohne Reibung vor sich, so ist kein Grund zu einer Dämpfung der Schallwellen vorhanden. Der vollkommen adiabatische Verlauf würde natürlich nur vorhanden sein, wenn die Wärmeleitung Null wäre; Reibung und Wärmeleitung werden nun eine Dämpfung der Schallwellen bewirken und möglicherweise auch die Schallgeschwindigkeit beeinflussen. Der Einfluß der Reibung auf die Schallgeschwindigkeit ist von Stokes[2]) und von Helmholtz[3]) berechnet worden. In voller Allgemeinheit, unter Berücksichtigung sowohl der Reibung als auch der Wärmeleitung ist die Schallbewegung bei Ausbreitung im freien Raum, sowie in einer Röhre, von G. Kirchhoff[4]) behandelt worden.

Einfluß der Reibung. Zur Berechnung des Einflusses der Reibung können wir mit Stokes folgendermaßen vorgehen.. Nach Nr. 175 (2) sind die Bewegungsgleichungen einer Flüssigkeit mit Reibung bei Abwesenheit äußerer Kräfte und Beschränkung auf kleine Bewegungen $\varrho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta u_x + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} u$ und die beiden

1) Siehe z. B. P. P. Koch, *Ann. d. Phys.* **26**, 1908, p. 551. Messung der Schallgeschwindigkeit in Luft bei 0° und —79° bei Drucken bis zu 200 Atmosphären.

2) Stokes, *Cambridge Transactions,* 1845.

3) Helmholtz, *Verh. d. natur-hist. mediz. Vereins zu Heidelberg* 1863, Bd. 3, S. 16 = *Ges. Abh.* Bd. 2, S. 883.

4) G. Kirchhoff, *Ges. Abh.* S. 450; *Pogg. Ann.* **134**, 1868.

analogen, wo μ der Reibungskoeffizient ist. Nehmen wir ebene Schallwellen an, $u_y = u_z = 0$, u und p nur Funktion von x, so ist:

$$\varrho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Die Kontinuitätsgleichung ist

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

wo s die Verdichtung.

Hierzu tritt die Beziehung Nr. 186 (3)

$$dp = a^2 \varrho_0 ds. \tag{3}$$

Mit Benutzung von (2) und (3) wird Gleichung (1):

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{4}{3}\frac{\mu}{\varrho_0}\frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2 \partial t}. \tag{4}$$

Mit Stokes[1]) sei nun die Dämpfung einer Welle von n Schwingungen pro Sekunde untersucht, die in $x = 0$ mit konstanter Amplitude A aufrecht erhalten werden. Wir setzen:

$$u_x = Ae^{-\alpha x}\cos(2\pi \cdot nt - \beta x);$$

Einsetzung in (4) gibt

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{4\pi^2 n^2 a^2}{a^4 + \frac{64\mu^2\pi^2 n^2}{9\varrho_0^2}}, \qquad 2\alpha\beta = \frac{\frac{32}{3}\frac{\mu\pi^3 n^3}{\varrho_0}}{a^4 + \frac{64\mu^2\pi^2 n^2}{9\varrho_0^2}}.$$

Im allgemeinen wird also sowohl eine Dämpfung als auch eine Änderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit eintreten. Für Gase ist jedoch das zweite Glied des Nenners gegen das erste außerordentlich klein, so daß annähernd $\beta = \frac{n}{a}$ und $\alpha = \frac{8\mu\pi^2 n^2}{3\varrho_0 a^3}$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird also nicht geändert, dagegen erfolgt eine allmähliche Dämpfung der ebenen Schallwellen bei ihrer Fortschreitung.

Je größer die Schwingungszahl, desto größer ist die Dämpfung durch Reibung; außerdem wächst sie mit abnehmender Dichte des Gases.

Einfluß von Reibung und Wärmeleitung. Zu dieser Dämpfung durch Reibung tritt jedoch noch der Einfluß der Wärmeleitung, den Kirchhoff[2]) berechnet hat. Unter Beibehaltung der von der

---

1) Rayleigh, *Theorie des Schalles* II S. 368.
2) G. Kirchhoff, *Pogg. Ann.* **134**, 1868 = *Ges. Abh.* S. 540.

Hydrodynamik gelieferten Grundgleichungen ist nur die Beziehung zwischen Druck- und Dichteänderung zu modifizieren, die nun nicht mehr die adiabatische ist; und zwar tritt an die Stelle der Gleichung $\frac{dp}{d\varrho} = \frac{c_p}{c_v}\frac{p}{\varrho}$ jetzt, wenn mit k die innere Wärmeleitungsfähigkeit, mit α der Ausdehnungskoeffizient des Gases bezeichnet wird,

$$k\Delta\vartheta = \frac{1}{\alpha p_0}\left(c_v\varrho\,\frac{\partial p}{\partial t} - c_p p\,\frac{\partial\varrho}{\partial t}\right).$$

Ist $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$, so ist nach Kirchhoff die Dämpfung durch Reibung und Wärmeleitung gegeben durch $u_x = u_0 e^{-mx}$, wo

$$m = \frac{8\pi^2}{3}\frac{\mu n^2}{\varrho_0 a^3} + \frac{2\pi^2 n^2}{a^3}\frac{k\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}{c_v\varrho_0}, \tag{5}$$

oder wenn wir die Wellenlänge λ durch die allgemein gültige Beziehung $a = n\lambda$ (Nr. 83 (2)) einführen, sowie c_v durch das experimentell bestimmbare c_p $\left(c_v = \frac{c_p}{\varkappa}\right)$ ersetzen,

$$m = \frac{2\pi}{a\varrho_0}\left(\frac{4}{3}\mu + \frac{\varkappa-1}{c_p}\cdot k\right)\frac{1}{\lambda^2}. \tag{5'}$$

Es tritt also zu der Reibungsdämpfung noch eine Wärmeleitungsdämpfung. Derselbe Ausdruck gilt für die Dämpfung kugelförmiger Wellen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird bei ebenen und kugelförmigen Wellen im *freien Raum* nicht durch Reibung und Wärmeleitung beeinflußt. Dagegen erfolgt, wie Kirchhoff gezeigt hat, und wie für die Messung der Schallgeschwindigkeit besonders wichtig ist, *in Röhren* nicht nur eine Dämpfung, sondern auch eine Verminderung der Schallgeschwindigkeit. Es wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einer Röhre vom Radius r

$$a' = \frac{a}{1 + \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} + \left(\varkappa - \frac{1}{\varkappa}\right)\sqrt{\frac{k}{c_v\varrho}}}{2r\sqrt{\pi n}}}$$

oder nahezu (6)

$$a' = a\left(1 - \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} + \left(\varkappa - \frac{1}{\varkappa}\right)\sqrt{\frac{k}{c_v\varrho}}}{2r\sqrt{\pi n}}\right).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Luftteilchen an der Röhrenwand selbst haften und die konstante Temperatur derselben besitzen. Von Thiesen[1]) ist diese Rechnung durch Berücksichtigung des Einflusses der Endflächen bei einer geschlossenen Röhre erweitert worden.

191. Dämpfung der Schallwellen. Die Gleichung Nr. 190 (5') für die Größe der Dämpfung einer ebenen Welle zeigt, daß die Dämpfung mit der Schwingungszahl n wächst, und zwar ist die, wie in Nr. 198 gezeigt, dem Quadrat der Amplitude proportionale Intensität

$$J = J_0 e^{-2mx} = J_0 e^{-A\frac{x}{\lambda^2}}.$$

A hat für Luft den Zahlenwert 0,00032 cm. Solange n innerhalb des Bereichs der hörbaren Schwingungen (bis ca. 20 000 v. d.) liegt, hat m für Luft nur einen sehr kleinen Wert. Eine merkliche Dämpfung tritt bei Luft erst bei weit über der oberen Hörgrenze liegenden Schallwellen ein.

So geht z. B. die Intensität auf den hundertsten Teil des Anfangswertes bei einer Wellenlänge

$\lambda = 0,8$ mm nach Durchlaufen einer Strecke von 40 cm,
$\lambda = 0,1$ „ „ „ „ „ „ 0,6 „ .[2])

Es ist damit eine Grenze für die kürzesten noch zu beobachtenden akustischen Wellen gegeben.

Diese Folgerungen sind an Schwingungszahlen bis zu $\lambda = 0,83$ mm von Neklepajew[3]) geprüft worden. Es ergab sich A etwa doppelt so groß als nach Nr. 190 (5') berechnet.[4])

192. Unabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von Schwingungszahl und Amplitude. Da die Formel für die Schallgeschwindigkeit die Schwingungszahl nicht enthält, so pflanzen sich verschieden hohe Töne mit derselben Geschwindigkeit fort. Für die innerhalb des musikalischen Bereichs liegenden Töne folgt dies schon aus der Tatsache, daß Musikstücke in allen Entfernungen im richtigen Rhythmus gehört werden. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Leuchtgas ist die Unabhängigkeit von der

---

1) M. Thiesen, *Ann. der Phys.* **25**, 1908, S. 506.
2) P. Lebedew, *Ann. d. Phys.* **35**, 1911, S. 171.
3) N. Neklepajew, *Ann. d. Phys.* **35**, 1911, S. 175.
4) Eine Dämpfung durch Wärmestrahlung kommt, wie Lord Rayleigh, *Scientific Papers* **4**, S. 376 (Cambridge 1903) gezeigt hat, als zu geringfügig, nicht in Betracht.

Schwingungszahl bis zu der enormen Schwingungszahl von 800 000 Doppelschwingungen, d. h. ganzen Perioden (mit v. d., „vibrations doubles", bezeichnet) von E. Dieckmann[1]) nachgewiesen worden. In engen Röhren ist aber wie oben gezeigt die Schallgeschwindigkeit von der Schwingungszahl in gewissen Grenzen abhängig.

Endlich zeigt die Gleichung Nr. **186** (8), daß die Schallgeschwindigkeit auch von der Amplitude unabhängig ist. Innerhalb gewisser Grenzen hat dies H. Kayser[2]) bestätigt.

193. Wellen endlicher Amplitude. Alle im vorigen abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten verlieren ihre strenge Gültigkeit, wenn man die Voraussetzung ihrer Ableitung, daß nämlich die Druckunterschiede sehr kleine Bruchteile des ganzen Druckes sind, fallen läßt.

Mit Earnshow[3]) können wir für ebene Wellen folgende annähernde Betrachtung anstellen. Allgemeiner haben wir die Beziehung

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}},$$

wo ξ die Verschiebung des dem Orte x angehörigen Teilchens ist. Bei adiabatischem Vorgang ist

$$p = p_0 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\varkappa},$$

also

$$p = \frac{p_0}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\varkappa}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\varkappa p_0}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\varkappa + 1}} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

und die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\varkappa p_0}{\varrho_0 \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\varkappa + 1}} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Setzen wir nun mit Earnshow

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = F\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right),$$

wo F eine unbekannte Funktion, so ist

---

1) E. Dieckmann, *Inaug.-Diss.*, Berlin 1908; *Ann. d. Phys.* **27**, 1908, S. 1066.

2) H. Kayser, *Wied. Ann.* **6**, 1879, S. 456.

3) G. Earnshow, *Phil. Trans.* 1860, S. 133.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F'^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

wo F' der Differentialquotient von F nach $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ist. Mithin ist

$$F'^2 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} : \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = c^2 \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-\varkappa-1},$$

$$F' = \mp c \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-\frac{\varkappa+1}{2}},$$

wo c die Schallgeschwindigkeit für unendlich kleine Amplitude ist. Hieraus

$$F = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \mp \frac{2c}{1-\varkappa}\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\frac{1-\varkappa}{2}} + \text{konst.};$$

da gleichzeitig $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$, so folgt

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \mp \frac{2c}{1-\varkappa}\left[\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\frac{1-\varkappa}{2}} - 1\right].$$

Nun sei $d\xi$ die Änderung der Störung ξ, wenn man von einem Teilchen x nach der Zeit dt zu dem unendlich benachbarten Teilchen $x + dx$ übergeht, dann ist

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t} dt + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx.$$

Für $d\xi = 0$ muß dx der Weg sein, den die Störung während dt zurückgelegt hat. Mithin ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störung

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \xi}{\partial t} : \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Für diese wird also

$$c_1 = \mp \frac{2c}{1-\varkappa}\left[\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\frac{1-\varkappa}{2}} - 1\right] : \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

oder annähernd

$$c_1 = \pm c\left[1 - \frac{\varkappa+1}{4}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right].$$

Daraus folgt, daß die verschiedenen Teile einer Welle verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben. Bei der positiven Welle ist die Geschwindigkeit der dichteren Teile größer. Diese werden

also allmählich die weniger dichten überholen, so daß es schließlich zu einer Art „Brandung“ kommt, die eine Unstetigkeit im Verlauf der Bewegung darstellt, von der an die abgeleiteten Formeln nicht mehr gelten.

In strengerer Form hat Riemann[1]) die Grundgleichungen für endliche Amplituden integriert.

Die Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik, Nr. 145 Gl. (11) und (4), lauten, wenn u die Geschwindigkeit an der Stelle x ist, für ebene Longitudinalwellen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{dp}{d\varrho} \frac{\partial \log \varrho}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial t} + u \frac{\partial \log \varrho}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2}$$

Multipliziert man (2) mit $\sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}$, addiert zu (1) und setzt zur Abkürzung

$$\int \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}\, d \log \varrho = f(\varrho),$$

$$f(\varrho) + u = 2r,$$

$$f(\varrho) - u = 2s,$$

so erhält man

$$\frac{\partial r}{\partial t} = - \left\{ u + \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} \right\} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = - \left\{ u - \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} \right\} \frac{\partial s}{\partial x}$$

und daraus

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} \left\{ dx - \left(u + \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} \right) dt \right\}$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} \left\{ du - \left(u - \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} \right) dt \right\}.$$

Unter der stets zutreffenden Voraussetzung, daß $\frac{dp}{d\varrho}$ positiv ist, ist danach r konstant für einen geometrischen Punkt, der sich mit der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}$ bewegt.

Hingegen ist s konstant für einen Punkt, der sich mit der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}$ bewegt.

1) B. Riemann, *Göttinger Abh.* Bd. 8, 1860.

Ein bestimmter Wert von r schreitet also mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} + u$ vorwärts, und ein gegebener Wert von s mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} - u$ rückwärts. Man kann sich danach die Art der Bewegung folgendermaßen veranschaulichen. Es sei die ursprüngliche Störung des Gleichgewichts beschränkt auf den Raum $a < x < b$. Außerhalb sei ursprünglich für

$$x < a: \quad r = r_1, \quad s = s_1$$
$$x > b: \quad r = r_2, \quad s = s_2.$$

Das Gebiet, in dem r variabel ist, schreitet vor, dasjenige, in dem s variabel ist, zurück; es trennen sich also schließlich die beiden Gebiete, und zwischen ihnen bildet sich ein Raum, in dem $r = r_1$, $s = s_2$ ist, also die Gasteilchen wieder im Gleichgewicht sind. Von der ursprünglich erschütterten Stelle gehen also zwei nach entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Wellen aus. In der vorwärtsschreitenden ist $s = s_2$, also $u = f(\varrho) - 2s_2$; mit einem bestimmten Wert von ϱ ist also eine bestimmte Geschwindigkeit u verbunden. Sowohl die Dichtigkeit als auch die Geschwindigkeit der Teilchen rücken also mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} + u$ vorwärts, die um so größer ist, je größer die Dichte ϱ ist. In der rückwärtslaufenden Welle ist dagegen mit der Dichte ϱ die Geschwindigkeit $-f(\varrho) + 2r_1$ verbunden und diese beiden Werte bewegen sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} + f(\varrho) - 2r_1$ rückwärts. Auch hier wächst die Geschwindigkeit mit der Dichte ϱ.

Trägt man x als Abszisse, ϱ als Ordinate einer Kurve auf, so bewegt sich jeder Punkt dieser Kurve parallel der Abszissenachse mit um so größerer Geschwindigkeit, je größer ihre Ordinate ist. Es holen also schließlich Punkte mit größeren Ordinaten voraufgehende Punkte mit kleineren Ordinaten ein, so daß die Kurve hier senkrecht zur x-Achse wird. Die Funktionen $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ werden also hier unendlich und die Voraussetzungen der Herleitung der Differentialgleichungen sind nicht mehr erfüllt.

Es werden also die Verdichtungswellen, d. h. diejenigen Teile der Welle, in denen die Dichtigkeit in der Fortpflanzungsrichtung abnimmt, bei ihrem Fortschreiten immer schmaler und gehen in Verdichtungsstöße über, während die Breite der Verdünnungswellen fortwährend wächst.

Für die Akustik ergibt sich hieraus, daß bei endlicher Schwingungsweite, wenn die Druckunterschiede nicht als unendlich klein betrachtet werden dürfen, eine Änderung der Form der Schallwelle, also des Klanges, bei der Fortpflanzung eintreten muß.

Riemann hat auch die Gesetze für das Fortschreiten von Verdichtungsstößen angegeben und für den Grenzfall diskutiert, daß Unstetigkeiten von u und ϱ vorhanden sind.

Für die in der Akustik normaler Weise vorkommenden Amplituden sind die Dichteänderungen nicht groß genug, um merkbare Abweichungen vom Normalwert hervorzurufen, wie die schon erwähnten Versuche von H. Kayser an Stimmgabeln gezeigt haben, bei denen die Intensitäten im Verhältnis 1 : 70 variiert wurden. Dagegen läßt sich die Riemannsche Theorie an den Explosionswellen prüfen. W. Wolff[1]) konnte zeigen, daß die hierbei gemessenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im vollen Einklang mit der Riemannschen Theorie stehen.

194. Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten. Die für die Schallgeschwindigkeit gefundene Formel $a = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}$ gilt ihrer Herleitung nach nicht nur für Gase, sondern auch für *Flüssigkeiten.*

Nach Definition ist die bei Zunahme des allseitigen Druckes p um dp eintretende relative Dichteänderung $\frac{d\varrho}{\varrho}$, dividiert durch die Druckzunahme dp, also $\frac{d\varrho}{dp}\cdot\frac{1}{\varrho}$, die Kompressibilität K, so daß die Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten wird:

$$a = \sqrt{\frac{1}{\varrho K}}, \tag{1}$$

oder auch, bei Einführung des Volumelastizitätsmoduls $M = \frac{1}{K}$,

$$a = \sqrt{\frac{M}{\varrho}}. \tag{2}$$

Für Wasser von 8° ist in absolutem Maß im CGS.-System $K = 475\cdot 10^{-13}$, $\varrho = 0{,}998$, mithin

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{10^{13}}{0{,}998\cdot 475}} = 144\,100\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \\ &= 1441\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}. \end{aligned}$$

1) W. Wolff, *Wied. Ann. d. Ph. u. Ch.* **69**, 1899, S. 329.

Colladon und Sturm[1]) fanden bei ihren Messungen im Genfer See bei 8^0: $a = 1435 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Wie bei Gasen ist auch hier der Vorgang als adiabatischer anzusehen, so daß in (1) für K die adiabatische für sehr schnell wechselnde Verdichtungen geltende Kompressibilität zu nehmen ist. Experimentell ist bisher fast stets die isotherme Kompressibilität K_i bestimmt und in den Tabellen angegeben worden. Nach der Thermodynamik ist ganz allgemein

$$\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_{\text{adiab.}} = \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_{\text{isoth.}}, \quad \text{so daß} \quad a = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{1}{\varrho K_i}}.$$

c_p und ϱ können direkt gemessen werden; das direkt nicht bestimmbare c_v läßt sich aus dem spezifischen Volumen, der isothermen Kompressibilität K_i und dem Ausdehnungskoeffizienten berechnen nach der von der Thermodynamik gelieferten Beziehung

$$c_p - c_v = -\vartheta\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\vartheta \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right)_p^2.$$ [2])

Für Wasser von 13^0 ist K_i auf Atmosphären bezogen 0,000048, der Ausdehnungskoeffizient 0,00012, das spezifische Volumen 1,0005. Hiernach ist $\frac{c_p}{c_v} = 1,001$.

In diesem Falle sind mithin $K_{\text{isoth.}}$ und $K_{\text{adiab.}}$ nur um ca. 1‰ voneinander verschieden, so daß man praktisch in der Formel

$$a = \sqrt{\frac{1}{\text{Dichte} \times \text{Kompressibilität}}}$$

die experimentell bestimmte isotherme Kompressibilität anstatt der adiabatischen benutzen kann. Doch ist das im allgemeinen durchaus nicht zulässig, z. B. ist für Äthyläther bei 18^0 $\frac{c_p}{c_v} = 1,32$, also die adiabatische Kompressibilität ca. 30% kleiner als die isotherme.

Ohr

Ton

Fig. 124.

195. Methoden zur Messung der Schallgeschwindigkeit. Die Messung der Schallgeschwindigkeit erfolgt indirekt (nur für

1) Colladon und Sturm, *Ann. chim. phys.* (2) **36**, 1827.
2) Vgl. z. B. Helmholtz, *Vorles. über theor. Physik* Bd. **6**, S. 224.

Luft und Wasser ist sie mehrfach direkt durch Signalmethoden bestimmt worden) durch Messung der Schwingungszahl n und Wellenlänge λ eines Tones in dem betreffenden Medium unter Benutzung der allgemeinen Beziehung $c = n\lambda$. λ kann dabei in verschiedener Weise gemessen werden. Das am häufigsten verwendete Verfahren ist, stehende Wellen in einem Rohr (s. Nr. **84**) durch Reflexion an einer festen Wand zu erzeugen. Der Abstand zweier benachbarter Knoten bzw. Bäuche ist eine halbe Wellenlänge des Tones. (Über die Bestimmung von n siehe Nr. **197**.) Die Aufsuchung der Knoten kann durch das Ohr erfolgen, indem man, nach Quincke[1]), ein enges beiderseits offenes Glasrohr, dessen eine Öffnung durch einen Schlauch mit dem Ohr verbunden ist, in die weite Röhre einführt. Da das Ohr auf Druckschwankungen reagiert, so hört man Intensitätsmaxima jedesmal, wenn die andere Öffnung des Rohres sich in einem Knoten der stehenden Schallwelle befindet. Gewissermaßen eine Umkehrung dieses Verfahrens ist das folgende[2]): Eine in der Nähe des offenen Endes in der Wand des weiten Rohres angebrachte Öffnung ist durch Ansatz und Schlauch mit dem Ohr verbunden. Das andere Ende der Röhre ist durch einen verschiebbaren Stempel verschlossen. Die Stellungen des Stempels, bei denen die Luftsäule der Röhre in maximale Resonanz mit einer vor die Röhre gehaltenen Tonquelle kommt, liegen sukzessive um $\frac{1}{2}\lambda$ der Tonquelle auseinander (Fig. 124). Die Erscheinung der Interferenz (s. Nr. **80**) benutzt Quincke[3]) in der Weise, daß er einen Ton in eine Röhre eintreten läßt, die sich in zwei Röhren verzweigt, die U-förmig gebogen sich wieder vereinigen. Die Länge der einen Verzweigung läßt sich durch einen posaunenartigen Auszug vergrößern. Jedesmal wenn der Längenunterschied der beiden Zweige ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge des Tones ist, vernichten sich an der Vereinigungsstelle die beiden Zweigtöne (Fig. 125).

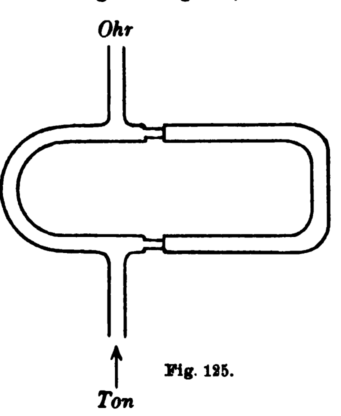


Fig. 125.

1) G. Quincke, *Wied. Ann.* **63**, 1897, S. 66.
2) G. Quincke, *Pogg. Ann.* **128**, 1866, S. 190; siehe auch A. Kalähne, *Ann. der Physik* **11**, 1903, S. 225; **20**, 1906, S. 398.
3) G. Quincke, *Pogg. Ann.* **128**, 1866, S. 179.

196. Kundtsche Staubfiguren (vgl. Nr. 171). Eine vielbenutzte einfache objektive Methode zur Sichtbarmachung der Knoten und Bäuche stehender Schallwellen in Gasen sind die *Kundtschen Staubfiguren.* Wie Kundt[1]) fand, wird in eine Röhre gestreutes leichtes Pulver durch die stehende Schallwelle aufgewirbelt und ordnet sich in Querriefen an, die an den Bäuchen am besten ausgebildet sind, während es sich an den Knoten in kleinen Ringen anordnet, deren Inneres freibleibt. Die Entstehung der Kundtschen Staubfiguren ist nach W. König[2]) durch die mechanischen Kräfte bedingt, die feste Körper in bewegten Flüssigkeiten aufeinander ausüben (s. Nr. 163).

Bewegen sich in einer im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit von der Dichte μ zwei Kugeln von den Radien R und R' in einander parallelen Geraden in der Richtung der z-Achse mit derselben gleichförmigen Geschwindigkeit ω, sind a, b, c a', b', c' die Koordinaten ihrer Mittelpunkte und r_0 der Abstand der Mittelpunkte, so üben sie scheinbar aufeinander eine Kraft aus[3]), deren Komponenten nach x, y, z, die nach a, b, c, bzw. a', b', c genommenen partiellen Differentialquotienten des Ausdruckes

$$\Omega = -\pi\mu R^3 R'^3 \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial c^2} \frac{1}{r_0}$$

sind. (Vgl. Nr. 157.)

Die Kräfte bleiben ungeändert, wenn umgekehrt die Flüssigkeit im Unendlichen sich mit der Geschwindigkeit ω nach der negativen z-Achse bewegt und die Kugeln ruhen. Ferner ist nach Bjerknes in dem Fall, daß die Flüssigkeit sich oszillatorisch bewegt, wie es ja bei den Schallschwingungen der Fall ist, die mittlere Kraft, mit der die Kugeln aufeinander wirken, gleich dem mittleren Wert der Kraft, die in jedem einzelnen Augenblick zwischen ihnen besteht.

Ist also

$$\omega = \omega_0 \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

so ist der Mittelwert von Ω:

$$\overline{\Omega} = -\frac{\pi\mu R^3 R'^3 \omega_0^2}{T} \frac{\partial^2}{\partial c^2} \frac{1}{r} \int_0^T \cos^2 2\pi \frac{t}{T} dt$$

$$= -\frac{\pi}{2} \mu R^3 R'^3 \omega_0^2 \frac{\partial^2}{\partial c^2} \frac{1}{r}.$$

1) A. Kundt, *Pogg. Ann.* **126**, 1863, S. 513.
2) W. König, *Wied. Ann.* **42**, 1891, S. 549.
3) G. Kirchhoff, *Mechanik*, Leipzig 1883, S. 250.

Die (xy-)Ebene enthalte die Verbindungslinie der beiden Kugeln, die mit der z-Achse den Winkel ϑ bilde. Die Komponenten der scheinbaren Kraft der zweiten Kugel auf die erste sind:

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial a} = -\frac{3}{2}\pi\mu \frac{R^3 R'^3}{r_0^4}\omega_0^2 \sin\vartheta\,(1 - 5\cos^2\vartheta);$$

$$Y = \frac{\partial \Omega}{\partial b} = 0;$$

$$Z = \frac{\partial \Omega}{\partial c} = -\frac{3}{2}\pi\mu \frac{R^3 R'^3}{r_0^4}\omega_0^2 \cos\vartheta\,(3 - 5\cos^2\vartheta).$$

Hieraus folgt, daß die Kraft in der Ebene liegt, die durch die Bewegungsrichtung der Flüssigkeit und die Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte geht. Sie bildet im allgemeinen einen Winkel φ mit der z-Achse, bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\vartheta\,\frac{1 - 5\cos^2\vartheta}{3 - 5\cos^2\vartheta}.$$

In den beiden Spezialfällen, daß r_0 mit der $\pm z$-Richtung übereinstimmt oder auf ihr senkrecht steht, fällt die Kraft mit der r_0-Richtung zusammen.

Und zwar besteht eine *abstoßende* Kraft von der Größe

$$\frac{3\mu R^3 R'^3 \omega_0^2}{r^4},$$

wenn die beiden Kugeln in Richtung der Bewegung hintereinander liegen, dagegen eine *anziehende* Kraft von der halben Größe, wenn ihre Verbindungslinie senkrecht auf der Strömungsrichtung steht. Sind viele Kugeln vorhanden, die den Staubteilchen in der Schallröhre entsprechen, so werden sich diese in allen zur Strömungsrichtung senkrechten Richtung anziehen, in der ihr parallelen sich abstoßen, so daß sie also das Bestreben haben werden, sich in Flächen aneinanderzureihen, die auf der Schallschwingungsrichtung senkrecht stehen und die sich wegen der Abstoßung in Richtung ihrer Normalen als Rippen deutlich voneinander absondern werden — wie es für die Kundtschen Staubfiguren charakteristisch ist.

Auf Veranlassung von W. König[1]) hat Thomas diese Kräfte gemessen und in voller quantitativer Übereinstimmung mit der Theorie gefunden.

1) W. König, *Verh. d. Deutsch. Physik. Ges.* 1911, S. 805.

Bei allen diesen Methoden ist auf die in Nr. **190** besprochene Verringerung der Schallgeschwindigkeit in Röhren Rücksicht zu nehmen.

Die Schallgeschwindigkeit in *Flüssigkeiten* ist ebenfalls mit Hilfe der Kundtschen Staubfiguren gemessen worden.[1]) Auch hier ist die Röhrenwand von Einfluß, jedoch nur zum geringsten Teil infolge der Reibung und Wärmeleitung, wie bei Gasen, vielmehr, wie bereits Helmholtz[2]) ausgeführt und später Korteweg[3]) eingehend berechnet hat, infolge der elastischen Nachgiebigkeit der Röhrenwand, welche die Schallgeschwindigkeit zu klein erscheinen läßt.

Die Schallgeschwindigkeit in *festen Körpern*, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Longitudinalwellen in Stäben ist, wie in Nr. **132** bewiesen, gegeben durch $c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$, wo E der Elastizitätsmodul, ϱ die Dichte ist.

Streng genommen bedeutet E hier den adiabatischen, für sehr schnelle, keinen Ausgleich der Kompressionswärme gestattenden Dilatationswechsel geltenden Elastizitätsmodul. Jedoch ist, wie Grüneisen[4]) experimentell gezeigt hat, der Unterschied des isothermen und des adiabatischen Elastizitätsmoduls, in Übereinstimmung mit den von der Thermodynamik gelieferten Formeln, so gering — er beträgt nur wenige Promille — daß er bisher überhaupt nicht meßbar war. Die Messung der Schallgeschwindigkeit in *festen Körpern* geschieht nach Kundt so, daß der zu untersuchende Stab in der Mitte festgeklemmt und durch Reiben zu seinem Longitudinalgrundton angeregt wird. Durch Verdickung des vorderen Endes oder mittels einer angekitteten Scheibe wird diese Schwingung in die Kundtsche Röhre übertragen und dort die Luft in stehende Schwingungen derselben Frequenz versetzt. Sind c_1, λ_1 bzw. c_2, λ_2 die Schallgeschwindigkeiten und Wellenlängen desselben Tones n im Stab bzw. in der Luft in der Röhre, so ist

$$n = \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_2}{\lambda_2}, \quad \text{also} \quad c_1 = c_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Fig. 126.

λ_1 ist nun gleich der doppelten Länge des Stabes (s. Nr. **132**),

1) K. Dörsing, *Ann. der Phys.* **25**, 1908, S. 227.
2) H. Helmholtz, *Wiss. Abh.*, Bd. I, S. 246.
3) D. J. Korteweg, *Wied. Ann.* **5**, 1878, S. 525.
4) E. Grüneisen, *Ann. der Phys.* **22**, 1907, S. 842.

λ_2 ist durch das Doppelte des Abstandes zweier benachbarten gleichen Stellen der Kundtschen Staubfiguren gegeben (Fig. 126). Wird c_2 als bekannt angenommen, so ist damit c_1 gegeben. Ersetzt man die Luft durch ein anderes Gas, dem der Index 3 gegeben sei, so ist

$$\frac{c_2}{\lambda_2} = \frac{c_3}{\lambda_3}, \quad \text{oder} \quad c_3 = c_2 \frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

so daß auf diese Weise also auch die Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Gasen bestimmt werden kann.

197. Messung der Schwingungszahl. Diese erfolgt vielfach als Umkehrung der vorher besprochenen Methoden zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit unter Benutzung der allgemein gültigen Beziehung $c = n\lambda$, indem man c, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Luft, als bekannt annimmt und die Wellenlänge λ nach den bereits angegebenen Methoden mißt. Die Genauigkeit ist natürlich hierbei nicht größer als diejenige, mit der c bekannt ist. Über *graphische Methoden* vgl. z. B. F. Auerbach, *Akustik*, in Winkelmanns Handbuch der Akustik Bd. II, S. 186 ff. Theoretisch von Interesse ist die von F. Melde[1]) angegebene *Resonanzmethode*, die aber nur auf feste tönende Körper anwendbar ist. Hierbei wird dessen Schwingung unter Vermittlung eines an ihn befestigten kleinen Korkkeils auf einen prismatischen einseitig festgeklemmten Metallstab übertragen, dessen Länge verändert wird, bis die Schwingungszahl einer seiner Transversaleigenschwingungen (s. Nr. **128**) gleich der zu messenden Schwingungszahl ist.

Die Ordnungszahl der Eigenschwingung erkennt man an der Anzahl der durch Sand sichtbar gemachten Knotenlinien. Hieraus läßt sich die Schwingungszahl aus Elastizitätsmodul, Dichte und den Dimensionen nach Nr. **135** berechnen. Bequemer wird mit einer Tonquelle von bekannnter Schwingungszahl geeicht. Handelt es sich um Vergleichung zweier sehr nahe gleichen Schwingungszahlen, so ist hierzu ein ebenso bequemes wie genaues Mittel die Zählung der *Schwebungen*, deren Zahl gleich der Differenz der Schwingungszahlen ist; s. Nr. **81**. Welches die Tonquelle mit der höheren Schwingungszahl ist, ermittelt man durch kleine Belastung und damit Vertiefung der einen Tonquelle; wird die Schwebungszahl kleiner, so hatte diese die höhere Schwingungszahl. Das Verfahren ist subjektiv natürlich nur anwendbar, wenn die Schwebungs-

---

1) F. Melde, *Wied. Ann.* **66**, 1898, S. 767; **67**, 1899, S. 781.

zahl nicht über etwa 8 hinausgeht. Von dieser Beschränkung frei ist das verwandte ebenfalls subjektive Verfahren, welches die *Kombinationstöne* benutzt (s. Nr. 97, 98 und 202).

Eine ganz besonders genaue Vergleichung der Schwingungszahlen einander sehr naher oder auch sehr nahe in einem einfachen Intervall stehender fester tönender Körper ist durch Beobachtung der *Lissajousschen Figuren* möglich, deren Theorie in Nr. 82 gegeben ist. Es ist dort gezeigt, daß ein Massenpunkt, dessen Bahn gegeben ist durch $x = A \sin(2\pi n t + \alpha)$ und $y = B \sin(2\pi n t + \beta)$, eine Ellipse beschreibt, deren Achsengröße und -Richtungen von den Amplituden A und B und der Phasendifferenz $\beta - \alpha$ abhängt. Sind ferner die Schwingungszahlen nicht genau gleich, so kann man dies so auffassen, als sei die Phasendifferenz mit der Zeit veränderlich und durchlaufe die Kurve nacheinander alle Ellipsen, die diesen jeweiligen Phasendifferenzen $\beta - \alpha$ entsprechen. Ist $y = B \sin(2\pi m t + \beta)$, so ist diese Phasendifferenz, wenn $m - n = \nu$ gesetzt wird, $2\pi\nu t + \beta - \alpha$. Die Phasendifferenz ändert sich um 2π in der Zeit $T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{m-n}$. Nach Verlauf dieser Zeit hat also periodisch die Ellipse wieder dieselbe Lage und Größe der Achse.

Der Unterschied der Schwingungszahlen ist $m - n = \frac{1}{T}$. Die Schnelligkeit der Änderung der Lissajousschen Figur gibt ein Maß für die Differenz der Schwingungszahlen.

Eine solche Bahn beschreibt aber nach Lissajous ein Lichtstrahl, der nacheinander von zwei Stimmgabeln reflektiert wird, deren Schwingungsebenen aufeinander senkrecht stehen. Auf einem Schirm zeichnet der Lichtstrahl dann die Lissajousschen Figuren auf (vgl. Fig. 55 S. 169). Die Genauigkeit dieser Vergleichungsmethode ist außerordentlich groß. Ist z. B. die Periode $T = 100$ sec, so wäre der Unterschied der Schwingungszahlen $m - n = \frac{1}{T} = 0{,}01$.

Kapitel II.

Schallintensität.

198. Definition. Formeln für die Schallintensität. Als Schallintensität oder Schallstärke pflegt man zu definieren entweder die in 1 ccm im Mittel enthaltene mechanische Energie oder die im Mittel in 1 sec durch 1 qcm hindurchgehende Energie.

Für fortschreitende Wellen sind beide Definitionen in Gebrauch, während erstere für stehende Wellen allein möglich ist.

Für ebene fortschreitende Wellen von beliebigem, auch nicht harmonischem Typus gilt der Satz, daß die ganze Energie zur Hälfte potentielle, zur andern Hälfte kinetische Energie ist.[1])

Die potentielle Energie eines Volumenelementes dV ist gleich der Arbeit, die bei der Ausdehnung der in ihm enthaltenen Gasmenge von dem vorhandenen zu dem normalen Volumen gegen den normalen Druck p_1 erhalten würde. Der jeweilige wirksame Druck δp hängt mit der Verdichtung s' zusammen durch die allgemein für Wellen gültige Beziehung $\delta p = a^2 \varrho_0 s'$ Nr. 186 (3). Die Volumänderung ist hierbei $dV \cdot ds'$, die entsprechende Elementararbeit $\delta p \cdot dV \cdot ds'$. Insgesamt ist also die bei der Ausdehnung von dV auf $dV(1+s)$ geleistete Arbeit, die potentielle Energie,

$$a^2 \varrho_0 dV \int_0^s s' ds' = \tfrac{1}{2} a^2 \varrho_0 dV \cdot s^2.$$

Die kinetische in dem Volumen dV enthaltene Energie ist $\frac{1}{2} \varrho_0 u^2 dV$. Da nun bei ebenen fortschreitenden Wellen $u = \pm as$ ist, so sind beide Energien einander gleich.

Ist nun die fortschreitende ebene Welle spezieller durch eine harmonische Bewegung gegeben, sind also u und s zu jeder Zeit Kreisfunktionen der einen Raumkoordinate, etwa

$$\xi = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

so ist der Mittelwert der Quadrate der Geschwindigkeiten u sowohl als der Verdichtungen s die Hälfte von ihrem Maximalwert u_m^2 (bzw. s_m^2). Mithin ist für ebene harmonische Schallwellen die gesamte in einem mehrere Wellenlängen umfassenden Gebiet enthaltene Energie $\int \frac{1}{2} \varrho_0 u_m^2 dt$, oder auch $\int \frac{1}{2} a^2 \varrho_0 s_m^2 dt$, d. h. gleich der kinetischen Energie, welche die gesamte Luftmenge dieses Gebietes enthalten würde, wenn sie sich mit der Maximalgeschwindigkeit u_m bewegen würde, oder auch gleich der potentiellen Energie dieser Luftmenge, wenn sie insgesamt auf die maximale Verdichtung gebracht wird.[2]) Die Schallintensität, d. h. die mittlere Gesamtenergie des Volumens Eins ist also

$$J = \tfrac{1}{2} \varrho_0 u_m^2 = \tfrac{1}{2} a^2 \varrho_0 s_m^2. \tag{1}$$

1) Lord Rayleigh, *Die Theorie des Schalles*, 2. Band, S. 22, Braunschweig 1880. Deutsch von F. Neesen.

2) W. Thomson, *Phil. Mag.* IV, v. 9, S. 36 (1854).

Dieser Ausdruck für J läßt sich in verschiedene Formen bringen, deren jede eine mögliche experimentelle Messung von J liefert. Ist die Schallbewegung gegeben durch

$$\xi = A \sin 2\pi \left(t N - \frac{x}{\lambda}\right),$$

wo A die (halbe) maximale Amplitude der Bewegung, N die Schwingungszahl in ganzen Perioden (v. d.) pro sec ist, so ist $u_m = 2\pi N A$, also

$$J = 2\varrho_0 \pi^2 N^2 A^2. \tag{1a}$$

Die maximale (halbe) relative Druckänderung $\Delta_m = \frac{\delta_m p}{p}$ hängt mit s_m wegen der adiabatischen Eigenschaft der Schallwellen zusammen durch die Beziehung $\Delta_m = \varkappa s_m$, so daß

$$J = \tfrac{1}{2} \varrho_0 \frac{a^2}{\varkappa^2} \cdot \Delta_m^2. \tag{1b}$$

Die maximale (halbe) Änderung der Temperatur endlich, $(\Delta\vartheta)_m$, hängt mit Δ_m zusammen durch die Beziehung

$$(\Delta\vartheta)_m = \vartheta \cdot \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \Delta_m,$$

so daß

$$J = \frac{1}{2} \varrho_0 (\varkappa - 1)^2 \frac{a^2}{\vartheta^2} (\Delta\vartheta)_m^2. \tag{1c}$$

Die räumlichen mittleren Energiedichten für stehende Schallwellen, die man ja als Superposition zweier forschreitenden Wellen von $\frac{1}{2} v_m$ usw. auffassen kann, sind gleich der Hälfte der für fortschreitende Wellen angegebenen Werte. Die durch 1 qcm in 1 sec wandernde Energie J' ist gegeben durch $J' = J \cdot a$.

199. Messungen der Schallintensität aus der maximalen Änderung von Dichte, Druck, Temperatur. Bisher sind zur Schallintensitätsmessung die maximalen Änderungen der Dichte, des Druckes und der Temperatur, die in den Formeln **198** (1a), (1b) und (1c) gegeben sind, benutzt worden.

Die erste Messung der *maximalen Dichteänderung* am Knoten einer stehenden Schallwelle ist von Töpler und Boltzmann[1]) ausgeführt worden, indem sie aus der Größe der Wanderung der Interferenzstreifen zweier Lichtstrahlen, von denen der eine durch die ruhende Luft, der andere durch die tönende ging, zunächst

1) A. Toepler und L. Boltzmann, *Pogg. Ann.* **141**, 1870, S. 321.

die maximale Änderung des Brechungsexponenten n bestimmten, aus der sich nach dem Satz, daß bei Gasen $n - 1$ der Dichte proportional ist, die maximale Änderung der Dichte s_m ergab.[1])

Die *maximale Änderung des Druckes*, Δ_m, in einem Knotenpunkt einer tönenden Pfeife hat zuerst A. Kundt[2]) mit dem Ventilmanometer gemessen. Zu einer exakten Meßmethode für die Intensität fortschreitender Schallwellen hat M. Wien[3]) die Bestimmung von Δ_m mit dem *Vibrationsmanometer* gestaltet.

Der Schall setzt eine Membran in Bewegung, die auf der etwas erweiterten, sonst ins Ohr gesteckten Öffnung eines auf den betreffenden Ton abgestimmten Kugelresonators befestigt ist, also dem Trommelfell entspricht. Ihre Schwingungen werden auf einen an ihr befestigten Spiegel übertragen; dieser breitet eine an ihr reflektierte linienförmige Lichtquelle auf einem Schirm zu einem Band aus, dessen Breite der Größe Δ_m proportional ist.

Die Reduktion auf absolutes Maß wird vorgenommen, indem man zunächst die Druckdifferenz im Resonator in absolutem Maß auf folgende Weise ermittelt. Zu dem angegebenen „empfindlichen" Resonator wird ein „absoluter" auf den ersten genau abgestimmter Resonator angefertigt von denselben Dimensionen, nur mit dem Unterschied, daß seine Kapsel einen 3—4 Oktaven höheren Eigenton hat. Es ist dann sehr nahezu die maximale Amplitude der Kapsel bei Einwirkung einer periodischen Kraft $E \cos pt$ gleich dem Ausschlag der bei einer konstanten Kraft der Größe E erfolgt, die etwa durch ein Wassermanometer hervorgebracht und gemessen werden kann. Indem man den zu messenden Ton nun aus derselben Entfernung auf beide Resonatoren wirken läßt, kann man den Ausschlag des „empfindlichen" Resonators auf den Ausschlag des „absoluten" Resonators reduzieren.

Ferner ist noch das Verhältnis der Druckdifferenzen im Resonator zu denen außerhalb zu bestimmen. Es wird dies experimentell so ausgeführt, daß man die Öffnung des „empfindlichen" Resonators verschließt, so daß der Ausschlag nur vom Mitschwingen der eingestimmten Platte mit den von außen ankommenden Wellen herrührt. Befindet sich die Tonquelle in gleicher Entfernung von der Öffnung und der Kapsel, so resultiert der Ausschlag q bei geschlossener Öffnung nur von der äußeren Bewegung, bei geöffnetem Resonator der Ausschlag $p - q$ von der Differenz der inneren und

---

1) Siehe die analogen Versuche von E. Mach, *Opt.-akust. Versuche*, Prag 1873, sowie A. Raps, *Wied. Ann.* **50**, 1893, S. 193.
2) A. Kundt, *Pogg. Ann.* **134**, 1868, S. 563.
3) M. Wien, *Wied. Ann.* **36**, 1889, S. 834.

der äußeren Bewegung, woraus sich dann das gesuchte Verhältnis $q:p$ ergibt. Durch diese Messungen ist es also möglich, aus dem Ausschlag des „empfindlichen" Resonators die Druckdifferenz im freien Raum im absoluten Maß zu messen.

Die Größe der maximalen adiabatischen Temperaturänderung, $(\Delta\vartheta)_m$, und damit nach Nr. 198 (1c) die Schallintensität, hat K. Neuscheler[1]) im Knoten in einer tönenden Pfeife durch die entsprechende Änderung des elektrischen Widerstandes eines dort befindlichen Drahtes mit dem Saitengalvanometer bestimmt. Der Draht war so dünn gewählt, daß er den schnellen adiabatischen Temperaturschwankungen der Luft in der Röhre (ca. 100 pro sec) ohne merkliche Trägheit folgte.

200. Messung der Schallintensität aus der Druckwirkung auf Wände; Rayleighsche Scheibe. Eine Schallwelle übt, wie Lord Rayleigh[2]) gezeigt hat, ein Drehungsmoment auf drehbar in ihr aufgehängte Scheiben aus, indem sie diese senkrecht zur Schallbewegungsrichtung zu stellen strebt.

Die Theorie dieser Erscheinung ist von W. König[3]) gegeben, indem er nach den Lehren der Hydrodynamik die Druckwirkung eines unendlich ausgedehnten Flüssigkeitsstromes auf ein in ihm befindliches starres Rotationsellipsoid berechnete, dessen Rotationsachse einen Winkel ϑ mit der Strömungsrichtung bildet. Durch Spezialisierung auf den Fall, daß die Länge der Rotationsachse sehr klein gegen die andere Achse ist, erhält man die Wirkung auf eine dünne Kreisscheibe.

Der Koordinatenanfangspunkt liege im Mittelpunkt des Ellipsoids, dessen Gleichung ist:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Die z-Achse ist die Rotationsachse. Die Flüssigkeit ströme im Unendlichen in der x-z-Ebene mit konstanter Geschwindigkeit, deren Richtung mit der x-Achse den Winkel ϑ bilde. Sind u bzw. w die Geschwindigkeitskomponenten nach der x- bzw. z-Achse, so ist

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{u}{w}.$$

---

1) K. Neuscheler, *Inaug. Diss. Tübingen; Ann. d. Phys.* **34**, 1911, S. 131.
2) Rayleigh, *Phil. Mag.* (5) **14**, 1882, S. 186.
3) W. König, *Wied. Ann.* **43**, 1891, S. 43 und **50**, 1893, S. 693.

Das Geschwindigkeitspotential ist[1]) (s. Nr. 156)

$$\varphi = -\frac{uxA_s}{2-A} - \frac{wzC_s}{2-C} - ux - wz,$$

wo

$$A_s = a^2c\int_s^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{c^2+\lambda}}, \quad C_s = a^2c\int_s^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{3/2}},$$

$$A = a^2c\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{c^2+\lambda}}, \quad C = a^2c\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{3/2}}.$$

s ist die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} = 1.$$

Wirken keine äußeren Kräfte, so ist

$$p = \text{konst.} - \mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right);$$

die Komponenten der Gesamtkraft und des Drehungsmoments auf den festen Körper sind, wenn $d\sigma$ das Oberflächenelement des festen Körpers, α, β, γ die Richtungswinkel der äußeren Normale sind,

$$X = -\int p\cos\alpha\, d\sigma, \quad L = -\int p(y\cos\alpha - z\cos\beta)\, d\sigma;$$

$$Y = -\int p\cos\beta\, d\sigma, \quad M = -\int p(z\cos\beta - x\cos\gamma)\, d\sigma;$$

$$Z = -\int p\cos\gamma\, d\sigma, \quad N = -\int p(x\cos\gamma - y\cos\alpha)\, d\sigma.$$

In dem Ausdruck für p kommt vorläufig nur das dritte Glied in Betracht, da das konstante Glied bei der Integration herausfällt und wir zunächst stationäre Strömung voraussetzen.

Zur Berechnung von p sind die Ausdrücke $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ an der Oberfläche des Ellipsoides, d. h. für $s = 0$ zu nehmen. Die Ausrechnung liefert

$$p = -2\mu\left\{\frac{u^2}{(2-A)^2} + \frac{w^2}{(2-C)^2}\right\}$$
$$+ \frac{2\mu a^2c^4}{c^4+(a^2-c^2)z^2}\left\{\frac{ux}{a^2(2-A)} + \frac{wz}{c^2(2-C)}\right\}^2.$$

Das erste Glied ist konstant, fällt also bei der Integration heraus.

---

1) G. Kirchhoff, *Mechanik*, 18. Vorlesung.

Bei Einführung von Polarkoordinaten durch $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ wird:

$$\cos\alpha\, d\sigma = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2}\, dz \cos\varphi\, d\varphi,$$

$$\cos\beta\, d\sigma = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2}\, dz \sin\varphi\, d\varphi,$$

$$\cos\gamma\, d\sigma = \frac{a^2}{c^2} z\, dz\, d\varphi,$$

und das variable Glied von p:

$$\frac{2\mu c^2 u^2}{(2-A)^2}\,\frac{c^2 - z^2}{c^4 + (a^2 - c^2) z^2}\cos^2\varphi + \frac{2\mu a^2 w^2}{(2-C)^2}\,\frac{z^2}{c^4 + (a^2 - c^2) z^2}$$
$$+ \frac{4\mu a c u w}{(2-A)(2-C)}\,\frac{\sqrt{c^2 - z^2}\cdot z}{c^4 + (a^2 - c^2) z^2}\cos\varphi.$$

Bei Bildung der Ausdrücke für X, Y, Z, L, M, N ist nach z von $+C$ bis $-C$, nach φ von 0 bis 2π zu integrieren.

Man findet

$$X = Y = Z = L = N = 0,$$

und indem noch gesetzt wird

$$\frac{a^2 - c^2}{c^2} = \pm\,\varepsilon^2,$$

je nachdem das Ellipsoid abgeplattet oder verlängert ist, für ein abgeplattetes Ellipsoid

$$M = 4\pi\mu u w a^2 c\,\frac{\varepsilon^3}{(1+\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \varepsilon} \times \frac{(1+\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \varepsilon - \frac{2}{3}\varepsilon^3}{(1+\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \varepsilon - 2\varepsilon^3}.$$

Ist $\frac{c}{a}$ sehr klein, haben wir also eine dünne kreisförmige Scheibe, so wird, wenn noch die Geschwindigkeit der Strömung mit W bezeichnet wird,

$$M = \frac{4}{3}\mu a^3 W^2 \sin 2\vartheta \left(1 - 0{,}2977\,\frac{c}{a}\right).$$

Auf eine dünne kreisförmige Scheibe vom Radius a und der halben Dicke c, die in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit ruht, welche im Unendlichen mit der Geschwindigkeit W unter dem Winkel ϑ gegen die Scheibennormale strömt, wirkt also keine bewegende Kraft, sondern nur ein Drehungsmoment um die zur Strömung und Normale senkrechte Achse.

Ist nun die Strömung nicht, wie bisher angenommen, stationär, sondern veränderlich, wie es in einer Schallwelle der Fall ist, so hat man nur die Strömungskomponenten u und w als mit der Zeit veränderlich anzunehmen. Der berechnete Wert ist dann zu vermehren um $-\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, was an der Oberfläche der Kugel den Wert hat

$$+\mu \frac{\partial u}{\partial t} \frac{2}{2-A} x + \mu \frac{\partial w}{\partial t} \frac{2}{2-C} z.$$

Bei der Ausrechnung der Anteile, welche dieses die Beschleunigungen der Strömung enthaltende Glied zu den Drehungsmomenten L, M, N gibt, findet man, daß diese sämtlich Null sind. Es bleibt also das für stationäre Strömung gefundene Resultat bestehen; nur ist eben die in jedem Moment vorhandene Geschwindigkeit für W einzusetzen.

Ist insbesondere eine Sinusschwingung vorhanden,

$$W = W_0 \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

so ist

$$M = \frac{4}{3} \mu a^3 \left(1 - 0{,}2977 \frac{c}{a}\right) W_0^2 \sin 2\vartheta \cos^2 2\pi \frac{t}{T}.$$

Das Drehungsmoment variiert also zwischen Null und einem Maximalwert, hat aber in allen Phasen der Bewegung denselben Sinn; es strebt die Scheibe quer zur Strömungsrichtung zu stellen. Wenn nun, wie es bei Schallwellen der Fall ist, diese Variationen des Drehungsmomentes sehr schnell erfolgen gegenüber der Geschwindigkeit, mit der die Scheibe ihnen folgen kann, so ist die Wirkung des schnell veränderlichen Drehungsmomentes äquivalent einem konstanten, das gleich dem über eine Schwingungsperiode genommenen Mittelwert ist.

Das gesuchte Drehungsmoment ist also:

$$D = \frac{2}{3} \mu a^3 \left(1 - 0{,}2977 \frac{c}{a}\right) W_0^2 \sin 2\vartheta.$$

Nach Nr. 198 (1) ist $\frac{1}{2} \mu W_0^2$ gleich der räumlichen Energiedichte, d. h. der Schallintensität J, so daß

$$D = \frac{4}{3} a^3 \left(1 - 0{,}2977 \frac{c}{a}\right) \sin 2\vartheta \cdot J,$$

$$J = \frac{3}{4} \frac{D}{a^3\left(1 - 0{,}2977 \frac{c}{a}\right)} \frac{1}{\sin 2\vartheta}.$$

Diese für sehr stark abgeplattete Rotationsellipsoide gültige Formel gilt mit großer Annäherung auch für dünne überall gleich dicke kreisförmige Scheiben vom Radius a und der Dicke c. Die Messung des Drehmomentes D, welches solche — Rayleighsche — Scheiben in einer Schallwelle mit ihrer Fläche quer zur Schwingungsrichtung zu stellen strebt, gestattet also in einfacher Weise, die Intensität der Schallwelle im absoluten Maß zu bestimmen.

Nachdem bereits Grimsehl[1]) auf dieses Prinzip einen Apparat zur Vergleichung von Schallintensitäten gegründet hatte[2]), ist von Zernov[3]) die völlige quantitative Übereinstimmung der beobachteten mit den nach der Formel von W. König berechneten Drehungsmomenten nachgewiesen und daraufhin ein ebenso genauer wie kompendiöser Apparat zur absoluten Messung von Schallintensitäten angegeben worden.

201. Messung der Schallintensität aus der Druckkraft stehender Schallwellen auf vollkommen reflektierende Wände. Wie Lord Rayleigh[4]) gezeigt hat, übt eine stehende Schallwelle auf eine vollkommen reflektierende Wand einen Druck p aus, der gleich dem $\frac{1}{2}(\varkappa + 1)$fachen der Volumdichte der totalen Energie oder der Schalldichte ist, wo $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ gleich dem Verhältnis der spezifischen Wärmen ist.

Den Ausgangspunkt des Beweises bildet die allgemeine Gleichung der Hydrodynamik (vgl. Nr. **150** (5))

$$\int \frac{dp}{\varrho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} U^2.$$

Wir denken uns den Schall in einem zylindrischen durch einen Stempel abgeschlossenen Raum. Integration über eine lange Zeitperiode bringt Φ zum Verschwinden, und

$$\int \left\{ \int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2} U^2 \right\} dt$$

nimmt einen konstanten Wert an allen Stellen des Zylinders an. Der Wert am Stempel ist also derselbe wie der mittlere über die ganze Länge des Zylinders genommene Wert. Es seien p_0 und ϱ_0

1) E. Grimsehl, *Wied. Ann.* **34**, 1888, S. 1028.
2) Vgl. auch P. Lebedew, *Wied. Ann.* **62**, 1897, S. 163 und W. Altberg, *Ann. d. Phys.* **11**, 1903, S. 405.
3) W. Zernov, *Ann. d. Phys.* **21**, 1908, S. 136.
4) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* (6) **10**, 1905, S. 366.

die normalen, p_1 und ϱ_1 die am Stempel herrschenden Werte von Druck und Dichte. Es ist

$$p = f(\varrho) = f(\varrho_0 + \varrho - \varrho_0)$$

und

$$\int \frac{dp}{\varrho} = \int \frac{f'(\varrho)}{\varrho}\, d\varrho = \int \frac{f'(\varrho_0 + \varrho - \varrho_0)}{\varrho_0 + \varrho - \varrho_0}\, d(\varrho - \varrho_0)$$

annähernd

$$= \frac{(\varrho - \varrho_0)}{\varrho_0} f'(\varrho_0) + \frac{(\varrho - \varrho_0)^2}{2\varrho_0^2} \{\varrho_0 f(\varrho_0) - f'(\varrho_0)\}. \qquad (1)$$

Für den Mittelwert von $\int \frac{dp}{\varrho}$ am Stempel ist hierin ϱ_1 für ϱ zu setzen und in bezug auf t zu integrieren; ferner ist am Stempel $U = 0$. Um den Mittelwert über die ganze Länge l des Zylinders zu bilden, dessen Achse die x-Achse sei, ist sowohl in bezug auf x wie auf t zu integrieren. Hierbei verschwindet in der Integration nach x das erste Glied in (1), da die mittlere Dichte dieselbe ist, als wenn keine Schwingungen vorhanden wären. Es wird:

$$f'(\varrho_0) \int \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_0}\, dt = \frac{1}{2} \iint \frac{U^2\, dx\, dt}{l}$$

$$+ \{\varrho_0 f''(\varrho_0) - f'(\varrho_0)\} \left\{ \iint \frac{(\varrho - \varrho_0)^2}{2\varrho_0^2} \frac{dx\, dt}{l} - \int \frac{(\varrho_1 - \varrho_0)^2}{2\varrho_0^2}\, dt \right\}. \qquad (2)$$

Ferner ist

$$\int (p_1 - p_0)\, dt = \int \{f_1(\varrho_1) - f(\varrho_0)\}\, dt$$

$$= \varrho_0 f'(\varrho_0) \int \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_0}\, dt + \varrho_0^2 f''(\varrho_0) \int \frac{(\varrho_1 - \varrho_0)^2}{2\varrho_0^2}\, dt;$$

so daß wegen (2)

$$\int (p_1 - p_0)\, dt = \frac{\varrho_0}{2} \iint \frac{U^2\, dx\, dt}{l}$$

$$+ \{\varrho_0^2 f''(\varrho_0) - \varrho_0 f''(\varrho_0)\} \iint \frac{(\varrho - \varrho_0)^2}{2\varrho_0^2} \frac{dx\, dt}{l} + \varrho_0 f'(\varrho_0) \int \frac{(\varrho_1 - \varrho_0)^2}{2\varrho_0^2}\, dt.$$

Ist a die Schallgeschwindigkeit, so ist $f'(\varrho_0) = a^2$; ferner ist

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Ist der Zylinder bei $x = 0$ und $x = l$ geschlossen, so ist, wenn s eine ganze Zahl,

$$\Phi = \cos \frac{s\pi x}{l} \cos \frac{s\pi a t}{l};$$

mithin

$$\frac{a^2}{2}\int\left(\frac{\varrho_1-\varrho_0}{\varrho_0}\right)^2 dt = a^2\iint\frac{(\varrho-\varrho_0)^2}{\varrho_0^2}\frac{dx\,dt}{l} = \iint\frac{U^2\,dx\,dt}{l},$$

wo die Integration nach x über die ganze Länge des Zylinders, von $x = 0$ bis $x = l$ auszuführen ist. Es wird demnach

$$\int(p_1 - p_0)\,dt = \left\{\varrho_0 + \frac{\varrho_0^2 f''(\varrho_0)}{2f'(\varrho_0)}\right\}\iint\frac{U^2\,dx\,dt}{l}.$$

Legen wir die Newtonsche Annahme zugrunde, daß die Schallschwingungen ein isotherm verlaufender Prozeß sind, so ist nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetz:

$$p = a^2\varrho, \quad \text{also} \quad f'(\varrho_0) = a^2 \quad \text{und} \quad f''(\varrho_0) = 0,$$

mithin

$$\int(p_1 - p_0)\,dt = \varrho_0\iint\frac{U^2\,dx\,dt}{l}.$$

Die rechte Seite ist die doppelte Dichte der kinetischen Energie oder die Dichte der ganzen Energie, also die Schallintensität J. In diesem Fall ist also der Druck gleich dem doppelten der Energiedichte der einfallenden Wellen. Dieselbe Beziehung gilt nach Maxwell für den Lichtdruck auf einen vollständig reflektierenden Spiegel (bestätigt von Lebedew).

Da die Schallschwingungen in Wirklichkeit adiabatisch verlaufende Vorgänge sind, so ist

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\varkappa,$$

so daß

$$f'(\varrho_0) = \frac{p_0\varkappa}{\varrho_0}, \quad f''(\varrho_0) = \frac{p_0\varkappa(\varkappa-1)}{\varrho_0^2};$$

mithin

$$\int(p_1 - p_0)\,dt = \frac{1}{2}(\varkappa+1)\varrho_0\iint\frac{U^2\,dx\,dt}{l},$$

d. h. *der mittlere Druck auf den Stempel ist gleich dem* $\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)$*fachen der Energiedichte der stehenden bzw. dem* $(\varkappa+1)$*fachen der Energiedichte der einfallenden Schallwelle.*

Aus dem Überdruck P auf 1 qcm einer reflektierenden Wand läßt sich also die Schallintensität oder Energiedichte J der auffallenden Schallwelle bestimmen nach der Gleichung

$$P = (\varkappa+1)J.$$

Altberg[1]) und Zernov[2]) haben nachgewiesen, daß diese Druckkräfte von Schallwellen auf reflektierende Wände sich zur Messung der Schallintensität J eignen und daß die Beziehung $P = (\varkappa + 1)J$ innerhalb der Fehlergrenzen erfüllt ist.

Es sei schließlich noch hervorgehoben, daß die Methoden der Messung der Schallintensität durch Bestimmung des mittleren Drehungsmomentes auf die Rayleighsche Scheibe und der mittleren Druckkraft auf reflektierende Wände unabhängig von der Form der Schallwelle sind, daß dagegen die Methoden, bei welchen die Druck-, Dichte- oder Temperaturschwankungen gemessen werden, sowie das Wiensche Vibrationsmanometer zunächst nur auf Sinusschwingungen anwendbar sind.

Kapitel III.

Verschiedene Probleme der Akustik.

202. Kombinationstöne. Wie in Nr. 98 gezeigt ist, führt ein unter dem Einfluß einer elastischen Kraft von der Form $ax+bx^2$ stehender Punkt, auf den außerdem zwei sinusförmige Kräfte von den Schwingungszahlen ν und μ einwirken, eine Bewegung aus, welche die Superposition seiner Eigenschwingung, der Schwingungen ν und μ, sowie in erster Annäherung der Schwingungen von der Differenz $\nu - \mu$ und $\nu + \mu$ darstellt.

Es ist dies nach Helmholtz[3]) die Schwingung, die das Trommelfell unter der Einwirkung zweier Töne der Schwingungszahlen ν und μ ausführt; bei ihm ist wahrscheinlich seinem trichterförmigen Bau nach die elastische Kraft von der Form $ax + bx^2$. Es bedeutet dies also eine zur Ruhelage $x = 0$ unsymmetrische elastische Kraft. Da das Ohr nach dem physiologisch-akustischen Grundgesetz von Ohm nur sinusförmige Luftbewegungen als reinen Ton empfindet, so werden also beim Einwirken zweier Töne der Schwingungszahlen ν und μ auch die Töne $\nu + \mu$ und $\nu - \mu$, Summationston und Differenzton, gehört.

Unter Berücksichtigung der Dämpfung des Trommelfelles gestaltet sich die Helmholtzsche Erklärung der Kombinationstöne

1) W. Altberg, *Ann. d. Phys.* **11**, 1903, S. 405; **23**, 1907., S. 267.
2) W. Zernov, *Ann. d. Phys.* **21**, 1906, S. 136.
3) H. Helmholtz, *Lehre von den Tonempfindungen*, 4. Aufl., S. 253; *Pogg. Ann.* **99**, 1856, S. 497.

folgendermaßen.[1]) Die Bewegungsgleichung des Trommelfells ist

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+ax+bx^2+f\sin(2\pi mt)+g\sin(2\pi nt+\delta)=0.$$

Zur Integration wird gesetzt:

$$x=\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\varepsilon^3x_3+\cdots$$

und

$$f=\varepsilon f_1,\quad g=\varepsilon g_1.$$

Die mit gleichen Potenzen von ε multiplizierten Glieder werden dann einzeln Null gesetzt. Dies ergibt folgende Differentialgleichungen:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}+k\frac{dx_1}{dt}+ax_1+f_1\sin(2\pi mt)+g_1\sin(2\pi nt+\delta)=0,\tag{1}$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2}+k\frac{dx_2}{dt}+ax_2+bx_1{}^2=0,\tag{2}$$

$$m\frac{d^2x_3}{dt^2}+k\frac{dx_3}{dt}+ax_3+2bx_1x_2=0\tag{3}$$

. . . .

Gleichung (1) ist die bereits in Nr. **96** ausführlich besprochene Bewegungsgleichung eines Massenpunktes, der unter dem Einfluß der elastischen Kraft $-ax$, der Dämpfungskraft $-k\frac{dx}{dt}$, sowie äußerer sinusförmiger Kräfte von den Schwingungszahlen m und n steht. Er (das Trommelfell) führt sowohl seine gedämpften Eigenschwingungen, sowie erzwungene Schwingungen der Schwingungszahlen m und n aus:

$$x_1=Ae^{-\frac{kt}{2m}}\sin\left(t\sqrt{\frac{a}{m}-\frac{k^2}{4m^2}}+\varphi\right)$$
$$+A'\sin(2\pi mt-\chi)+A''(\sin 2\pi nt-\psi).$$

Bei Annahme großer Dämpfung des Trommelfells bleiben praktisch nach kurzer Zeit die beiden letzten Glieder übrig; Einsetzung dieses Annäherungswertes für x_1 in (2) gibt, wenn wieder die gedämpfte Schwingung fortgelassen wird,

$$x_2=B+B'\cos(2\pi\cdot 2mt-\chi')+B''\cos(2\pi\cdot 2nt-\chi'')$$
$$+B'''\cos(2\pi(m-n)t-\chi''')+B''''\cos(2\pi(m+n)-\chi'''');$$

es treten mithin nach dem Ohmschen Grundgesetz die Töne $2m$,

1) E. Waetzmann, *Ann. der Phys.* **24**, 1907, S. 68.

$2n$, $m-n$ und $m+n$ auf, also die Kombinationstöne erster Ordnung, sowie $2m$ und $2n$. In gleicher Weise ergibt dann die Einsetzung von x_2 in (3) die Töne $3m$, $3n$, sowie die Kombinationstöne zweiter Ordnung $m-2n$, $n-2m$. In derselben Weise weiterschließend erhält man die Töne $4m$, $4n$ und die Kombinationstöne dritter Ordnung, usw.

Wie Cl. Schaefer[1]) gezeigt hat, ist zur Entstehung dieser Kombinationstöne nicht unbedingt die Helmholtzsche Annahme asymmetrischer Elastizität des Trommelfells erforderlich. Sie entstehen auch in anderen Fällen, z. B. wenn man annimmt, daß das Trommelfell in gewöhnlicher Weise durch eine der ersten Potenz der Elongation proportionale elastische Kraft an seine Gleichgewichtslage gebunden ist, daß aber die Dämpfungskraft nicht proportional der ersten, sondern proportional der zweiten Potenz der Geschwindigkeit ist, wobei das Vorzeichen bei jeder Umkehr der Bewegungsrichtung wechselt. Dieser Ansatz ist besonders bemerkenswert, weil er im Gegensatz zu der Helmholtzschen Theorie weder asymmetrisches elastisches Verhalten des Trommelfells noch auch endliche Amplituden voraussetzt, welche beiden Annahmen vielfach Bedenken hervorgerufen hatten.

Befreit man den Helmholtzschen Ansatz von der Forderung der Asymmetrie, indem man die elastische Kraft in der Form $-ax \mp bx^2$ ansetzt, wobei das negative Vorzeichen für negative Werte von x, das positive für positive Werte von x gilt, erhält man ebenfalls Kombinationstöne.[2])

Diese Kombinationstöne bieten nun auch ein Mittel zur Vergleichung zweier Schwingungszahlen, namentlich zur Bestimmung sehr hoher Töne, wo die Differenztöne viel tiefer, in der Höhe der auch auf anderem Wege leicht bestimmbaren Töne liegen.

203. Variations- und Intermittenztöne. Einer der direktesten Beweise für die Ohmsche Theorie des Hörens ist in den „Variationstönen" zu erblicken, d. h. den Klangerscheinungen, die auftreten, wenn ein Ton in gleichen Intervallen periodisch entweder ganz unterbrochen wird oder allgemein seine Amplitude entsprechend periodische Schwankungen erfährt. Sei u die Zahl dieser Schwankungen oder Intermittenzen pro sec. Die Amplitude läßt sich dann nach dem Fourierschen Theorem darstellen in der Form:

$$A = A_0 + \sum_1^\infty A_k \sin(2\pi k u t + \varphi_k);$$

1) Cl. Schaefer, *Ann. der Phys.* **33**, 1910, S. 1216.
2) F. A. Schulze, *Ann. der Phys.* **34**, 1911, S. 817.

hat der Ton die Schwingungszahl n pro sec, so ist die Luftbewegung

$$A \sin 2\pi n t = A_0 \sin 2\pi n t + \frac{A_1}{2} \cos[2\pi(n-u)t - \varphi_1]$$
$$- \frac{A_1}{2} \cos[2\pi(n+u)t + \varphi_1] + \frac{A_2}{2} \cos[2\pi(n-2u)t - \varphi_2]$$
$$- \frac{A_2}{2} \cos[2\pi(n+2u)t + \varphi_2] + \cdots.$$

Nach der Ohmschen Theorie des Hörens tritt also im allgemeinen ein sehr kompliziertes Tongemisch auf, nämlich die objektiven, durch Resonatoren verstärkbaren Töne

$$\begin{matrix} & n & \\ n-u & & n+u \\ n-2u & & n+2u \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{matrix}$$ [1])

nicht dagegen ein „Unterbrechungston" u; ein solcher tritt nur auf, wenn zufällig n ein ganzzahliges Vielfaches von u ist (oder auch umgekehrt). Ferner kann u noch subjektiv als Differenzton von $n-u$ und u oder $n+u$ und u usw. gehört werden. Alle diese Folgerungen der Ohmschen Theorie des Hörens werden von der Erfahrung in weitem Umfang bestätigt.[1])

204. Dopplersches Prinzip (vgl. Nr. 174). Bewegt sich ein Beobachter relativ zu einer Tonquelle, so muß, worauf Doppler[2]) zuerst aufmerksam gemacht hat, der Ton höher erscheinen als bei gegenseitiger Ruhe, wenn Beobachter und Tonquelle sich einander nähern, tiefer im entgegengesetzten Fall.

Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Der Beobachter ruht, die Schallquelle bewegt sich mit der Geschwindigkeit v nach dem Beobachter hin. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles sei c, n sei die Schwingungszahl der Tonquelle.

Zur Zeit $t = 0$ sei e die Entfernung von Schallquelle und Beobachter. Die dann von der Schallquelle abgeschickte Schwingung erreicht den Beobachter zur Zeit $t_1 = \frac{e}{c}$. Nach Verlauf von

1) A. Seebeck, *Pogg. Ann.* **63**, 1844, S. 365; Helmholtz, *Tonempfindungen*, Anhang; F. A. Schulze, *Ann. d. Phys.* **26**, 1908, S. 217; K. L. Schaefer und O. Abraham, *Pflügers Archiv* **83**, S. 207; **85**, S. 536; **88**, S. 482, 1901; *Ann. der Physik* **13**, 1904, S. 996.

2) Doppler, *Das farbige Licht der Doppelsterne*, Prag 1842.

1 Sekunde ist der Abstand nur noch $e-v$; die dann abgeschickte Schwingung kommt beim Beobachter also an zur Zeit $t_2 = 1 + \frac{e-v}{c}$. In der Zeit $t_2 - t_1 = 1 - \frac{v}{c}$ treffen also das Ohr des Beobachters n Schwingungen, in der Zeit von 1 Sekunde mithin $n' = \frac{n}{1-\frac{v}{c}}$. Dieses ist also die scheinbare Schwingungszahl der bewegten Tonquelle, wenn sich die Schallquelle bewegt, der Beobachter dagegen ruht.

2. Der Beobachter bewegt sich mit der Geschwindigkeit v zur ruhenden Schallquelle hin.

In 1 Sekunde bewegt sich der Beobachter um die Strecke v weiter; auf dieser Strecke befinden sich $v\frac{n}{c}$ Verdichtungen, denen das Ohr begegnet. Außerdem gelangen aber auch noch n Verdichtungen zum Ohr, so daß es in der Sekunde von $n'' = n\left(1+\frac{v}{c}\right)$ Vibrationen getroffen wird. Dies ist also die scheinbare Schwingungszahl.

Es ist also nicht gleichgültig, ob das Ohr ruht und die Schallquelle sich bewegt, oder umgekehrt. Nur solange v sehr klein gegen c ist, so daß $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ und höhere Potenzen zu vernachlässigen sind, ist die prozentische Schwingungszahländerung in beiden Fällen merklich gleich.

Bei einigermaßen großen, aber noch realisierbaren Werten von v kann der Unterschied beider Fälle eben merklich werden. Es ist

$$\frac{n'}{n} = 1 + \frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^3 + \cdots$$

$$\frac{n''}{n} = 1 + \frac{v}{c}.$$

v ist bei Annäherung positiv, bei Entfernung negativ.

Für $v = 43\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $c = 332\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ist

$$\frac{n'}{n} = 1{,}146$$

$$\frac{n''}{n} = 1{,}129,$$

also etwa ein großer bzw. kleiner Ganzton ($\frac{9}{8}$ bzw. $\frac{10}{9}$).

Die Versuche, die die Formel stets bestätigt haben, sind allerdings nur in Fällen angestellt, wo der Unterschied noch nicht merklich ist.

Nach F. Richarz[1]) sind die Fälle der Annäherung und Entfernung gleichzeitig zu beobachten, bei Annäherung einer pfeifenden Lokomotive, deren Pfiff gleichzeitig durch einen Berg reflektiert im Echo gehört wird; letzteres entfernt sich, erscheint also tiefer, während der Pfiff direkt erhöht erscheint.

205. Reflexion und Brechung von Schallwellen. Zwei reibungslose flüssige oder gasförmige Medien 1 und 2 mögen in einer Trennungsebene $x = 0$ aneinandergrenzen. Auf diese falle eine ebene Schallwelle aus dem Medium 1 auf; die z-Achse sei parallel der Schnittlinie der Wellenebene $\alpha x + \beta y =$ konst.

Für das Geschwindigkeitspotential gelten dann im ersten bzw. zweiten Medium nach Nr. 186 (4) und (6) die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = a_1^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + a_1^2 s_1 = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} = a_1^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + a_2^2 s_2 = 0. \tag{4}$$

An der Grenzfläche $x = 0$ müssen ferner die Geschwindigkeiten normal zur Fläche sowie außerdem die Drucke in beiden Medien dieselben sein. Dies liefert als Grenzbedingungen

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad \text{für} \quad x = 0 \tag{5}$$

und, da nach Nr. 186 (3) $dp_1 = a_1^2 d\varrho_1 = a_1^2 s_1 \varrho_1$ bzw. $dp_2 = a_2^2 d\varrho_2 = a_2^2 s_2 \varrho_2$ ist, wegen (2) und (4)

$$\varrho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \varrho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \quad \text{für} \quad x = 0. \tag{6}$$

Die einfallende Welle spaltet sich in eine reflektierte und eine gebrochene Welle. Wir setzen hierfür an (vgl. Nr. 170):

$$\text{Einfallende Welle} \quad \varphi_{1e} = A_1 e^{i(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 t)}, \tag{7}$$

$$\text{Reflektierte Welle} \quad \varphi_{1r}' = A_1' e^{i(\alpha_1' x + \beta_1' y + \gamma_1' t)}, \tag{8}$$

$$\text{Gebrochene Welle} \quad \varphi_2 = A_2 e^{i(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 t)}. \tag{9}$$

1) F. Richarz, *Naturw. Rundschau* **15**, 1900, S. 59.

Da nun die Grenzbedingungen (5) und (6) für alle Werte von t und y erfüllt sein müssen, so müssen für $x = 0$ φ_1, φ_1' und φ_2 proportional *derselben* Funktion von t und y sein. Demnach ist

$$\beta_1 = \beta_1' = \beta_2 = \beta$$

und

$$\gamma_1 = \gamma_1' = \gamma_2 = \gamma .$$

Nach (1) und (3) folgt hieraus

$$\gamma^2 = a_1^2(\alpha_1^2 + \beta^2) = a_1^2(\alpha_1'^2 + \beta^2) = a_2^2(\alpha_2^2 + \beta^2) \qquad (10)$$

oder

$$\alpha_1' = -\alpha_1 , \qquad (11)$$

$$\frac{\alpha_2^2 + \beta^2}{\alpha_1^2 + \beta^2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} . \qquad (12)$$

Ist ϑ_1 der Einfallswinkel d. h. der Winkel zwischen der Normalen zur Trennungsfläche und der Wellennormale der einfallenden Welle, in analoger Weise, nach der Bezeichnungsweise der Optik, ϑ_1' der Reflexionswinkel, ϑ_2 der Brechungswinkel, so ist

$$\sin\vartheta_1 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta}}, \quad \sin\vartheta_1' = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta}}, \quad \sin\vartheta_2 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta}}; \qquad (13)$$

mithin gilt nach (11) und (12)

$$\vartheta_1 = \vartheta_1' \qquad (14)$$

und

$$\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2} = \frac{a_1}{a_2} , \qquad (15)$$

d. h. das Reflexionsgesetz und das Brechungsgesetz gilt in der Akustik in derselben Form wie in der Optik.

Für die Amplituden erhält man durch Einsetzen von (7), (8) und (9) in die Grenzbedingungen (5) und (6) unter Beachtung der Beziehung $\varphi_1 = \varphi_{1e} + \varphi_{1r}$ die Gleichung

$$\alpha_1 (A_1 - A_1') = \alpha_2 A_2$$

und

$$\varrho_1 (A_1 + A_1') = \varrho_2 A_2 ,$$

oder

$$2 A_1 = \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) A_2 \qquad (16)$$

und

$$2 A_1' = \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) A_2 . \qquad (17)$$

Unter Benutzung der Formeln (13) sowie der Beziehung

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$$

findet man die Amplitude der reflektierten Welle

$$A_1' = \frac{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{\operatorname{ctg} \vartheta_2}{\operatorname{ctg} \vartheta_1}}{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta_2}{\operatorname{ctg} \vartheta_1}} \cdot A_1$$

und die Amplitude der gebrochenen Welle

$$A_2 = \frac{2}{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta_2}{\operatorname{ctg} \vartheta_1}} \cdot A_1 .$$

Für die numerische Berechnung ist es zweckmäßig, $\operatorname{ctg} \vartheta_2$ nach (14) durch ϑ_1 und den Brechungsexponenten $\frac{a_1}{a_2}$ auszudrücken. Es ergibt sich

$$\frac{\operatorname{ctg} \vartheta_2}{\operatorname{ctg} \vartheta_1} = \frac{a_1}{a_2} \sqrt{1 - \left(\frac{a_2^2}{a_1^2} - 1\right) \operatorname{tg}^2 \vartheta_1} ,$$

wo a_1 und a_2 die Schallgeschwindigkeiten im ersten und im zweiten Medium sind. Sind diese z. B. Luft und Wasser von Null Grad, so ist $\frac{a_2}{a_1}$ ungefähr $= 4{,}3$, so daß

$$\frac{\operatorname{ctg} \vartheta_2}{\operatorname{ctg} \vartheta_1} = 0{,}23 \sqrt{1 - 17{,}5 \operatorname{tg}^2 \vartheta_1} .$$

Dieser Ausdruck bleibt reell nur, so lange der Einfallswinkel ϑ_1 nicht größer ist als 13^0. Für größere Einfallswinkel tritt, wie in der folgenden Nummer gezeigt wird, Totalreflexion ein; das Wasser ist eben „akustisch dünner" als Luft. Übrigens ist auch für Einfallswinkel, die kleiner sind als 13^0, die Reflexion noch fast total. Bei Einsetzen der Zahlenwerte für ϱ_2 und ϱ_1 erhält man

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{1 - 0{,}0003 \sqrt{1 - 17{,}5 \operatorname{tg}^2 \vartheta_1}}{1 + 0{,}0003 \sqrt{1 - 17{,}5 \operatorname{tg}^2 \vartheta_1}} .$$

Selbst für senkrechte Inzidenz, $\vartheta_1 = 0$, hat dieser Ausdruck noch sehr nahezu den Wert 1.

Von Interesse ist folgende Analogie mit der Optik. Nach (15) ist $\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2} = \frac{a_1}{a_2}$. Sind beide Medien gasförmig, so ist nach Nr. 187 (2)

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{\varkappa_1 \varrho_2}{\varkappa_2 \varrho_1}}.$$

Im Falle ungleicher Dichte, aber gleicher adiabatischer Kompressibilität, $\varkappa_1 = \varkappa_2$, wird also

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{\sin^2\vartheta_1}{\sin^2\vartheta_2}$$

und weiter die Amplitude der reflektierten Welle

$$\frac{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{\operatorname{ctg}\vartheta_2}{\operatorname{ctg}\vartheta_1}}{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta_2}{\operatorname{ctg}\vartheta_1}} = \frac{\sin 2\vartheta - \sin 2\vartheta_1}{\sin 2\vartheta + \sin 2\vartheta_1} = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \vartheta_1)}{\operatorname{tg}(\vartheta + \vartheta_1)};$$

dieser Ausdruck stimmt überein mit dem von Fresnel für senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht angegebenen.

In diesem Falle gibt es also einen bestimmten Einfallswinkel, für welchen die Intensität des reflektierten Schalles Null ist, nämlich denjenigen, dessen Tangente den Wert $\frac{a_1}{a_2}$ hat, analog dem Brewsterschen Gesetz in der Optik.

Sind andererseits die Dichten gleich, $\varrho_1 = \varrho_2$, und die Kompressibilitäten ungleich, $\varkappa_1 \gtrless \varkappa_2$ (beide Eigenschaften dürfen natürlich nicht gleichzeitig gleich groß sein, da sonst die beiden Gase überhaupt akustisch nicht mehr verschieden wären), so ist

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta_2 - \operatorname{tg}\vartheta_1}{\operatorname{tg}\vartheta_2 + \operatorname{tg}\vartheta_1} = \frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\sin(\vartheta_2 + \vartheta_1)};$$

es entspricht dies der Formel von Fresnel für in der Einfallsebene polarisiertes Licht. Hierbei gibt es keinen Einfallswinkel, für welchen der reflektierte Schallstrahl verschwindet.

206. Totalreflexion. Die für die Amplitude der reflektierten und gebrochenen Welle abgeleiteten Ausdrücke gelten stets, wenn das zweite Medium „akustisch dichter" ist als das erste Medium, im umgekehrten Falle nur solange der einfallende Winkel nicht einen kritischen Wert überschreitet, bei dem α_2 imaginär wird. Setzt man $-i\alpha_2'$ anstatt α_2 in der Gleichung Nr. 205 (9), und führt sonst die Rechnung in analoger Weise durch, so erhält man anstelle der Gleichungen (7), (8) und (9) der vorigen Nummer folgende Ausdrücke, wenn man noch $A_1 = 1$ setzt:

Einfallende Welle: $\varphi_{1e} = e^{i(\alpha_1 x + \beta y + \gamma t)}$;

Reflektierte Welle: $\varphi_{1r}' = \dfrac{\dfrac{\varrho_2}{\varrho_1} + i\dfrac{\alpha_2'}{\alpha_1}}{\dfrac{\varrho_2}{\varrho_1} - i\dfrac{\alpha_2'}{\alpha_1}}\, e^{i(-\alpha_1 x + \beta y + \gamma t)}$;

Gebrochene Welle: $\varphi_2 = \dfrac{2}{\dfrac{\varrho_2}{\varrho_1} - i\dfrac{\alpha_2'}{\alpha_1}}\, e^{i(-i\alpha_2' x + \beta y + \gamma t)}$.

Abscheidung des imaginären Anteiles ergibt:

Einfallende Welle: $\cos(\alpha_1 x + \beta y + \gamma t)$;

Reflektierte Welle: $\cos(-\alpha_1 x + \beta y + \gamma t + 2\varepsilon)$;

Gebrochene Welle: $\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2} + \dfrac{\alpha_2'^2}{\alpha_1^2}}}\, e^{\alpha_2' x} \cos(\beta y + \gamma t + \varepsilon)$,

wobei

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\alpha_2' \varrho_1}{\alpha_1 \varrho_2}.$$

Es treten also hier im wesentlichen dieselben Erscheinungen auf, wie bei der Totalreflexion von Lichtwellen. Die im zweiten Medium auftretende Bewegung ist überhaupt keine Welle im gewöhnlichen Sinne mehr. Die Amplitude ist nicht konstant, sondern nimmt mit dem Eindringen in das zweite Medium ab, da für dieses x negative Werte hat. Die für die Schnelligkeit der Amplitudenabnahme maßgebende Größe α_2' berechnet sich nach Nr. **205** (10) als:

$$\alpha_2' = \sqrt{\beta^2 - \frac{\gamma^2}{a_2^2}}.$$

Bei Einführung der Wellenlänge λ_1 im ersten Medium und des Einfallswinkels ist, wie aus dem Ansatz $\varphi = \cos(\alpha_1 x + \beta y + \gamma t)$ für die einfallende Welle sofort zu ersehen,

$$\gamma = \frac{2\pi a_1}{\lambda_1} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda_1} \sin \vartheta_1,$$

so daß

$$\alpha_2' = \frac{\lambda_1}{2\pi} \sqrt{\sin^2 \vartheta_1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}}.$$

Nach einer Strecke von nur wenigen Wellenlängen ist also die Amplitude der Bewegung im zweiten Medium schon unmerklich klein.

Da nach den für die einfallende und reflektierte Welle gefundenen Ausdrücken in der ersteren ebensoviel Energie nach der Trennungsfläche hingeht, wie in der letzteren von ihr fort wieder in das erste Medium hineingeht, so ist die Reflexion total.

Zwischen der reflektierten und der einfallenden Welle besteht ein Phasenunterschied 2ε, gegeben durch $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\alpha_2'}{\alpha_1}\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, oder bei Einführung des Einfallswinkels ϑ_1 und der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten a_1 und a_2

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{a_2}{a_1}\sqrt{\operatorname{tg}^2\vartheta_1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\frac{1}{\cos^2\vartheta_1}}.$$

Nach denselben für *eine* Trennungsfläche hier zur Anwendung gebrachten Prinzipien kann man ohne Schwierigkeit in leicht ersichtlicher Weise vorgehen, wenn mehr als eine Trennungsfläche vorhanden ist. An jeder ist als Grenzbedingung einzuführen, daß die Bewegungen normal zur Trennungsfläche, sowie die Drucke gleich sind.[1])

Die erste Berechnung der Reflexion und Brechung des Schalles stammt von Poisson[2]); eine allgemeine Behandlung dieser Fragen gab Green.[3])

207. Reflexion und Brechung in Medien mit Schubspannung. Erheblich komplizierter werden die Verhältnisse, wenn nicht mehr, wie bisher vorausgesetzt, beide Medien reibungslose ideale Gase oder Flüssigkeiten sind, in denen keine Schubspannungen auftreten und nur Verdichtungswellen möglich sind, sondern wenn in allen Medien sowohl Verdichtungs- als auch Schiebungswellen möglich sind und außerdem im allgemeinen Fall auch innere Reibung vorhanden ist. Man verdankt die Behandlung dieses Problems wesentlich P. Drude.[4]) Fortgeführt und erweitert, sowie auf praktische Probleme angewendet, sind die Ansätze von Drude durch R. Berger.[5]) Es sei nur das Wesentliche und Wichtigste in großen Zügen skizziert. Die Grenzbedingungen sind auch hier für jede Trennungsfläche Gleichheit der Normalverschiebungen, sowie ferner Gleichheit der Normaldrucke. Die Tangen-

---

1) Näheres darüber in Rayleigh, *Theorie des Schalles* II S. 103ff.

2) Poisson, *Mém. de l'Institut* t. II, 1819, p. 305; t. X, 1831, p. 317. In der ersten Abhandlung ist nur senkrechte Inzidenz behandelt.

3) Green, *Cambridge Transactions* 1838.

4) P. Drude, *Wied. Ann.* 41, 1890, S. 759.

5) R. Berger, *Über die Schalldurchlässigkeit*, Inaug.-Diss. München 1911.

tialverschiebungen brauchen nicht direkt gleich zu sein; praktisch sind sie es jedoch meist nahezu, da die äußere Reibung groß ist, was im folgenden vorausgesetzt sei.

Seien δ_x, δ_y, δ_z die Verrückungen, Π_{xx}, Π_{yy}, Π_{zz} die Normalspannungen, $\Pi_{xy}=\Pi_{yx}$, $\Pi_{xz}=\Pi_{zx}$, $\Pi_{yz}=\Pi_{zy}$ die Schubspannungen, so lauten die Grenzbedingungen, wenn wieder die x-Achse die Normale zur Trennungsebene ist,

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= \delta x_2 \\ \delta y_1 &= \delta y_2 \quad (1) \\ \delta z_1 &= \delta z_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \Pi_{xx_1} &= \Pi_{xx_2} \\ \Pi_{yx_1} &= \Pi_{yx_2} \quad (2) \\ \Pi_{zx_1} &= \Pi_{zx_2}. \end{aligned}$$

Die Fortschreitungsrichtung der Wellen sei parallel zur xy-Ebene. Die Wellen lassen sich dann ansetzen in der Form:

$$\begin{aligned} \delta x &= \xi = A_x e^{i2\pi N[t-\frac{1}{V}(x\cos\alpha+y\cos\beta)]} \\ \delta y &= \eta = A_y e^{i2\pi N[t-\frac{1}{V}(x\cos\alpha+y\cos\beta)]} \\ \delta z &= \zeta = A_z e^{i2\pi N[t-\frac{1}{V}(x\cos\alpha+y\cos\beta)]}, \end{aligned} \tag{3}$$

wo N die Schwingungszahl, V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist.

Nach der Elastizitätstheorie (vgl. Nr. **101** und **103**) ist für isotrope Körper:

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} &= (a_{11}-a_{12})\frac{\partial\delta x}{\partial x} + a_{12}\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) \\ \Pi_{yy} &= (a_{11}-a_{12})\frac{\partial\delta y}{\partial y} + a_{12}\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) \\ \Pi_{zz} &= (a_{11}-a_{12})\frac{\partial\delta z}{\partial z} + a_{12}\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) \\ \Pi_{xy} &= \Pi_{yx} = \frac{a_{11}-a_{12}}{2}\left(\frac{\partial\delta x}{\partial y}+\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right) \\ \Pi_{xz} &= \Pi_{zx} = \frac{a_{11}-a_{12}}{2}\left(\frac{\partial\delta x}{\partial z}+\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right) \\ \Pi_{yz} &= \Pi_{zy} = \frac{a_{11}-a_{12}}{2}\left(\frac{\partial\delta y}{\partial z}+\frac{\partial\delta z}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

(4) in (2) eingeführt ergibt:

$$(a_{11} - a_{12})_1 \frac{\partial \delta x_1}{\partial x} + (a_{12})_1 \left(\frac{\partial \delta y_1}{\partial y} + \frac{\partial \delta x_1}{\partial x}\right)$$
$$= (a_{11} - a_{12})_1 \frac{\partial \delta x_2}{\partial x} + (a_{12})_2 \left(\frac{\partial \delta y_2}{\partial y} + \frac{\partial \delta x_2}{\partial x}\right)$$
$$(a_{11} - a_{12})_1 \left(\frac{\partial \delta y_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta x_1}{\partial y}\right) = (a_{11} - a_{12})_2 \left(\frac{\partial \delta y_2}{\partial x} + \frac{\partial \delta x_2}{\partial y}\right).$$

Durch Anwendung derselben Schlußweise wie in den beiden vorigen Nummern erhält man aus der Tatsache der Grenzbedingungen wieder das Reflexionsgesetz und das Brechungsgesetz in der gleichen Form. Es ist aber hier eine wesentlich größere Mannigfaltigkeit der Erscheinung vorhanden. Fällt eine Verdichtungswelle oder eine Schiebungswelle auf die Trennungsfläche, so entstehen im allgemeinen vier Wellen, nämlich im ersten Medium eine reflektierte Verdichtungswelle und eine reflektierte Schiebungswelle, im zweiten Medium eine gebrochene Verdichtungswelle und eine gebrochene Schiebungswelle. In analoger Weise entstehen acht Wellen, wenn eine Verdichtungswelle und eine Schiebungswelle einfallen. Das Reflexionsgesetz und das Brechungsgesetz gelten immer für zwei zusammengehörige Wellen *derselben* Art.

Die Amplitudenverhältnisse dieser verschiedenen Wellen erhält man aus den Grenzbedingungen (1) und (4) in analoger Weise wie in dem einfachen im vorigen diskutierten Fall.[1]) Messungen und quantitative Prüfungen der so erhaltenen Formeln liegen noch nicht vor.

Kapitel IV.

Gliederung des Tonbereiches.

208. Aufbau der diatonischen Skalen. Physikalisch ist die Höhe eines Tones durch die Angabe der Schwingungszahl n vollkommen bestimmt; n kann dabei jeden beliebigen positiven Wert annehmen. In der Musik werden aus ästhetischen und psychologischen Gründen aus dieser stetigen Reihe von Tönen nur einzelne herausgegriffen und benutzt, die in bestimmten zahlenmäßigen Beziehungen, den musikalischen Intervallen, zueinander stehen. Die Auswahl dieser Tonintervalle erfolgt nach dem psychologischen Gesetz, daß zwei Töne, deren Schwingungszahlen im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen zueinander stehen, einen angenehmen Ein-

---

1) Man sehe hierzu die zitierten Abhandlungen von P. Drude und R. Berger, wo auch der Einfluß der Reibung behandelt ist.

druck verursachen, „konsonant“ sind. Dabei kommt es auf die *absolute* Schwingungszahl des Grundtones durchaus nicht an. Das Schwingungszahlverhältnis 2 : 1 gibt das konsonanteste Intervall, die Oktave. Bei der Auswahl der innerhalb einer Oktave einzuführenden Töne dienen als Leitlinien die nächst der Oktave wohlklingendsten Intervalle.

Da zwei Töne, die in dem Intervall der Oktave stehen, für das Ohr eine außerordentliche Ähnlichkeit, fast Gleichheit haben, so bezeichnet man solche Töne, die im Intervall einer oder mehrerer Oktaven zueinander stehen, mit demselben Buchstaben. Der Name Oktave stammt daher, daß in der diatonischen Tonleiter eine volle Oktave 8 Töne umfaßt; es sind zwischen dem Grundton und seiner nächsthöheren Oktave noch 6 Töne eingeschaltet. Der Grundton wird mit dem Buchstaben *c*, die darauffolgenden mit *d*, *e*, *f*, *g*, *a*, *h*, und die Oktave wieder mit *c* bezeichnet, welche von dem Grundton *c* durch einen Index unterschieden wird. Vom physikalischen Standpunkt aus ist es zunächst völlig gleichgültig, welche Schwingungszahl man dem *c* oder damit einer seiner Oktaven geben will. Um einfache Zahlen für diese Noten *c* zu erhalten, hat man in der *physikalischen Stimmung* als Schwingungszahlen für die Noten *c* die ganzzahligen Potenzen von 2 genommen. Die verschiedenen Oktaven werden durch Zahlenindizes unterschieden. In neuer deutscher Bezeichnung (es bestehen leider mehrere Bezeichnungsarten nebeneinander; s. dazu z. B. A. Kalähne, *Grundzüge der Mathem.-Physikal. Akustik* Bd. I S. 28 ff.) sind die Namen und Schwingungszahlen

c^{-3}	c^{-2}	c^{-1}	c^0	c^1	c^2	c^3	c^4	c^5	c^6	c^7
16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384.

In der internationalen Stimmung wird das eingestrichene *a* mit 435 Schwingungen („Doppelschwingungen“) zugrunde gelegt; das zugehörige höhere *c* hat 522 Schwingungen. Die Intervallabweichungen beider Stimmungen zueinander ist ca. $^1/_6$ ganzer Ton, also nur für ganz besonders feine Ohren merkbar.

Dem Intervall der Oktave folgen dann als nächst konsonante Intervalle die Quinte mit dem Schwingungszahlverhältnis 3 : 2, und die große Terz mit dem Schwingungszahlverhältnis 5 : 4.

Grundton, Terz und Quinte bilden den Durdreiklang. Soll dieser zur Quinte von *c*, zu *g*, als Grundton gebildet werden, so erfordert dies die neuen Töne $\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$ und $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$; letzterer Ton geht über die Oktave des Grundtones hinaus; die nächst niedere Oktave zu ihm ist der Ton $\frac{9}{8}$. Die Bildung des Durdreiklanges von der Oktave des Grundtones, also dem Ton 2, nach

abwärts, gibt die Töne $2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$ und $2 : (\frac{3}{2} : \frac{5}{4}) = \frac{5}{3}$. Man erhält auf diese Weise die *diatonische Durskala.*

Als Grundton nehmen wir einen Ton mit 256 Schwingungen; er wird als c_1 bezeichnet. Es ergibt sich so die *Natürliche Diatonische C-durskala* mit folgenden Bezeichnungen und Intervallen:

Ton	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	a_1	h_1	c_2
Intervall gegen den Grundton c_1	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
Intervall benachbarter Töne	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$.	

In ganz analoger Weise läßt sich die Natürliche diatonische C-mollskala aufbauen, indem man von dem Mollakkord $10:12:15 = 1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}$ ausgeht, der sich von dem Durakkord nur durch Ersatz der großen Terz $5:4$ durch die kleine Terz $6:5$ unterscheidet. Man erhält durch Bildung des Mollakkords mit dem Ton $\frac{3}{2}$ als Grundton die beiden Töne $\frac{3}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$ und $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ mit seiner niederen Oktave $\frac{9}{8}$; durch Bildung des Mollakkords von Ton 2 nach abwärts: $2 \times \frac{12}{15} = \frac{8}{5}$ und $2 \times \frac{10}{15} = \frac{4}{3}$. Neben bereits in der Durskala vorhondenen Tönen treten also drei neue Töne auf. Demnach ist die *Natürliche C-mollskala*:

Ton	c_1	d_1	es_1	f_1	g_1	as_1	b_1	c_1
Intervall zum Grundton c_1	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	2
Intervall benachbarter Töne	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$.	

Das Intervall $\frac{9}{8}$ heißt ein großer ganzer Ton, $\frac{10}{9}$ ein kleiner ganzer Ton, das Intervall $\frac{16}{15}$ ein großer halber Ton.

209. Die chromatischen Tonleitern. Gleichschwebende Temperatur. Diese so erhaltenen Töne sind nun nicht ausreichend zur Erfüllung der von der praktischen Musik gestellten Forderung, der Möglichkeit, die Dur- oder Mollskala von jedem beliebigen Ton aus aufstellen zu können. Soll z. B. zu g als Grundton die natürliche diatonische Durskala aufgebaut werden, so sind dazu folgende Töne erforderlich:

$$\frac{3}{2},\ \frac{3}{2} \times \frac{9}{8} = \frac{27}{16},\ \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8},\ \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2,\ \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2 \times \frac{9}{8},$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{2} = 2 \times \frac{5}{4},\ \frac{3}{2} \times \frac{15}{8} = \frac{45}{16} = 2 \times \frac{45}{32},\ \frac{3}{2} \times 2 = 3 = 2 \times \frac{3}{2}.$$

Außer den bereits vorhandenen Tönen treten also die neuen Töne $\frac{27}{16}$ und $\frac{45}{32}$ auf. Ersterer liegt außerordentlich nahe an $a = \frac{5}{3}$; und zwar ist $\frac{27}{16} = \frac{5}{3} \times \frac{81}{80}$. Das Intervall $\frac{81}{80}$ heißt 1 Komma. Dagegen liegt der Ton $\frac{45}{32} = 1{,}406$ zwischen $\frac{4}{3} = 1{,}333$ und $\frac{3}{2} = 1{,}5000$. Er heißt fis. Während ein Komma für das Ohr kaum merklich

ist, ist das Intervall zwischen fis und *g* gleich demjenigen zwischen *e* und $f = \frac{16}{15}$; fis ist also notwendig als neuer Ton einzuführen. Analog wird man zur Einführung noch anderer neuer Töne geführt, wenn man die diatonischen Dur- und Mollskalen auf den anderen Tönen der C-dur- und -mollskalen als Grundton aufbauen will. Diese so neu geforderten Töne sollen nun ebenfalls als Grundton dienen können und erfordern wiederum neue Töne, so daß man zu einer sehr großen Zahl von Tönen kommt. Die kleine Terz zu *es* würde z. B. der Ton $\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{36}{25} = 1{,}440$ sein, der zwischen *fis* und *g*, näher an *fis* läge, und in Analogie zu *es* als *ges* bezeichnet werden könnte; usw. Da nun die Anzahl der Töne auf Instrumenten mit festen gegebenen Tönen, wie Klavier, Orgel usw. naturgemäß eine gewisse Grenze nicht überschreiten darf, ohne daß die Handhabung zu unbequem wird, ist man zu einer Reduktion der Anzahl der Töne innerhalb einer Oktave gezwungen, wobei der leitende Gesichtspunkt sein muß, alle Töne, deren Intervall so klein ist, daß das Ohr die Unterschiede kaum bemerkt, zu einem einzigen mittleren zusammenzufassen. Natürlich kann diese Reduktion nur mit gewisser Willkür und auf verschiedene Weise erfolgen. Man ist hierbei auf 12 Töne in der Oktave gelangt, indem man außer den Tönen, die in der natürlichen C-dur- und der natürlichen C-mollskala schon vorhanden sind, nämlich *c*, *d*, *es*, *f*, *g*, *as*, *a*, *b*, *h*, *c* noch je einen Ton zwischen *c* und *d* und *f* und *g* einschob, deren Intervalle größer sind, als die Intervalle zwischen zwei andern benachbarten. Man erhält so die aus 12 Halbtönen bestehende chromatische Tonleiter.

Auch bei der engeren Auswahl der Intervalle dieser 12 Töne sind verschiedene Wege möglich.

Die einfachste, jetzt allgemein angenommene Lösung ist die 1691 von Werckmeister[1]) vorgeschlagene Einführung der temperierten Skala oder gleichschwebenden Temperatur. Sie besteht darin, daß man alle 12 Intervalle der Oktave einander völlig gleich macht. Da man nun nach 12 dieser gleichen chromatischen Halbtonintervalle auf die nächsthöhere Oktave kommen soll, so ist die Größe dieses stets gleichen Intervalles gegeben durch $\sqrt[12]{2} = 1{,}05946$.

Man kann dann jeden beliebigen Ton als Grundton einer Tonleiter nehmen, wobei diese stets gleich ausfällt. Außer der Oktave ist aber dabei keines der vorkommenden Intervalle ein reines durch kleine ganze Zahlen gegebenes. Immerhin ist dieses wohl die beste der möglichen Lösungen.

1) A. Werckmeister, *Die musikalische Temperatur,* Frankfurt 1691.

Namenregister.

Sachregister.

Berichtigungen.

S. 28 Z. 9 von oben statt „beim Potenzflaschenzug" setze „beim gemeinen und Potenzflaschenzug".

S. 28 Z. 11 von oben statt „$P = \frac{Q}{2^n}$" setze „$P = \frac{Q}{2n}$ resp. $P = \frac{Q}{2^n}$".

S. 119 Z. 10 von oben statt „die Arbeit, die man leistet" setze „die Arbeit, die die Kräfte leisten".

S. 129 Gleichung (8'): Im ersten Term der rechten Seite fehlt das Integralzeichen.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Aus Natur und Geisteswelt (geh je n. M. 1—, geb. n. M. 1.25):

Auerbach, F., die graphische Darstellung. 1914.
Ichak, Das Perpetuum mobile. 1914.
Keller, H., Werdegang der modernen Physik. 1911.
Schulze, F. A., die großen Physiker u. ihre Leistungen. Mit 5 Bildnissen. 1910.
Speitkamp, Physik in Küche und Haus. 1914.

b. Grundlagen der Physik.

v. Brill, A., das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie. 2. Aufl. IV, 33 S. gr. 8. 1914. geh. n. ℳ 1.20.
Einstein, A., und M. Großmann, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. 38 S. gr. 8. 1913. geh. n. ℳ 1.20.
Frank, Ph., Relativitätstheorie. ca. 320 S. 8. *WH.* [In Vorbereitung.]
Lorentz, H. A., das Relativitätsprinzip. Drei Vorlesungen gehalten in Teylers Stiftung zu Haarlem. Deutsch von W. H. Keesom. 52 S. gr. 8. 1914. *BZmnU 1.* geh. n. ℳ 1.40.
—— A. Einstein u. H. Minkowski, das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen. Mit Anmerkungen von A. Sommerfeld und Vorwort von O. Blumenthal. IV, 89 S. gr. 8. 1913. *FMW 2.* geh. n. ℳ 3.—, geb. n. ℳ 3.60.
Minkowski, H., zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Mit einem Vorwort von O. Blumenthal. 82 S. gr. 8. 1910. *FMW 1.* geh. n. ℳ 2.40.
Planck, M., das Prinzip der Erhaltung der Energie. 3. Auflage. XVI, 278 S. 8. 1913. *WH 6.* geb. n. ℳ 6.—
Volterra, V., drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik. Mit Zusätzen und Ergänzungen des Verfassers. Deutsch von E. Lamla. Mit 19 Fig. und 2 Tafeln. IV, 84 S. gr. 8. 1914. geh. n. ℳ 3.—

Aus Natur und Geisteswelt (geh. je n. M. 1.—, geb. n. M. 1.25):

Auerbach, F., die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. 3. Auflage. 1910.
Mie, G., Moleküle, Atome, Weltäther. 3. Auflage. 1911.

c. Molekularphysik.

Byk, A., Einführung in die kinetische Theorie der Gase. 2 Bändchen. 8. Mit Fig. *MPL 10, 1 u. 2.* I: Die idealen Gase. V, 102 S. 1910. geh. n. ℳ 2.80, geb. n. ℳ 3.20. II. In Vorbereitung.
Hertz, P., Lehrbuch der statistischen Mechanik (mechanische Grundlagen der Thermodynamik.) ca. 500 S. gr. 8. *TS.* [In Vorbereitung.]
Hilbert, D., und E. Hecke, Vorlesungen über kinetische Gastheorie. In 2 Bdn. ca. 288 S. gr. 8. *MVG.* [In Vorbereitung.]
Kelvin, Lord, Vorlesungen über Molekulardynamik und Theorie des Lichtes. Deutsch herausgegeben von B. Weinstein. Mit 132 Fig. XVIII, 590 S. gr. 8. geb. n. ℳ 18.—
Lorentz, H. A., Abhandlungen über theoretische Physik. In 2 Bdn. I. Bd. Mit 40 Fig. IV, 489 S. gr. 8. 1907. geh. n. ℳ 16.—, geb. n. ℳ 17.— [II. Band in Vorb.]
v. Smoluchowski, M., grundsätzliche Fragen der Gastheorie. ca. 190 S. gr. 8. *FMW.* [In Vorbereitung.]
Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität von M. Planck, P. Debye, W. Nernst, M. v. Smoluchowski, A. Sommerfeld, H. A. Lorentz, mit Beiträgen von H. Kamerlingh-Onnes und W. H. Keesom, einem Vorwort von D. Hilbert und 7 in den Text gedruckten Fig. IV, 196 S. gr. 8. 1914 *MVG VI.* geh. n. ℳ 7.—, geb. n. ℳ 8.—

d. Wärmelehre.

Bryan, G. H., Thermodynamics. An introductory Treatise dealing mainly with first Principles and their direct Applications. XIV, 204 S. gr. 8. 1907. *TS 21.* geb. n. ℳ 7.—
Burkhardt, H., Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen. (Näheres siehe S. 3 unter c.)
Hilbert, D., und E. Hecke, Vorlesungen über kinetische Gastheorie. In 2 Bdn. ca. 288 S. gr. 8. *MVG* [In Vorbereitung.]
Lorentz, H. A., les théories statistiques en thermodynamics. ca. 64 S. gr. 8. [Unter der Presse.]

Aus Natur und Geisteswelt (geh. je n. M. 1.—, geb. n. M. 1.25):

Alt, H., die Kälte, ihr Wesen, ihre Erzeugung und Verwertung. 1910.
Börnstein, R., die Lehre von der Wärme. 1907.